

Appunti di Elementi di Geometria Algebrica  
Anno Accademico 2015/2016

Riccardo Morandin, Viola Siconolfi, Giovanni Barbarino

7 marzo 2016



# Capitolo 1

## Bozze lezioni

### 1.1 Lezione 1 (30 Set 2015)

**Interamente trascritta nei capitoli successivi.**

Ricordiamo che se  $A$  è un UFD, allora anche  $A[x]$  lo è (in particolare lo sarà  $A[x_1, \dots, x_n]$ ).

**Definizione 1.1.1.** Se  $R$  è un UFD, un polinomio  $p = \sum a_i x^i \in R[x]$  si dice *primitivo* se  $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$ .

**Teorema 1.1.2** (Lemma di Gauss). Sia  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y] = \mathbb{K}[\mathbf{x}, y]$  un polinomio tale che  $\deg_y(p) \geq 1$ . Allora  $p$  è irriducibile su  $\mathbb{K}[\mathbf{x}, y]$  se e solo se  $p$  è irriducibile in  $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]$  ed è primitivo in  $\mathbb{K}[\mathbf{x}][y]$  (cioè come polinomio nella variabile  $y$ , a coefficienti in  $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ ).

*Dimostrazione omessa.*

**Esempio 1.1.3.** Il polinomio  $p = x^3 - zy^7$  è irriducibile in  $\mathbb{K}[x, y, z]$ : infatti  $p$  è irriducibile in  $\mathbb{K}(x, y)[z]$  (è di grado 1 in  $z$ ), ed è primitivo rispetto a  $z$  ( $\gcd(x^3, -y^7) = 1$ ).

**Esempio 1.1.4.** Se  $p(x, y) = y^2 - f(x)$ , e  $f(x)$  ha un fattore irriducibile di molteplicità dispari, allora  $p$  è irriducibile in  $\mathbb{K}[x, y]$ .

*Dimostrazione.* Chiaramente  $p$  è primitivo rispetto alla  $y$ . Essendo  $\deg_y(p) = 2$ ,  $p(x)$  sarà riducibile in  $\mathbb{K}(x)[y]$  se e solo se  $f(x)$  ammette radice quadrata in  $\mathbb{K}(x)$ , cioè se  $\exists a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]$  (wlog  $\gcd(a(x), b(x)) = 1$ ) tali che

$$\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)^2 = f(x).$$

Equivalentemente,  $a(x)^2 = b(x)^2 f(x)$ , per cui  $f(x)$  può contenere solo fattori irriducibili con molteplicità pari, che è assurdo.  $\square$

**Esercizio 1.1.5.** Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , allora l'Esempio 1.1.4 è un se e solo se.

**Definizione 1.1.6.** Se  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , definiamo la *varietà* associata a  $f$  come il luogo di zeri  $V(f) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0\}$ .

Mentre la varietà  $V(f)$  è univocamente determinata dal polinomio  $f$ , dalla varietà non si può sempre risalire a  $f$ . Per esempio, in  $\mathbb{R}[x]$  i polinomi  $f_1 = 1$  e  $f_2 = 1 + x^2$  verificano  $V(f_1) = V(f_2) = \emptyset$ . Non basta neanche lavorare in un campo algebricamente chiuso: presi  $g_1 = x-1$  e  $g_2 = (x-1)^2$  in  $\mathbb{C}[x]$ , chiaramente  $V(g_1) = V(g_2) = \{1\}$ . Tuttavia, se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , qualcosa si può comunque ricavare da  $V(f)$ : i singoli fattori irriducibili di  $f$  (questo è il Nullstellensatz).

**Definizione 1.1.7.** Consideriamo l'anello dei polinomi  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , quozientato rispetto alla relazione d'equivalenza data da  $f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : g = \lambda f$ : i suoi elementi  $\mathcal{I} = [f]$  sono detti *ipersuperfici affini*. Osserviamo subito che è ben definito il *supporto*  $V(f)$  dell'ipersuperficie affine  $\mathcal{I}$  (non dipende dalla scelta del rappresentante).

**Definizione 1.1.8.** Se  $f = cp_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  è una fattorizzazione di  $f$  in fattori irriducibili distinti, denoteremo anche  $\mathcal{I} = [f] = \alpha_1 \mathcal{I}_1 + \dots + \alpha_k \mathcal{I}_k$ , dove  $\mathcal{I}_k = [p_k]$ ; in tal caso si osserva che  $V(f) = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_k)$ . Definiamo il *grado* dell'ipersuperficie affine  $\mathcal{I} = [f]$  come  $\deg \mathcal{I} = \deg f$ : nella notazione precedente si avrà  $\deg(\mathcal{I}) = \alpha_1 \deg(\mathcal{I}_1) + \dots + \alpha_k \deg(\mathcal{I}_k)$ . Diremo che  $\mathcal{I} = [f]$  è *ridotta* se  $\alpha_i = 1$  per  $i = 1, \dots, k$ .

Osserviamo che il supporto non determina l'ipersuperficie affine: per esempio  $[x] \neq [x^2]$  in  $\mathbb{R}[x]$ , tuttavia  $V(x) = V(x^2) = \{0\}$ .

**Esempio 1.1.9.** Consideriamo il polinomio  $f = x^3(x^2 - y^2) \in \mathbb{R}[x, y]$ : se  $\mathcal{I} = [f]$ ,  $\ell = [x]$ ,  $r = [x - y]$  e  $s = [x + y]$ , possiamo scrivere  $\mathcal{I} = 3\ell + r + s$ .

**Studio locale** Sia  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $P \in V(f)$ ,  $\ell = \{P + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{A}^n$  con  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  una retta passante per  $P$ . Consideriamo l'intersezione di  $f$  con  $\ell$  data da  $g(t) = f(P + t\mathbf{v}) \in \mathbb{K}[t]$ : si considerano due casi.

- Se  $g \equiv 0$ , allora  $\ell$  è contenuta interamente in  $V(f)$ , e diremo che  $\ell$  interseca  $f$  in  $P$  con molteplicità infinita;
- Se  $g \not\equiv 0$ , allora  $g(t) = t^m h(t)$  con  $h(0) \neq 0$ , e diremo che  $\ell$  interseca  $f$  in  $P$  con molteplicità  $m$ . Se  $m > 1$ , diremo che  $\ell$  è *tangente* a  $f$  in  $P$ .

**Definizione 1.1.10.** Se  $\mathcal{C}$  è un'ipersuperficie affine, diremo che  $P$  è un *punto liscio* di  $\mathcal{C}$  se  $\exists$  almeno una retta  $\ell \ni P$  non tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P$ .

**Esempio 1.1.11.** Se  $\mathcal{C} = [f] \subseteq \mathbb{A}^n$  con  $\deg f = 1$  (e  $n \geq 2$ ?), allora esiste sempre una retta che "buca il piano".

**Esempio 1.1.12.** Sia  $\mathcal{C} = [f] \subseteq \mathbb{A}^2$  con  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$ : vogliamo studiare il punto  $P = (0, 0)$ . Sia  $r = (ta, tb)$ ,  $t \in \mathbb{K}$  una retta con  $(a, b) \neq 0$ : avremo

$$g(t) := f(r(t)) = t^2 b^2 - t^3 a^3 + ta = -t(t^2 a^3 - tb^2 - a).$$

L'unica retta tangente si ha quindi per  $a = 0$ , cioè se  $r : x = 0$ , quindi  $P$  è un punto liscio per  $f$ . Tale retta interseca  $f$  in  $P$  con molteplicità 2.

**Esempio 1.1.13.** Sia  $f = y^2 - x^3 - x^2$ : vogliamo studiare il punto  $P = (0, 0)$ . Sia  $\ell = \{(ta, tb) : t \in \mathbb{K}\}$  una retta con  $(a, b) \neq 0$ : avremo

$$g(t) := f(\ell(t)) = t^2(b^2 - a^2 - a^3 t).$$

Tutte le rette per  $P$  sono rette tangenti, dunque abbiamo un *punto singolare*. Se  $b^2 - a^2 \neq 0$ , l'intersezione ha molteplicità 2, la stessa di  $P$  per  $f$ . Se  $b^2 - a^2 = 0$  (cioè se la retta è  $y \pm y = 0$ ), l'intersezione ha molteplicità 3, che è maggiore di quella di  $P$  per  $f$ ; si parlerà quindi di *tangenti principali*.

**In generale** Se vogliamo studiare un punto  $P \in \mathbb{A}^n$ , possiamo sempre ricondurci al caso  $P = 0$ , a meno di applicare una traslazione. Una retta generica passante per  $P = (0, \dots, 0)$  è della forma  $\ell = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbb{K}\}$ , dove  $\mathbf{v} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Sostituiamo quindi  $g(t) := f(t\mathbf{v})$ :  $\ell$  è una tangente a  $f$  in  $P$  se e solo se  $g'(0) = 0$  (ce ne convinciamo facilmente, dato che è equivalente ad avere  $t^2 \mid g(t)$ ). Dato che vale

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{v})v_i,$$

si presentano due casi.

- Se  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$  per  $i = 1, \dots, n$ , allora  $P$  è un punto singolare.
- Se  $\exists i$  tale che  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$ , allora  $P$  è un punto liscio (basta considerare la retta definita da  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ). In tal caso, l'unione delle direzioni tangenti a  $f$  in  $P$  è un'iperpiano:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)v_i = 0.$$

Tale spazio lineare è detto *iperpiano tangente* a  $f$  in  $P$ , e si indica con  $\text{Tg}_f P$ .

Osserviamo che  $P$  è liscio se e solo se  $\text{Tg}_f P \neq \mathbb{K}^n$ .

Sia  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^n$  un'ipersuperficie affine, sia  $P \in \mathcal{C}$ . Mettiamoci in un sistema di coordinate affini tali che  $P = 0$ . L'equazione dell'ipersuperficie ammette sempre una scrittura della forma  $f(\mathbf{x}) = f_m(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ , dove  $f_m \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_m$  e tutti i monomi di  $g$  hanno grado  $> m$ .

- Vale sempre  $m \geq 1$  ( $0 \in V(f)$ ).
- $\mathcal{C}$  è liscia in  $P$  se e solo se  $m = 1$ .
- Fissata una retta  $t\mathbf{v}$ , intersechiamola con  $f$ , ottenendo

$$g(t) = f(t\mathbf{v}) = t^m(f_m(\mathbf{v}) + tk(t)).$$

- Ogni retta interseca  $f$  in  $P$  con molteplicità  $\geq m$ .
- La molteplicità d'intersezione con  $f$  in  $P$  è esattamente  $m$  se e solo se  $f_m(\mathbf{v}) \neq 0$ .
- Se  $\mathbb{K}$  è un campo infinito, allora  $\exists \mathbf{v} : f_m(\mathbf{v}) \neq 0$  per il principio d'identità dei polinomi, quindi  $m$  è il minimo della molteplicità dell'intersezione di  $\ell$  con  $f$  in  $P$ , al variare di  $\ell$  tra le rette per  $P$ . Tale quantità è detta *molteplicità* di  $m$  per  $\mathcal{C}$ .
- Definiamo *cono tangente* a  $f$  in  $P$  l'insieme delle rette che intersecano  $f$  in  $P$  con molteplicità  $> m$ . Questo è dato dalle direzioni  $\mathbf{v}$  tali che  $f_m(\mathbf{v}) = 0$ .

La molteplicità di  $P$  per  $f$  è esattamente  $m$  se e solo valgono le seguenti:

1. Tutte le derivate parziali di  $f$  di ordine  $< m$  si annullano in  $P$ ;
2. Esiste almeno una derivata  $m$ -esima che non si annulla in  $P$ .

## 1.2 Lezione 2 (2 Ott 2015)

**Teorema 1.2.1** (Principio d'identità dei polinomi). Sia  $\mathbb{K}$  un campo infinito e  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tale che  $V(p) = \mathbb{A}^n$ : allora  $p = 0$ .

*Dimostrazione.* Per induzione. Se  $n = 1$ , è un'applicazione immediata del teorema di Ruffini. Supponiamo che la tesi sia verificata fino a  $n$ , e mostriamo che è verificata anche per  $n + 1$ . Scriviamo  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$  in funzione della variabile  $y$ :

$$p(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=0}^d a_i(\mathbf{x})y^i$$

(se  $y$  non compare,  $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  e si applica l'ipotesi induttiva). Applichiamo l'ipotesi induttiva su  $a_d(\mathbf{x})$ :  $\exists \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{A}^n$  t.c.  $a_d(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$ , da cui si conclude applicando l'ipotesi induttiva a  $p(\bar{\mathbf{x}}, y) \in \mathbb{K}[y]$ .  $\square$

**Definizione 1.2.2.** Un *anello graduato* è un gruppo abeliano della forma

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i,$$

dove gli  $A_i$  sono a loro volta gruppi abeliani, dotato di un prodotto (che gli conferisce struttura di anello) tale che  $\forall i, j \geq 0$   $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ . Gli elementi di  $A_n$  sono detti *omogenei* di grado  $n$ .

**Esempio 1.2.3.** Un esempio di anello graduato è dato dall'anello dei polinomi

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d,$$

dove  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$  è il gruppo dei polinomi omogenei di grado  $d$ , e il prodotto è quello che ci si aspetta. Dato che in questo caso  $A_0 = \mathbb{K}$  è un campo, possiamo parlare di *algebra graduata*.

**Esercizio 1.2.4.** Sia  $A$  un anello graduato che è anche un dominio, sia  $F \in A_k$  un elemento omogeneo, e siano  $G, H \in A$  tali che  $F = GH$ . Allora anche  $G$  e  $H$  sono elementi omogenei.

**Definizione 1.2.5.** Definiamo la *carta affine standard*  $(U_0, \psi_0)$  di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , dove

$$\begin{aligned} U_0 &= \{[x_0, \dots, x_n] : x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \\ \psi_0 : \mathbb{A}^n &\leftrightarrow U_0 \quad | \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto [1, x_0, \dots, x_n], \\ \psi_0^{-1} : U_0 &\leftrightarrow \mathbb{A}^n \quad | \quad [x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \end{aligned}$$

Si possono definire analogamente carte affini  $(U_i, \psi_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ .

**Definizione 1.2.6.** Definiamo la *deomogeneizzazione* come

$$D : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \quad | \quad F(x_0, \dots, x_n) \mapsto F(1, x_1, \dots, x_n).$$

Definiamo l'*omogeneizzazione* come

$$H : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \quad \left| \quad \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ f(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), \quad d = \deg f. \end{array} \right.$$

Quando non diversamente specificato, denoteremo con lettere maiuscole i polinomi omogenei in  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ , e con quelle minuscole quelli generici in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

Si verifica facilmente che  $D$  è un'omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre, tuttavia  $H$  è solo un'applicazione moltiplicativa. Inoltre  $D \circ H = \text{Id}$ , mentre in generale  $H \circ D \neq \text{Id}$ .

*Osservazione 1.2.7.* Cosa fa  $H \circ D$  sui polinomi omogenei? Se  $F = x_0^m F_1$  con  $x_0 \nmid F_1$ , allora  $H \circ D(F) = F_1$ .

**Proposizione 1.2.8.** Se  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  è irriducibile, allora  $F = H(f)$  è irriducibile.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $F = GH$  con  $G, H$  fattori non invertibili (che saranno omogenei per l'Esercizio 1.2.4): chiaramente  $x_0 \nmid F$ , da cui  $x_0 \nmid G, H$ . Per moltiplicatività vale  $f = D(F) = D(GH) = D(G)D(H)$ , inoltre  $D(G), D(H)$  non possono essere invertibili perché  $G, H$  sono omogenei di grado positivo, non divisibili per  $x_0$ . Dunque  $f$  non potrebbe essere irriducibile.  $\square$

**Proposizione 1.2.9.** Se  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  è un polinomio omogeneo irriducibile, tale che  $x_0 \nmid F$  (o equivalentemente  $F \neq \lambda x_0$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$ ), allora  $f = D(F)$  è irriducibile.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $f = gh$  con  $g, h$  fattori non invertibili: l'ipotesi  $x_0 \nmid F$  implica  $F = H(f) = H(g)H(h)$ , inoltre  $H(g), H(h)$  sono non invertibili (perché  $H$  non cambia il grado). Questo va in contraddizione con l'ipotesi che  $F$  sia irriducibile.  $\square$

*Osservazione 1.2.10.* Se  $F = x_0^m G$  con  $x_0 \nmid G$ , fattorizziamo in irriducibili  $g = D(G) = D(F) = cp_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ : grazie alle proposizioni precedenti,  $F$  si fattorizza come  $F = cx_0^m P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$ , dove  $P_i = H(p_i)$ .

*Osservazione 1.2.11.* Se  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  è un polinomio omogeneo,  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad F(\lambda \mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x})$ . In particolare, ha senso chiedersi se  $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è una radice di  $F$  (invece non ha senso chiedersi quale valore venga assunto, se diverso da zero).

**Proposizione 1.2.12.** Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , i polinomi omogenei in  $\mathbb{K}[x, y]$  si possono sempre decomporre in fattori lineari.

*Dimostrazione.* Sia  $F = x^m G \in \mathbb{K}[x, y]_d$ , con  $x \nmid G$ , sia  $g = D(G) = D(F) \in \mathbb{K}[y]$ : essendo  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso, possiamo fattorizzare  $g = \prod_{i=1}^k (b_i y + a_i)^{\alpha_i}$ , e di conseguenza (vedi l'Osservazione 1.2.10)  $F = x^m \prod (a_i x + b_i y)^{\alpha_i}$ .  $\square$

**Definizione 1.2.13.** Alla luce della Proposizione 1.2.12, se  $F \in \mathbb{K}[x, y]$  è omogeneo e  $[b_i, -a_i]$  è una sua radice, allora possiamo definirne la *molteplicità* come  $\alpha_i$  dato dalla decomposizione in potenze di fattori lineari distinti (basta passare alla chiusura algebrica).

**Richiami e nuove definizioni** Sia  $P = (0, 0)$ , sia  $\mathcal{C}$  una curva piana di equazione  $f = 0$ . Scriviamo  $f = f_m(x, y) + g(x, y)$ , dove  $f_m(x, y)$  ha grado  $m$  e contiene tutti i monomi di grado minimo. Diremo che  $m$  è la *molteplicità* di  $P$  per  $\mathcal{C}$ . Se  $m = 1$ , avremo  $f_1(x, y) = ax + by$  che chiameremo *equazione della retta tangente* a  $\mathcal{C}$  in  $P$ . Più in generale, se  $m > 0$  chiamiamo  $f_m(x, y)$  *equazione del cono tangente* alla curva  $\mathcal{C}$  in  $P$ . Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , abbiamo visto che possiamo scrivere  $f_m(x, y) = \prod \ell_i(x, y)^{\alpha_i}$ , dove gli  $\ell_i$  sono polinomi lineari omogenei distinti, gli  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  e  $\sum \alpha_i = m$ . Le  $\ell_i$  sono le *tangenti principali* con molteplicità  $\alpha_i$ .  $P$  si dice *punto singolare ordinario* se  $\forall i \quad \alpha_i = 1$ . Un punto di molteplicità 2 è detto *nodo* se è ordinario, *cuspidale* altrimenti.

**Esempio 1.2.14.**  $P = (0, 0)$  è un nodo della curva data dall'equazione  $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ , mentre è una cuspidale di  $y^2 = x^3$ .

**Ipersuperfici proiettive** Sia  $\mathcal{I} = [F]$ ,  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ : definiamo grado, supporto, componenti irriducibili (con molteplicità) in modo analogo alle ipersuperfici affini.

Osserviamo che, dato che le componenti di  $\mathcal{I}$  sono date da polinomi omogenei, sono ancora ipersuperfici proiettive.

Se  $[f]$  è un'ipersuperficie affine, definiamo la sua *chiusura proiettiva* come  $[F] = [H(f)]$ ; se  $[F]$  è un'ipersuperficie proiettiva, definiamo la sua *parte affine* come  $[f] = [D(F)]$ .

Lo studio locale di un'ipersuperficie proiettiva  $\mathcal{I} = [F]$  può essere effettuato ripetendo le stesse procedure che sono state applicate alle rette proiettive. Alternativamente, possiamo studiarne la parte affine, per poi riportarci alla chiusura proiettiva (facendo attenzione alle eventuali componenti  $x_0$ ). Analogamente, per effettuare lo studio locale di un'ipersuperficie affine  $\mathcal{I} = [f]$ , possiamo studiarne la chiusura proiettiva, per poi tornare indietro (questa volta senza perdita di informazioni).

In pratica, deomogeneizzando si perde il *piano all'infinito*  $x_0 = 0$ ; quindi, se interessa studiare un punto del proiettivo che ha quella coordinata nulla, possiamo applicare un'altra carta.

**Esempio 1.2.15.** Consideriamo l'ipersuperficie affine data da  $f(x, y) = y^2 - p(x)$  in  $\mathbb{A}^2$ , dove  $d = \deg p \geq 3$ , e cerchiamone i punti singolari. Per fatti visti nella lezione precedente, un punto  $P = (x, y)$  è singolare se e solo se soddisfa

$$\begin{cases} f(x, y) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = p(x); \\ p'(x) = 0; \\ 2y = 0; \end{cases} \iff y = p(x) = p'(x) = 0.$$

Quindi i punti singolari sono gli  $(a, 0)$  dove  $a$  è una radice multipla di  $p(x)$ . Possiamo dunque scrivere

$$f(x, y) = y^2 - (x - a)^\alpha q(x), \quad \alpha \geq 2, \quad q(a) \neq 0.$$

Effettuando il cambio di variabili  $u = x - a$ ,  $v = y$ ,  $g(u, v) = f(x(u), y(v))$ ,  $q_1(u) = q(x(u))$ :

$$g(u, v) = v^2 - u^\alpha q_1(u), \quad \alpha \geq 2, \quad q_1(0) \neq 0.$$

Dunque la molteplicità di  $P$  in  $\mathcal{I}$  è 2. Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , possiamo fare un'ulteriore distinzione: se  $\alpha = 2$ ,  $P$  sarà un nodo, altrimenti sarà una cuspid.

Vogliamo ora studiare l'intersezione di  $[f]$  con il piano all'infinito, cioè i punti  $P = [z, x, y] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  tali che  $P \in V(F)$  ( $F = H(f)$  chiusura proiettiva) e  $z = 0$ . Per far questo, passiamo prima alla chiusura proiettiva

$$y^2 z^{d-2} - \bar{p}(x, z) = 0, \quad \bar{p}(x, z) \text{ monico e omogeneo di grado } d,$$

e osserviamo che  $\bar{Q} = [z, x, y] \in V(F) \cap \pi_\infty$  se e solo se soddisfa  $\bar{p}(x, 0) = 0$ , da cui  $\text{lt}(p) = x^d = 0$  e infine  $x = 0$ . Si tratta dunque del *punto improprio*  $\bar{Q} = [0, 0, 1]$ .

Per studiare questo punto, passiamo alla carta affine  $y \neq 0$ , ottenendo l'ipersuperficie affine determinata da

$$f_y(x, z) = z^{d-2} - \bar{p}(x, z) = 0.$$

e il punto affine  $Q = (0, 0)$ . Effettuando lo studio locale per  $Q$ , osserviamo che

- Se  $d = 3$ , allora  $Q$  è un punto liscio.
- Se  $d \geq 4$ , allora  $Q$  è un punto singolare di molteplicità  $d - 2$ .

Volendo studiare la molteplicità dell'intersezione di  $\mathcal{I}$  con il piano all'infinito  $z = 0$ , osserviamo che  $f_y(x, 0) = -\bar{p}(x, 0) = -x^d$ , dunque nel caso  $d = 3$  siamo in presenza di un *flesso ordinario*.

**Teorema 1.2.16** (formula di Eulero). Sia  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$  un polinomio omogeneo di grado  $d$ : allora vale la formula

$$d \cdot F(x) = \sum_0^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x).$$

*Hint.* Dimostrare la formula nel caso dei monomi, quindi sistemare per linearità.

Tramite la formula di Eulero possiamo dimostrare la seguente:

**Proposizione 1.2.17.** Supponiamo  $\text{char } \mathbb{K} = 0$ , sia  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  e  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ . Allora  $\mathbf{a}$  è un punto singolare per  $[f]$  se e solo se  $\psi_0(\mathbf{a}) = [1, a_1, \dots, a_n] = [1, \mathbf{a}]$  è un punto singolare della chiusura proiettiva  $[F]$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $P$  è singolare per  $[f]$  se e solo se

$$\begin{cases} f(\mathbf{a}) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n \end{cases} \iff \begin{cases} F(1, \mathbf{a}) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

(l'unica derivata che potrebbe creare problemi è quella rispetto a  $x_0$ , che non viene effettuata). Applicando la formula di Eulero otteniamo

$$F(1, \mathbf{a}) = \frac{1}{d} \left( \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, \mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) \right),$$

per cui il secondo sistema è a sua volta equivalente a  $\nabla F(1, \mathbf{a}) = 0$ . □

Analogamente, possiamo mostrare che lo spazio tangente a  $F$  in  $[1, \mathbf{a}]$  è la chiusura proiettiva dello spazio tangente a  $f$  in  $\mathbf{a}$ : se  $\mathbf{a} \in V(f)$ , allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, \mathbf{a}), \end{aligned}$$

da cui, passando alla chiusura proiettiva, otteniamo l'equazione

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, \mathbf{a}) = 0.$$

### 1.3 Lezione 3 (7 Ott 2015)

Sia  $\mathcal{C} = [F]$  una curva piana su  $\mathbb{P}^2$ , sia  $\ell \subseteq \mathbb{P}^2$  una retta: ci chiediamo quanti siano i punti di intersezione di  $\mathcal{C}$  con  $\ell$ . Sia  $\ell = \{[tv + sw] : [t, s] \in \mathbb{P}^1\}$  la forma parametrica di  $\ell$ , dove  $[v] \neq [w]$ : sostituendola in  $F$ , otteniamo  $G(t, s) = F(tv + sw)$ . Possiamo separare due casi:

- Se  $G \equiv 0$ , allora  $\ell \subseteq V(F)$ .

- Se  $G \neq 0$ , allora  $G$  è ancora un polinomio omogeneo di grado  $\deg G = \deg F = m$ , quindi  $\#(\mathcal{C} \cap \ell) \leq m$ . Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , abbiamo visto che possiamo sempre fattorizzare

$$G(t, s) = \prod_{i=1}^k (a_i t + b_i s)^{\alpha_i}, \quad \forall i \neq j \quad [a_i, b_i] \neq [a_j, b_j], \quad \sum \alpha_i = m$$

dunque i punti d'intersezione sono gli  $[a_i, b_i]$ , con molteplicità  $\alpha_i$ , e la molteplicità totale è  $\#(\mathcal{C} \cap \ell) = m$ .

**Teorema 1.3.1** (Bézout). Se  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  sono curve piane,  $m = \deg \mathcal{C}$ ,  $n = \deg \mathcal{D}$  e  $\mathbb{K}$  è un campo infinito:

- (i) Se  $\#(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) > mn$ , allora  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  hanno una componente comune.
- (ii) Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  e  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  non hanno componenti comuni, allora  $\#(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = mn$  (con molteplicità).

*Dimostrazione.* Mettiamoci in un sistema di coordinate omogenee  $[z, x, y]$  tali che  $[0, 0, 1] \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$  (questo è sempre possibile farlo per il principio d'identità dei polinomi, applicato al polinomio associato alla varietà  $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ ). Siano  $w \log F$ ,  $G$  polinomi omogenei, monici rispetto a  $y$ , tali che  $\mathcal{C} = [F]$  e  $\mathcal{D} = [G]$ :

$$F(z, x, y) = a_0 + a_1 y + \dots + y^m, \quad G(z, x, y) = b_0 + b_1 y + \dots + y^n, \quad (1.1)$$

dove per omogeneità  $a_i \in \mathbb{K}[z, x]_{m-i}$  e  $b_j \in \mathbb{K}[z, x]_{n-j}$ . Consideriamo il polinomio dato dal risultante  $R(z, x) = \text{Ris}_y(F, G)$ .

- Per le proprietà del risultante,  $R(z, x) \equiv 0$  se e solo se  $F$ ,  $G$  hanno un fattore comune  $D$  in  $\mathbb{K}[z, x][y]$ , con  $\deg_y D \geq 1$ . Tuttavia in questo caso  $\deg_y D \geq 1$  è equivalente a  $\deg D \geq 1$ , per omogeneità.
- Se  $R(z, x) \neq 0$ , verificheremo che  $R \in \mathbb{K}[z, x]_{mn}$ . Dato che  $F$  e  $G$  sono monici in  $y$ , per la proprietà di specializzazione del risultante vale

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad R(\alpha, \beta) = \text{Ris}(F(\alpha, \beta, y), G(\alpha, \beta, y)). \quad (1.2)$$

(i) Siano  $P_1, \dots, P_{mn+1}$  punti distinti in  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ . Supponiamo che il sistema di coordinate omogenee  $[z, x, y]$  soddisfi anche

$$\forall i \neq j \quad [0, 0, 1] \notin L(P_i, P_j),$$

dove  $L(P_i, P_j)$  è la retta passante per  $P_i$  e  $P_j$  (si può fare per motivi analoghi al caso precedente). In particolare, i punti soddisferanno  $P_i = [a_i, b_i, c_i] \in \mathbb{P}^2$ , dove gli  $[a_i, b_i]$  sono a due a due distinti e non nulli (altrimenti la rispettiva retta passerebbe per  $[0, 0, 1]$ ). Dato che  $\forall i \quad P_i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ , si ha che  $F(a_i, b_i, y)$ ,  $G(a_i, b_i, y)$  (che non sono nulli perché omogenei e monici in  $y$ ) hanno la componente  $y - c_i$  in comune, dunque  $R(a_i, b_i) = 0$  per la (1.2). In particolare,  $R$  avrà almeno  $mn + 1$  radici (omogenee) distinte, quindi non può essere un polinomio omogeneo di grado  $mn$ , e sarà necessariamente nullo.

(ii) Supponiamo  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  e che  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  non abbiano componenti in comune: in particolare  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_h\}$  è un insieme finito (anzi,  $h \leq mn$ ), e possiamo metterci in un sistema di coordinate omogenee analogo a quello del punto (i). Osserviamo che in particolare  $F$ ,  $G$  non avranno componenti comuni, da cui  $R \neq 0$ . Possiamo quindi fattorizzare

$$R(z, x) = \prod_{i=1}^k (b_i z - a_i x)^{\alpha_i}, \quad \forall i \neq j \quad [a_i, b_i] \neq [a_j, b_j], \quad \sum \alpha_i = mn.$$



( $n \geq 3$ ) Per applicare il teorema di Bézout, dovremmo prima diminuire la dimensione. Consideriamo quindi l'intersezione di  $F, G, H$  con il piano  $x_3 = \dots = x_n = 0$ , data da  $\overline{F}(x_0, x_1, x_2)$ ,  $\overline{G}(x_0, x_1, x_2)$  e  $\overline{H}(x_0, x_1, x_2)$  tali che  $\overline{F} = \overline{G}\overline{H}$ . Separiamo due ulteriori casi:

- Se  $\overline{F} \equiv 0$ , allora wlog  $\overline{G} \equiv 0$ . Prendiamo  $P = [a, b, c, 0, \dots, 0]$  con  $[a, b, c] \in V(\overline{H})$ : in particolare  $P \in V(G) \cap V(H)$  e si conclude come sopra.
- Se  $\overline{F} \not\equiv 0$ , possiamo applicare il teorema di Bézout e ottenere  $[a, b, c] \in V(\overline{G}) \cap V(\overline{H})$ : in particolare  $P = [a, b, c, 0, \dots, 0] \in V(G) \cap V(H)$  e si conclude come sopra.  $\square$

**Esercizio 1.3.4.** Sia  $\mathcal{C}$  una curva piana ridotta: allora  $\mathcal{C}$  ha un numero finito di punti singolari.

*Hint.* Usare il teorema di Bézout e il Nullstellensatz.

**Esercizio 1.3.5.** Siano  $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2$  punti distinti. Quante sono le coniche che ci passano attraverso?

*Soluzione.* Siano  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$  due coniche distinte che passano per i  $P_i$ . Per il teorema di Bézout,  $\mathcal{Q}_1$  e  $\mathcal{Q}_2$  hanno una componente comune, cioè una retta  $\ell$ . Si avrà quindi  $\mathcal{Q}_1 = \ell + r_1$  e  $\mathcal{Q}_2 = \ell + r_2$ , dove  $r_1, r_2$  sono due rette distinte. I punti  $P_i$  vanno dunque cercati in  $\ell + (r_1 \cap r_2)$ , e possiamo separare tre casi:

- Se tutti i punti stanno su una retta  $\ell$ , le coniche possibili sono tutte le  $\mathcal{Q}_r = \ell + r$  al variare di  $r$  tra le rette di  $\mathbb{P}^2$ .
- Se quattro punti (wlog  $P_1, \dots, P_4$ ) stanno su una retta  $\ell$  e  $P_5 \notin \ell$ , le coniche possibili sono tutte le  $\mathcal{Q}_r = \ell + r$  al variare di  $r$  tra le rette che contengono  $P_5$ .
- Se i punti non sono a 4 a 4 allineati, allora esiste un'unica conica che passa per essi (l'esistenza in realtà non l'abbiamo vista, ma segue dalla quantità di condizioni lineari da imporre).  $\square$

**Esercizio 1.3.6.** Se  $P_1, \dots, P_5 \in \mathcal{Q}$ , con  $\mathcal{Q}$  conica, allora i  $P_i$  sono in posizione generale se e solo se  $\mathcal{Q}$  è liscia.

**Teorema 1.3.7.** Siano  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}^2$  curve senza componenti comuni, sia  $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$  un punto con molteplicità  $r$  per  $\mathcal{C}$  e  $s$  per  $\mathcal{D}$ . Allora valgono le seguenti:

- (i)  $I(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \geq rs$  con molteplicità.
- (ii)  $I(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 1$  se e solo se  $r = s = 1$ ; inoltre in tal caso hanno tangenti distinte in  $P$ .

Più in generale vale  $I(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = rs$  se e solo se  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  non hanno tangenti principali in comune, ma questo non lo dimostriamo.

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo il primo punto (per motivi non chiari). Scegliendo un opportuno sistema di coordinate affini, possiamo scrivere  $\mathcal{C} = [f]$  e  $\mathcal{D} = [g]$  con

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(x) + a_1(x)y + \dots + y^m, & m &\geq r, \\ g(x, y) &= b_0(x) + b_1(x)y + \dots + y^n, & n &\geq s, \end{aligned}$$

dove  $x^{r-i} \mid a_i(x)$  per  $i = 0, \dots, r-1$  e  $x^{s-j} \mid b_j(x)$  per  $j = 0, \dots, s-1$ . Vogliamo mostrare che  $x^{rs} \mid R(x) := \text{Ris}_y(f, g)(x)$ . Per farlo, utilizziamo un trucco analogo a quello usato nella



**Fatto 1.4.2.** Le proprietà sopracitate determinano univocamente i numeri d'intersezione.

*Idea.* Induzione sul numero d'intersezione. Facciamo un esempio: siano  $f = y^3 + x^2$ ,  $g = y + x^3$  e  $P = (0, 0)$ . Allora

$$\begin{aligned} I(f \cap g, P) &= I(f \cap (g - xf), P) = I((y^3 + x^2) \cap (y - xy^3), P) = \\ &= I((y^3 + x^2) \cap y, P) + I((y^3 + x^2) \cap (1 - xy^2), P) = \\ &= I(x^2 \cap y, P) + 0 = 2I(x \cap y, P) = 2. \end{aligned}$$

Vediamo ora due definizioni costruttive, che coincideranno una volta verificati gli assiomi (vedi Fatto 1.4.2).

**Definizione 1.4.3** (tramite risultante). Date  $f, g$  equazioni di curve in  $\mathbb{A}^2$  e  $P = (a, b) \in \mathbb{A}^2$ , siano  $f = f_1 a_1$  e  $g = g_1 b_1$ , dove  $a_1$  e  $b_1$  contengono tutte le componenti di  $f$  e  $g$  che non contengono  $P$ . Allora definiamo  $I(f \cap g, P)$  come molteplicità di  $x = a$  come radice di  $\text{Ris}_y(f_1, g_1)$ , in un generico sistema di coordinate.

**Proposizione 1.4.4.** La definizione di  $I(f \cap g, P)$  tramite il risultante soddisfa gli assiomi.

*Dimostrazione.* Servirà la seguente proprietà del risultante, che richiamiamo:

$$\text{Ris}(f, gh) = \text{Ris}(f, g) \text{Ris}(f, h).$$

1. Funziona perché abbiamo tolto dal calcolo le componenti che non contengono  $P$ .
2. ...
3.  $|\text{Ris}(f, g)| = |\text{Ris}(g, f)|$ .
4. ...
5. ...
6. Segue dal richiamo.
7. Se  $\deg(g + af) = \deg g$ , tutto funziona per le proprietà del determinante. Altrimenti si ha  $\text{Ris}(f, g + af) = \text{Ris}(hf, g + af)$ , dove  $h$  è un polinomio che non si annulla in  $P$ : in particolare  $\text{Ris}(hf, g + af) = \text{Ris}(h, g + af) + \text{Ris}(f, g + af)$ . A questo punto sorgono problemi, quindi rinviamo la dimostrazione.  $\square$

**Definizione 1.4.5** (tramite localizzazione). Se  $P \in \mathbb{A}^2$ , il nucleo della mappa di valutazione sarà  $\mathfrak{m}_P = (x - a, y - b) \in \text{SpecMax } A := \mathbb{K}[x, y]$ . Sia dunque  $\mathcal{O}_P = A_{\mathfrak{m}_P}$  l'anello locale di  $P$  in  $\mathbb{A}^2$  (è il localizzato algebrico). Se  $f, g \in \mathbb{A}^2$ , possiamo dunque considerare  $\mathcal{O}_P/(f, g)^e$  come  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale<sup>1</sup> e definire  $I(f \cap g, P)$  come  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P/(f, g)^e)$ .

**Proposizione 1.4.6.** La definizione di  $I(f \cap g, P)$  tramite localizzazione soddisfa gli assiomi.

*Dimostrazione.*

---

<sup>1</sup> $(f, g)^e$  non è banale in quanto  $P \in V(f) \cap V(g)$ , e dunque  $f, g \in \mathfrak{m}_P$ .

1. Supponiamo che  $f, g$  abbiano una componente comune  $h \ni P$ . C'è un'ovvia mappa surgettiva  $\mathcal{O}_P/(f, g) \rightarrow \mathcal{O}_P/(h)$ , da cui  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P/(f, g)) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P/(h))$ , e sarà sufficiente quindi mostrare che  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P/(h)) = +\infty$ . Supponiamo per assurdo che  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P/(h)) < +\infty$ , sia wlog  $P = 0$ : in particolare  $x, x^2, \dots$  non sono linearmente indipendenti. Quindi troviamo

$$\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = x^a q(x) \in (h),$$

dove  $a > 0$ ,  $q(x) \in \mathbb{K}[x]$  e  $q(0) \neq 0$  (siamo tornati su  $\mathcal{O}_P$ ). Avremo in particolare<sup>2</sup>  $x^a = bh$  per qualche  $b \in \mathcal{O}_P$ . Dato che  $\mathcal{O}_P$  è ancora un UFD, deduciamo che  $h = x^\alpha u$  dove  $0 \leq \alpha \leq a$  e  $u \in \mathcal{O}_P^*$ . In modo del tutto analogo troviamo  $h = y^\beta v$  con  $v \in \mathcal{O}_P^*$ , da cui deduciamo  $\alpha = \beta = 0$  e quindi  $h \in \mathcal{O}_P^*$ , che è assurdo<sup>3</sup>.

Supponiamo ora  $(f, g) = 1$  in  $A$ , e quindi in  $\mathcal{O}_P$ <sup>4</sup>. Mostriamo che  $\exists 0 \neq s(x) \in \mathbb{K}[x] \cap (f, g)$  e  $\exists 0 \neq t(y) \in \mathbb{K}[y] \cap (f, g)$ : se così fosse, da  $\mathcal{O}_P/(s(x), t(y)) \rightarrow \mathcal{O}_P/(f, g)$  otterremmo  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P/(f, g)) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P/(s(x), t(y))) < +\infty$ . Se  $\deg_y f = 0$  possiamo porre  $s(x) = f$ ; analogamente se  $\deg_y g = 0$  possiamo porre  $s(x) = g$ . Supponiamo ora  $\deg_y f, \deg_y g \geq 1$ : guardandoli in  $\mathbb{K}(x)[y]$  e applicando il lemma di Gauss otteniamo  $(f, g) = 1$  in  $\mathbb{K}(x)[y]$ , da cui  $1 = \lambda f + \mu g$  per opportuni  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}(x)[y]$  (identità di Bezout). Moltiplicando per i denominatori, otteniamo  $0 \neq s(x) = \ell f + \hat{\mu} g \in \mathbb{K}[x]$ . Analogamente per  $0 \neq t(y) \in (f, g)$ .

2. ...
3. Ovvvia.
4. Possiamo considerare wlog  $r : x - a$  e  $s : x - b$ .
5. ...
6. Osservare che  $(f + ag, g) = (f, g)$ .
7. Basta mostrare che  $I(f \cap gh, P) = I(f \cap g, P) + I(f \cap h, P)$ , poi si può procedere per induzione. Consideriamo la successione esatta di  $\mathcal{O}_P$ -moduli

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P/(f, h) \xrightarrow{g} \mathcal{O}_P/(f, gh) \rightarrow \mathcal{O}_P/(f, g) \rightarrow 0.$$

Si dimostra che la dimensione è una funzione additiva, nel senso che data una qualsiasi successione di  $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0,$$

si ha  $\dim_{\mathbb{K}}(N) = \dim_{\mathbb{K}}(M) + \dim_{\mathbb{K}}(P)$ . □

*Osservazione 1.4.7.* Abbiamo dato due definizioni di molteplicità d'intersezione che soddisfano la definizione assiomatica, dunque per il Fatto 1.4.2 coincidono.

Ricordiamo che una *quadrica* è un'equazione omogenea di grado 2, e ha una forma quadratica  $Q(x) = x^t A x$  data da una matrice simmetrica  $A \in \mathbb{K}^{(n+1) \times (n+1)}$ . Tutto questo è univoco, a meno di scalari. In particolare, se  $[v] = P \in \mathbb{P}^n$ , varrà  $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(v) = \sum_j a_{i,j} v_j$  (ricordarsi che  $\nabla Q = Ax$ ). Il

<sup>2</sup>Qui suppongo si giustifichi nel seguente modo: possiamo prendere wlog  $h$  irriducibile (e quindi  $(h)$  primo), da cui  $x^a \in (h)$  oppure  $q(x) \in (h)$ ; la seconda possibilità si esclude in quanto  $h(0) = 0$  ma  $q(0) \neq 0$ . In realtà qui stiamo considerando gli ideali estesi nel localizzato, ma tutto funziona per la solita bigezione tra ideali primi di  $A_{\mathfrak{m}_P}$  e ideali primi di  $A$  contenuti in  $\mathfrak{m}_P$ .

<sup>3</sup>Sempre perché  $P \in V(h)$ .

<sup>4</sup>Non mi è chiaro il perché...

luogo singolare (cioè il luogo dei punti singolari) della quadrica è quindi  $\mathbb{P}(\ker A)$ , in particolare ha dimensione  $n - \text{Rk } A$ . Dunque  $Q$  è una curva liscia se e solo se  $A$  è nonsingolare.

Consideriamo un caso particolare<sup>5</sup>:  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ ,  $n = 2$ ,  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ . A meno di trasformazioni proiettive,  $Q$  è data da una delle seguenti equazioni:

1.  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ : in questo caso  $\text{Rk } A = 3$ , dunque siamo nel caso liscio (e irriducibile).

2.  $x_0^2 + x_1^2 = 0$ : in questo caso  $\text{Rk } A = 2$  e la quadrica è riducibile:

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 - \sqrt{-1}x_1)(x_0 + \sqrt{-1}x_1),$$

quindi è la somma di due rette distinte.

3.  $x_0^2 = 0$ : in questo caso  $\text{Rk } A = 1$  e si ha una retta doppia.

Ci chiediamo quando una conica  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$  sia riducibile. Passiamo alla chiusura proiettiva: la matrice associata alla quadrica sarà

$$A = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix},$$

e  $\det A = 0$  sarà condizione necessaria e sufficiente affinché  $q$  sia riducibile.

Sia  $F$  una curva in  $\mathbb{P}^2$  e  $f = D(F)$  la sua deomogeneizzata in  $\mathbb{A}^2$ . Un punto di *flesso*  $P$  di  $f$  è un punto liscio tale che, se  $\tau$  è la sua tangente principale a  $f$ , allora  $I(f \cap \tau, P) \geq 3$ . Sia dunque  $P = (0, 0) \in V(f)$  un punto liscio generico: tramite Taylor scriviamo

$$f(x, y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(P)x + \frac{\partial f}{\partial y}(P)y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(P)xy \right)}_{=: q(x, y)} + \dots$$

dove  $q(x, y)$  è una conica affine. Si verifica che  $P$  è un flesso se e solo se  $q(x, y)$  è unione di rette (quindi riducibile), cioè se  $\det M(q) = 0$ . Studiamo quindi il determinante tramite mosse di Gauss:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & \partial_x & \partial_y \\ \partial_x & \partial_{x^2} & \partial_{xy} \\ \partial_y & \partial_{xy} & \partial_{y^2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & (d-1)\partial_x & (d-1)\partial_y \\ (d-1)\partial_x & \partial_{x^2} & \partial_{xy} \\ (d-1)\partial_y & \partial_{xy} & \partial_{y^2} \end{vmatrix} \sim \\ & \sim \begin{vmatrix} (d-1)\partial_z & \partial_{xz} & \partial_{zy} \\ (d-1)\partial_x & \partial_{x^2} & \partial_{xy} \\ (d-1)\partial_y & \partial_{xy} & \partial_{y^2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} \partial_{z^2} & \partial_{xz} & \partial_{zy} \\ \partial_{xz} & \partial_{x^2} & \partial_{xy} \\ \partial_{zy} & \partial_{xy} & \partial_{y^2} \end{vmatrix} = H(F), \end{aligned}$$

dove  $d = \deg F$ , per  $\sim$  intendiamo l'uguaglianza a meno di coefficiente moltiplicativo non nullo e abbiamo usato pesantemente l'identità di Eulero.  $H(F)$  è proprio l'Hessiano di  $F$ . Osserviamo che l'unico caso in cui  $H(F) \equiv 0$  è quando  $q(x, y)$  è unione di rette. Possiamo contare i flessi di una curva tramite Bezout: sono  $3d(d-2)$ . Seguono (pochi) random facts che non sono riuscito a cogliere.

<sup>5</sup>In realtà l'ipotesi  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  l'abbiamo usata da molte parti, senza dirlo.

## 1.5 Lezione 5 (14 Ott 2015)

Sia  $F = 0$  l'equazione di una curva di  $\mathbb{P}^2$ ,  $d = \deg F$ ,  $H(F) = \det(\partial^2 F / \partial x_i \partial x_j)$  Hessiano, supponiamo  $\text{char } K \neq 2$ . Osserviamo che  $H(F)$  è un polinomio omogeneo di grado  $d-2$ , oppure è nullo.  $H(F)$  determina i flessi di  $F$ :  $P \in V(F)$  è un flesso se e solo se è liscio e  $H(F)(P) = 0$ . Dividiamo i casi per grado di  $F$ :

**Se  $d = 1$ :** Allora  $H(F) \equiv 0$  e ogni punto è un flesso (è una retta...).

**Se  $d = 2$ :** L'equazione della curva è una forma quadratica  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$ , da cui  $H(F) = 2 \det(A)$ . Dunque si separano altri due casi:

- Se  $F$  è irriducibile,  $\det(A) \neq 0$  e dunque non ci sono flessi.
- Se  $F = r + s$  somma di due rette, in particolare  $\det(A) = 0$  e tutti i punti lisci saranno flessi. Quindi, se  $r = s$  non ci sono flessi, altrimenti tutti i punti tranne quello d'intersezione saranno flessi.

**Se  $d \geq 3$ :** Se  $F$  è liscia e  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , allora  $F$  ha almeno un punto di flesso ( $\deg(H(F)) \geq 1$ ).

I casi  $d = 1$  e  $d = 2$  in un certo senso sono i meno interessanti: sono quelli in cui abbiamo un numero finito di curve (a meno di proiettività), cosa che non avviene per  $d \geq 3$ .

**Proposizione 1.5.1** (forma di Weierstrass). Sia  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$ , sia  $\mathcal{C} = [F]$  una cubica liscia, sia  $O \in \mathcal{C}$  un flesso. Allora esiste un sistema di coordinate omogenee  $[z, x, y]$  su  $\mathbb{P}^2$  tale che  $O = [0, 0, 1]$ ,  $\mathcal{C}$  ha esposizione affine della forma  $y^2 = x^3 + ax + b$  e il *discriminante*<sup>2</sup> dell'equazione  $\Delta := 4a^3 + 27b^2$  è diverso da 0.

*Dimostrazione.* Scelgo delle coordinate omogenee tali che  $O = [0, 0, 1]$  e  $z = 0$  sia la tangente a  $\mathcal{C}$  in  $O$  (questo si può sempre fare). Passando alla carta affine  $y \neq 0$  possiamo quindi scrivere

$$F(z, x, 1) = z + z(az + bx) + g_3(z, x),$$

dove  $g_3 \in \mathbb{K}[z, x]_3$  ha il monomio  $x^3$  con coefficiente non nullo<sup>3</sup>. Tornando alla chiusura proiettiva e cambiando carta otteniamo

$$\begin{aligned} F(z, x, y) &= zy^2 + zy(az + bx) + g_3(x, z); \\ F(1, x, y) &= y^2 + y(a + bx) + g_3(x, 1). \end{aligned}$$

A meno di effettuare il cambio di variabili  $y' = y + \frac{1}{2}(bx + a)$  e ricomporre i pezzi, possiamo scrivere

$$f(x, y) = y^2 + g_1(x), \quad g_1 \in \mathbb{K}[x], \quad \deg(g_1) = 3,$$

dove abbiamo rietichettato  $y'$  come  $y$ . Si verifica inoltre che il punto  $[0, 0, 1]$  e la retta  $z = 0$  restano invariati dal cambio di variabili. L'equazione della curva è dunque della forma

$$y^2 = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$$

Cambiamo ancora variabili:  $x' = x - \frac{\alpha_1}{3}$ ,  $y' = y$ , da cui arriviamo alla forma

$$y^2 = \beta_0 x^3 + \beta_2 x + \beta_3, \quad \beta_0 \neq 0.$$

Infine, per renderla monica, cambiamo  $y \mapsto \beta_0^{1/2} y$  e  $x \mapsto \beta_0 x$ . □

<sup>2</sup>Questo nome non è a caso: è quello che si usa per trovare le radici di polinomi di terzo grado. Tale risultante è in realtà  $\text{Ris}(p, p')$ , e infatti è diverso da zero se e solo se le radici di  $p$  sono distinte.

<sup>3</sup>Altrimenti la cubica sarebbe riducibile, quindi singolare.

**Corollario 1.5.2.** Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , allora ogni cubica liscia ammette sempre forma di Weierstrass (char  $\mathbb{K}$  opportuna).

**Proposizione 1.5.3** (forma di Legendre). Se  $p(x) = x^3 + ax + b$  è la forma di Weierstrass di una cubica  $\mathcal{C}$ , e tutte le radici di  $p$  sono in  $\mathbb{K}$ , allora  $\mathcal{C}$  ha esposizione affine della forma  $y^2 = cx(x-1)(x-\lambda)$  con  $\lambda \neq 0, 1$  e  $c \in \mathbb{K}^*$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  le radici di  $p$  (che sono distinte per la forma di Weierstrass). Applichiamo un cambiamento di variabili della forma  $x \mapsto ax + b$ , per opportuni  $a, b \in \mathbb{K}$  tali che  $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (0, 1)$ : di conseguenza  $\alpha_3 \mapsto \lambda \neq 0, 1$ . Dunque otteniamo  $y^2 = cx(x-1)(x-\lambda)$  per qualche  $x \in \mathbb{K}^*$ .  $\square$

Osserviamo che in generale non possiamo riscaldare facendo sparire  $c$ ; tuttavia, questo è lecito se  $\mathbb{K}$  contiene le radici quadrate (per esempio, nel caso  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ ).

**Corollario 1.5.4.** Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , allora ogni cubica liscia può essere messa in forma di Legendre.

Sia ora  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  e  $\mathcal{C}$  una cubica liscia. Vorremmo cercarne i flessi (che sono al più 9 per quanto visto la scorsa lezione).

Ci mettiamo in forma di Weierstrass rispetto ad un flessio  $O$ :  $y^2 = x^3 + ax + b =: p(x)$ . Cerco quindi i punti di  $\mathbb{A}^2$  in cui  $\mathcal{C}$  interseca  $H(\mathcal{C})$ : dalla scorsa lezione

$$H(\mathcal{C}) = 0 \iff 0 = \begin{vmatrix} 0 & \partial_x & \partial_y \\ \partial_x & \partial_{x^2} & \partial_{xy} \\ \partial_y & \partial_{xy} & \partial_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p' & 2y \\ -p' & -p'' & 0 \\ 2y & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(2y^2 p'' - p'^2).$$

Imponiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} y^2 = p \\ 2p^2 p'' - p'^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = p \\ K(x) = 3x^4 + 6ax^2 + 12bx + a^4 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che  $K'(x) = 12p$ , quindi  $K$  ha radici multiple se e solo se  $K$  ha una radice comune con  $p$ . Questo non può succedere: se  $\alpha$  fosse una radice comune, allora

$$0 = K(\alpha) = 2p(\alpha)^2 p''(\alpha) - p'(\alpha)^2 = -p'(\alpha)^2 \implies p'(\alpha) = 0,$$

da cui  $\alpha$  sarebbe una radice multipla di  $p$  (assurdo per quello che si era detto sul  $\Delta$ ). Dunque  $K$  ha quattro radici distinte  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , che non sono radici di  $p(x)$ . Otteniamo quindi otto flessi per  $\mathcal{C}$ :  $(a_i, \pm b_i)$  per  $i = 1, \dots, 4$ , dove  $b_i = \sqrt{p(a_i)}$ , ai quali si aggiunge il flessio originale  $O$  (che è all'infinito).

**Fatto 1.5.5.** Se  $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$  sono flessi, allora  $L(P_1, P_2)$  interseca  $\mathcal{C}$  in un terzo flessio.

*Hint.* Scegliere opportunamente il flessio  $O$ .

**Fatto 1.5.6.** Dati  $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$  flessi,  $\exists g$  proiettività di  $\mathbb{P}^2$  tale che manda  $\mathcal{C}$  in sé stessa e scambia  $P_1$  con  $P_2$ .

*Hint.* Scegliere  $O$  come  $L(P_1, P_2) \cap \mathcal{C} \setminus \{P_1, P_2\}$  e prendere  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ .

Quante rette ci sono (che coinvolgono i flessi)? Sono  $\frac{1}{3} \cdot \binom{9}{2} = 12$ . I 9 punti e le 12 rette formano una configurazione isomorfa al piano affine su  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ .

*Osservazione 1.5.7.* Cosa sappiamo dire sulle radici  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  di  $p(x)$ ? Si verifica facilmente (per  $i = 1, 2, 3$ ) che  $\tilde{r}_i : x = \alpha_i$  è una tangente ordinaria di  $y^2 - p(x)$  in  $(\alpha_i, 0)$ , e che la sua intersezione con la retta all'infinito è il flesso  $O$ ; denotiamo con  $r_i$  le loro chiusure proiettive: sono tangenti a  $\mathcal{C}$  e passano per  $O$ . Anche  $r_4 : z = 0$  è una tangente a  $\mathcal{C}$  passante per  $O$  (anzi, in questo caso  $O$  è proprio il punto di tangenza). Si verifica che non ci sono altre rette proiettive con questa proprietà.

**Esempio 1.5.8.** Sia  $F = x^3 + y^3 + z^3$ , si ha che  $H(F) = 6xyz$  e i flessi sono  $[1, -1, 0]$ ,  $[1, \omega, 0]$ ,  $[1, \bar{\omega}, 0]$  e relative permutazioni, dove  $\omega$  è una radice terza primitiva dell'unità.

### 1.5.1 Birapporto

**Definizione 1.5.9.** Dati quattro punti distinti  $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{P}$ , siano  $z_i = \frac{x_i}{x_0}$  per  $i = 1, \dots, 4$  le rispettive coordinate affini. Consideriamo il riferimento proiettivo dato da  $P_1, P_2, P_3$  ai cui sono rispettivamente associate le coordinate  $[1, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 1]$  (o equivalentemente  $0, \infty, 1$ ). Il *birapporto* di  $P_1, \dots, P_4$  è la coordinata affine di  $P_4$  rispetto al riferimento dato, e soddisfa la formula

$$\text{Bir}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Si verifica che il birapporto non dipende dalla scelta di coordinate.

**Teorema 1.5.10** (proprietà fondamentale del birapporto). Date due quaterne di punti distinti  $P_1, \dots, P_4$  e  $Q_1, \dots, Q_4$  in  $\mathbb{P}$ , allora  $\exists g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  proiettività che manda  $P_i \mapsto Q_i$  per  $i = 1, \dots, 4$  se e solo se  $\text{Bir}(P_1, \dots, P_4) = \text{Bir}(Q_1, \dots, Q_4)$ .

*Dimostrazione omessa.*

Cerchiamo di capire cosa succede se ci interessano in generale proiettività che mandano  $\{P_1, \dots, P_4\} \mapsto \{Q_1, \dots, Q_4\}$  (senza considerarne cioè l'ordine). Si osserva che i doppi scambi non cambiano il birapporto, in particolare ci aspettiamo sei valori diversi per il birapporto:

$$B(\beta) = \left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta}{\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\beta} \right\}.$$

Si verifica che questi sono effettivamente tutti e soli i valori possibili. Quand'è che questi valori sono meno di sei? Quando alcuni coincidono, da cui si ricavano le seguenti possibilità:

- $\beta = -1$ : si hanno quindi i valori  $\{-1, 2, \frac{1}{2}\}$ ;
- $\beta^2 - \beta + 1 = 0$ : si hanno quindi i valori  $\{\omega, \omega^2\}$  ( $\omega$  definito come sopra).

**Proposizione 1.5.11.** Dati  $P_1, \dots, P_4$  e  $Q_1, \dots, Q_4$  due quaterne di punti distinti in  $\mathbb{P}$ , se  $\beta = \text{Bir}(P_1, \dots, P_4)$  e  $\beta' = \text{Bir}(Q_1, \dots, Q_4)$ , allora  $\exists g$  proiettività che manda  $\{P_1, \dots, P_4\}$  in  $\{Q_1, \dots, Q_4\}$  se e solo se  $\beta' \in B(\beta)$ .

Introduciamo adesso la funzione *invariante*  $j$  (anche detta *modulo* della quaterna invariante di punti):

$$j : \mathbb{K} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{K} \quad \left| \quad j(t) = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t - 1)^2}.$$

**Proposizione 1.5.12.** Dati  $\beta, \beta' \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ , allora  $j(\beta) = j(\beta')$  se e solo se  $\beta' \in B(\beta)$ .

*Hint.* Mostrare che  $j(t)$  è invariante per le mappe definite da  $B(t)$ . Se  $j(\beta) = c$ , cerchiamo i  $t$  tali che  $j(t) = c$ : otteniamo l'equazione

$$(t^2 - t + 1)^3 - ct^2(t - 1)^2 = 0,$$

che ha necessariamente  $B(\beta)$  come radici. Se  $\#B(\beta) = 6$  abbiamo finito, altrimenti bisogna verificare che si hanno radici multiple (e comunque non ce ne sono altre).

## 1.6 Lezione 6 (16 Ott 2015)

**Definizione 1.6.1.** Dati  $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{P}^1$  punti distinti, definiamo il loro *modulo* come

$$j(P_1, \dots, P_4) := j(\text{Bir}(P_1, \dots, P_4)).$$

Osserviamo che questo è un invariante proiettivo (vedi Proposizione 1.5.12).

Fissato  $O \in \mathbb{P}^2$ , siano  $r_1, \dots, r_4$  quattro rette distinte passanti per  $O$ .

*Frase mistica:* Il fascio di rette per un punto del duale formano una retta.

Sia ora  $\ell$  una retta in  $\mathbb{P}^2$  che non passa per  $O$ : intersecherà  $r_1, \dots, r_4$  in quattro punti distinti  $P_1, \dots, P_4$ . Consideriamo il birapporto dei quattro punti, che ha senso identificando  $\ell$  con  $\mathbb{P}^1$ : si verifica che  $\text{Bir}(P_1, \dots, P_4)$  non dipende dalla scelta di  $\ell$ , quindi possiamo definire il birapporto e il modulo delle rette come

$$\begin{aligned} \text{Bir}(r_1, r_2, r_3, r_4) &:= \text{Bir}(P_1, P_2, P_3, P_4); \\ j(r_1, r_2, r_3, r_4) &:= j(P_1, P_2, P_3, P_4). \end{aligned}$$

Osserviamo che anche il modulo di rette è un invariante proiettivo: se la proiettività manda rispettivamente

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ell, P_1, P_2, P_3, P_4 \longrightarrow r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, \ell', P'_1, P'_2, P'_3, P'_4,$$

è chiaro che avremo ancora  $r'_i \cap \ell' = \{P'_i\}$  per  $i = 1, \dots, 4$ .

Riprendiamo ora lo studio dei flessi di una cubica fatto nella lezione precedente. Abbiamo visto nell'Osservazione 1.5.7 che esistono esattamente quattro rette distinte  $r_1, \dots, r_4$  tangenti a  $\mathcal{C}$  e passanti per  $O$ . Possiamo verificare che  $j(r_1, \dots, r_4)$  non dipende dalla scelta di  $O$  tra i flessi di  $\mathcal{C}$ : dato un altro flesso  $O'$  e le relative tangenti  $r'_1, \dots, r'_4$ , possiamo considerare una proiettività che scambia  $O$  con  $O'$  lasciando invariata la cubica (vedi Fatto 1.5.6); si conclude quindi osservando che il modulo è un invariante proiettivo.

**Definizione 1.6.2.** Possiamo dunque definire il *modulo della cubica invariante* come  $j(\mathcal{C}) = j(r_1, r_2, r_3, r_4)$ , di cui abbiamo appena mostrato la buona definizione.

Mettiamo ora la cubica in forma di Legendre  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ : si verifica analogamente a quanto fatto nella lezione precedente che le tangenti a  $\mathcal{C}$  passanti per  $O$  sono  $x = 0, x = 1, x = \lambda$ . Aggiungendo la tangente  $z = 0$  e intersecando le quattro rette proiettive per  $y = 0$ , otteniamo i quattro punti a coordinate affini  $0, 1, \lambda, \infty$ . A meno di riordinare i punti (possiamo farlo perché ci interessa il modulo), possiamo concludere che  $j(\mathcal{C}) = j(\lambda)$ .

**Teorema 1.6.3.** Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  e  $\text{char } K \neq 2, 3$ , se  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  sono cubiche lisce, allora  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  sono proiettivamente equivalenti se e solo se  $j(\mathcal{C}_1) = j(\mathcal{C}_2)$ . Inoltre per ogni invariante  $\lambda$  esiste una cubica tale che  $j(\mathcal{C}) = \lambda$  (basta trovare  $t$  tale che  $j(t) = \lambda$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha = j(\mathcal{C}_1)$ , sia  $\lambda \in \mathbb{K}$  tale che  $j(\lambda) = \alpha$ . Sia  $\mathcal{C}^*$  la cubica di equazione  $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ . Sia  $O \in \mathcal{C}_1$  un flesso, e siano  $r_1, \dots, r_4$  le quattro tangenti a  $\mathcal{C}_1$  passanti per  $O$ . Supponiamo wlog che  $r_2$  sia tangente di flesso e che  $\text{Bir}(r_1, \dots, r_4) = \lambda$  (basta prendere le rette ordinate in modo che il birapporto sia quello, poi portare la tangente di flesso in  $r_2$  tramite doppi scambi). Consideriamo la proiettività che manda le quattro rette in  $0, 1, \infty, \lambda$  (nel senso dato nel discorso precedente): questa è una proiettività da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}^*$  (pensare al birapporto). Concludiamo osservando che questo vale anche per  $\mathcal{C}_2$ .  $\square$

Segue grossa supercazzola sui generi, con argomenti di topologia avanzata. Se ci sarà tempo, cercherò di capirla meglio e di scriverla più avanti.

**Definizione 1.6.4.** Data una conica  $\mathcal{C}$  liscia piana (nessuna ipotesi sul campo), per ogni coppia di punti  $A, B \in \mathcal{C}$ , osserviamo che la retta  $L(A, B)$  interseca  $\mathcal{C}$  in un terzo punto  $C$ , e definiamo  $\mathcal{R}(A, B) = C$ . Vanno fatte considerazioni su ripetizioni e molteplicità (eventualmente considerando rette tangenti).

**Definizione 1.6.5.** Fissato un punto  $O \in \mathcal{C}$ , definiamo l'operazione di somma formale tra i punti della curva come

$$A \oplus B = \mathcal{R}(O, \mathcal{R}(A, B)).$$

Si verifica che quest'operazione dà a  $\mathcal{C}$  una struttura di gruppo abeliano tale che

- L'elemento neutro è  $O$ ;
- L'inverso di  $A$  è dato da  $\mathcal{R}(A, \mathcal{R}(O, O))$ .

L'unica verifica complicata è quella dell'associatività, che verrà fatta in seguito.

Questa costruzione si riesce a fare soltanto per curve di questo grado.

*Osservazione 1.6.6.* Osserviamo che, se scegliamo come  $O$  un punto di flesso, allora  $\mathcal{R}(O, O) = O$ . Questo semplifica i conti, quindi ci metteremo sempre in questo caso, quando non diversamente specificato.

Si osserva che  $A \oplus B \oplus C = 0$  se e solo se  $A, B, C$  sono allineati. In particolare  $2A = O$  se e solo se  $A \oplus A \oplus O = O$  se e solo se  $O \in \tau_A \mathcal{C}$ . Quindi gli elementi che soddisfano  $2A = O$  sono  $0, 1, \lambda, \infty$  (ottenuti dalle solite quattro rette tangenti). Questi elementi formano un sottogruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Cercando i punti tali che  $3A = O$ , ci accorgiamo che sono tutti e soli i nove flessi di  $\mathcal{C}$ , e che formano un sottogruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ . Vale il risultato generale che ci aspettiamo per  $mA = O$ , ma non abbiamo i mezzi per dimostrarlo.

### 1.6.1 Sistemi lineari di curve

Per  $d \geq 1$  consideriamo  $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d \cup \{0\}$ . Questo è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  di dimensione  $\binom{d+2}{2}$  (conti).

**Definizione 1.6.7.** Definiamo  $V_d := \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d)$  i cui punti sono le curve proiettive piane di grado  $d$ , che chiamiamo *sistema lineare completo* di curve di grado  $d$ . I sottospazi proiettivi  $W \leq V_d$  si dicono in generale *sistemi lineari* di curve di grado  $d$ . Se  $\dim W = 1$ , si parlerà di fascio.

Osserviamo che  $\dim(V_d) = \binom{d+2}{2} - 1$ . In generale, date  $F, G$  equazioni di grado  $d$  lineari indipendenti, il fascio generato è

$$\{tF + sG \mid [t, s] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Dato un punto  $P \in \mathbb{P}^2$ , definiamo  $V_d(P) = \{[F] \in V_d \mid F(P) = 0\}$ : questa condizione è equivalente ad un'equazione lineare, quindi  $V_d(P)$  è un sistema lineare con codimensione 1. Più in generale, dati alcuni punti  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^2$ , definiamo

$$V_d(P_1, \dots, P_k) := \bigcup_{i=1}^k V_d(P_i).$$

Questo è un sistema lineare la cui dimensione dipende dalla disposizione dei punti, ma la cui codimensione è sicuramente al più  $k$  (introduciamo  $k$  condizioni lineari).

**Esercizio 1.6.8.** Fissato un punto  $P \in \mathbb{P}^2$ , mostrare che le curve in  $V_d$  per le quali  $P$  è un punto singolare formano un sistema lineare.

**Definizione 1.6.9.** Diciamo che  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^2$  impongono *condizioni indipendenti* alle curve di grado  $d$  se  $\text{codim}(V_d(P_1, \dots, P_k)) = k$ .

**Proposizione 1.6.10.** Siano  $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2$  punti distinti. Allora quei punti impongono condizioni indipendenti se e solo se non ne esistono 4 allineati.

*Dimostrazione.* Osserviamo che le condizioni sono indipendenti se e solo se c'è un'unica conica ( $\dim(V_d) = 5$ ).

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo per assurdo che (wlog)  $P_1, \dots, P_4 \in r$  con  $r$  retta. Se  $s$  è una retta qualsiasi passante per  $P_5$ ,  $C = s + r$  è una conica che passa per tutti i punti. Dato che  $s$  non è scelta in modo univoco, la conica non è unica.

( $\Leftarrow$ ) Rivedi l'Esercizio 1.3.5. □

## 1.7 Lezione 7 (21 Ott 2015)

**Proposizione 1.7.1.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo infinito, siano  $P_1, \dots, P_8$  otto punti distinti in  $\mathbb{P}^2$  tali che

- non esista una retta che ne contenga quattro;
- non esista una conica che ne contenga sette.

Allora  $P_1, \dots, P_8$  impongono condizioni indipendenti alle cubiche.

*Dimostrazione.* Osserviamo che la tesi è equivalente a  $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) = 1$ . È immediato che valga il segno di maggiore o uguale (la codimensione è al più 8). Supponiamo per assurdo  $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) \geq 2$ , e separiamo tre casi:

- Supponiamo che tre punti (wlog  $P_1, P_2, P_3$ ) siano allineati, sia  $\ell$  tale retta. Per i punti  $P_4, \dots, P_8$  passa una e una sola conica  $\mathcal{Q}$  (vedi Proposizione 1.6.10). Sia  $A$  un qualsiasi punto in  $\ell \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$  e  $B$  un punto che non appartiene al supporto di  $\ell + \mathcal{Q}$ . Dato che  $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) \geq 2$ , aggiungendo due condizioni la dimensione resta  $\geq 0$ , da cui possiamo prendere una cubica  $\mathcal{C}$  tale che  $P_1, \dots, P_8, A, B \in \mathcal{C}$ . Dato che  $P_1, P_2, P_3, A \in \ell$ , necessariamente  $\ell \subseteq \mathcal{C}$  (per Bézout), dunque  $\mathcal{C} = \ell + \mathcal{D}$  per qualche conica  $\mathcal{D}$ . D'altra parte  $P_4, \dots, P_8 \notin \ell$  (per ipotesi), dunque appartengono a  $\mathcal{D}$ , che deve coincidere con  $\mathcal{Q}$  (si era detto che è unica). Questo implicherebbe che  $B \notin \ell + \mathcal{Q} = \mathcal{C}$ , che è assurdo per costruzione.

- Supponiamo che non ci siano tre punti allineati, ma ci siano sei punti su una conica (wlog  $P_1, \dots, P_6 \in \mathcal{Q}$ , ma  $P_7, P_8 \notin \mathcal{Q}$ ). Sia  $\ell = L(P_7, P_8)$  e siano  $A \in \mathcal{Q} \setminus \{P_1, \dots, P_6\}$ ,  $B \notin \mathcal{Q} + \ell$ . Sia come prima  $\mathcal{C}$  una cubica passante per  $P_1, \dots, P_8, A, B$ : dato che  $P_1, \dots, P_6, A \in \mathcal{Q}$ , per Bézout  $\mathcal{C} = \mathcal{Q} + r$  con  $r$  retta opportuna; tuttavia  $P_7, P_8 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Q} = r$ , da cui  $r = \ell$ , e si arriva all'assurdo come nel primo caso.
- Supponiamo infine che non ci siano tre punti allineati né sei punti sulla stessa conica. Sia  $\ell = L(P_1, P_2)$  (in particolare  $P_3, \dots, P_8 \notin \ell$ ), e siano  $A, B \in \ell \setminus \{P_1, P_2\}$  qualsiasi. Sia ancora  $\mathcal{C}$  una cubica passante per  $P_1, \dots, P_8, A, B$ : dato che  $P_1, P_2, A, B \in \mathcal{C} \cap \ell$ , per Bézout  $\mathcal{C} = \ell + \mathcal{Q}$  dove  $\mathcal{Q}$  è un'opportuna conica. Ma  $P_3, \dots, P_8 \in \mathcal{C} \setminus \ell = \mathcal{Q}$ , che è assurdo.  $\square$

**Corollario 1.7.2.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo infinito, siano  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  due cubiche senza componenti comuni. Supponiamo che  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P_1, \dots, P_9\}$  dove i  $P_i$  sono punti distinti, sia  $\mathcal{C}$  una cubica passante per  $P_1, \dots, P_8$ : allora anche  $P_9 \in \mathcal{C}$  (equivalentemente,  $P_1, \dots, P_9$  non impongono condizioni indipendenti alle coniche).

*Dimostrazione.* Osserviamo che siamo nelle ipotesi della proposizione precedente: se  $P_1, \dots, P_4$  fossero allineati, per Bézout la loro retta sarebbe una componente comune di  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ ; analogamente se  $P_1, \dots, P_7$  appartenessero ad una conica. Dunque  $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) = 1$ , da cui  $V_3(P_1, \dots, P_8) = \{s\mathcal{C}_1 + t\mathcal{C}_2 \mid [s, t] \in \mathbb{P}^1\}$ . In particolare,  $\forall \mathcal{C} \in V_3(P_1, \dots, P_8)$  vale  $P_9 \in \mathcal{C}$ .  $\square$

**Esercizio 1.7.3.** Dimostrare che fissare un punto singolare per una conica su  $\mathbb{P}^2$  impone tre condizioni indipendenti.

Affrontiamo ora l'argomento dell'associatività dell'operazione  $\oplus$ , rimasta in sospenso dalla scorsa lezione. Sia  $\mathcal{C}$  una cubica liscia,  $O \in \mathcal{C}$  scelto come elemento neutro,  $A, B, C \in \mathcal{C}$ . Definiamo le seguenti:

$$\begin{array}{l|l} L_1 = L(A, B), & R = \mathcal{R}(A, B) \\ L_2 = L(R, O), & \bar{R} = \mathcal{R}(R, O) \\ L_3 = L(\bar{R}, C), & S = \mathcal{R}(\bar{R}, C) \\ L_4 = L(S, O), & \bar{S} = \mathcal{R}(S, O) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} M_1 = L(B, C), \quad P = \mathcal{R}(B, C) \\ M_2 = L(P, O), \quad \bar{P} = \mathcal{R}(P, O) \\ M_3 = L(\bar{P}, A), \quad Q = \mathcal{R}(\bar{P}, A) \\ M_4 = L(Q, O), \quad \bar{Q} = \mathcal{R}(Q, O) \end{array} \right.$$

Osseviamo che

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \oplus C &= \mathcal{R}(O, \mathcal{R}(A \oplus B, C)) = \mathcal{R}(O, \mathcal{R}(\mathcal{R}(O, \mathcal{R}(A, B)), C)) = \\ &= \mathcal{R}(O, \mathcal{R}(\mathcal{R}(O, R), C)) = \mathcal{R}(O, \mathcal{R}(\bar{R}, C)) = \mathcal{R}(O, S) = \bar{S}, \end{aligned}$$

e analogamente  $A \oplus (B \oplus C) = \bar{Q}$ . La tesi diventa quindi  $\bar{S} = \bar{Q}$ , o più semplicemente  $S = Q$ .

Aggiungeremo implicitamente alcune ipotesi, richiedendo che alcuni punti e alcune rette non coincidano. I casi rimasti potranno essere sistemati con argomenti di continuità. Siano  $\mathcal{C}_1 = L_1 + M_2 + L_3$  e  $\mathcal{C}_2 = M_1 + L_2 + M_3$  cubiche senza componenti comuni (chiediamo che le rette non coincidano). Osserviamo che

$$A, B, C, O, R, \bar{R}, P, \bar{P}, S \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_1, \quad A, B, C, O, R, \bar{R}, P, \bar{P}, Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_2.$$

Applicando il Corollario 1.7.2 (chiediamo che una delle novuple sia composta da punti distinti), deduciamo  $S = Q$ .

### 1.7.1 Topologia di Zariski

**Definizione 1.7.4.** Dato  $\mathbb{K}$  campo,  $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , per ogni insieme di polinomi  $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq R$  consideriamo l'insieme algebrico  $V(f_i : i \in I) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid \forall i \ f_i(P) = 0\}$ . Prendendo gli insiemi algebrici come insiemi chiusi, otteniamo una topologia  $\mathcal{Z}$  su  $\mathbb{A}^n$ , nota come *topologia di Zariski*.

Verificare che la topologia di Zariski è effettivamente una topologia è piuttosto semplice. L'unico passaggio non immediato è che  $X, Y \in \mathcal{Z} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{Z}$ , ma basta osservare che

$$X \cup Y = V(f_i g_j : i \in I, j \in J).$$

*Osservazione 1.7.5.* La topologia di Zariski è T1. Infatti questo è equivalente a chiedere che i punti siano chiusi, ma dato  $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$  si ha  $V(x_i - a_i : i = 1, \dots, n) = \{P\}$ .

*Osservazione 1.7.6.* Se  $\#\mathbb{K} < \infty$ , allora la topologia di Zariski è discreta ( $\mathbb{K}^n$  ha punti finiti). Se  $\#\mathbb{K} = \infty$ , allora si può verificare che  $\mathcal{Z}$  non è T2:

- In  $\mathbb{A}^1$  due aperti hanno sempre intersezione non vuota (i polinomi in una variabile hanno finiti zeri);
- Dato  $\mathbb{A}^n$ , immergiamo  $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$  e osserviamo che la topologia indotta è ancora quella di Zariski. Poiché sottospazi topologici di T2 dovrebbero essere ancora T2, e  $\mathbb{A}^1$  non lo è, possiamo concludere che neanche  $\mathbb{A}^n$  lo sarà.

In particolare, se  $I \subseteq R$  è un ideale, possiamo considerare  $V(I)$  insiemisticamente. Dato  $\{f_i : i \in I\}$ , poniamo  $J = (f_i : i \in I) \supseteq \{f_i : i \in I\}$  da cui  $V(J) \subseteq V(f_i : i \in I)$  (passare all'insieme algebrico inverte i contenimenti). In realtà si verifica che vale l'uguaglianza (gli  $f \in J$  si ottengono come combinazioni lineari finite degli  $f_i$ ).

**Definizione 1.7.7.** Al variare di  $f \in R$ , denoteremo con  $U_f = \mathbb{A}^n \setminus V(f)$  gli *aperti standard* (o *aperti principali*).

**Esercizio 1.7.8.** Verificare che gli aperti principali formano una base per  $\mathcal{Z}$ .

**Proposizione 1.7.9.** La topologia di Zariski è quasi-compatta<sup>4</sup>

*Dimostrazione.* Passando ai complementari la tesi diventa:

$$\forall S \subseteq R \text{ tale che } \bigcap_{f \in S} V(f) = \emptyset \quad \exists f_1, \dots, f_N \in S : \bigcap_{i=1}^N V(f_i) = \emptyset.$$

Osserviamo che  $R$  è noetheriano (teorema della base di Hilbert), per cui l'ideale generato da  $S$  è  $I = (g_1, \dots, g_M)$ . In realtà, dato che i  $g_j$  sono combinazioni lineari finite degli  $f \in S$ , troviamo finiti  $f_i \in S$  tali che  $I = (f_1, \dots, f_N)$ . Possiamo concludere osservando che

$$\bigcap_{f \in S} V(f) = V(S) = V(I) = V(f_1, \dots, f_N) = \bigcap_{i=1}^N V(f_i). \quad \square$$

*Osservazione 1.7.10.* Come conseguenza immediata della noetherianità di  $R$ , ogni chiuso di Zariski è dato in realtà da un numero finito di equazioni.

<sup>4</sup>Cioè compatta ma non T2. Alcuni autori parlano di compattezza soltanto per spazi T2; noi no, ma preferiamo evitare possibili ambiguità.

**Definizione 1.7.11.** Uno spazio topologico si dice *noetheriano* se le catene discendenti di chiusi sono stazionarie (cioè vale la DCC (*descending chain condition*) sui chiusi, o equivalentemente vale la ACC (*ascending chain condition*) sugli aperti).

Non tutti gli spazi topologici sono noetheriani, per esempio si verifica facilmente che la topologia euclidea su  $\mathbb{R}$  non lo è.

**Definizione 1.7.12.** Per ogni  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  definiamo il suo ideale associato come

$$I(X) = \{f \in R \mid \forall P \in X \ f(P) = 0\}.$$

Si verifica facilmente che anche  $I$  inverte l'ordine di inclusione insiemistica, inoltre vale  $V(I(X)) \supseteq X$ . Ci chiediamo quando vale l'uguaglianza: ci si convince facilmente che non ci possono essere chiusi compresi strettamente tra  $X$  e  $V(I(X))$ , dunque  $V(I(X)) = \overline{X}^Z$ . Ne deduciamo che vale l'uguaglianza se e solo se  $X$  è un chiuso di Zariski.

Possiamo quindi verificare la seguente proposizione:

**Proposizione 1.7.13.** La topologia di Zariski è noetheriana.

*Dimostrazione.* Mostriamo che vale la DCC. Se  $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$  è una catena discendente di chiusi, allora  $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \dots$  è una catena ascendente di ideali. Dato che  $R$  è noetheriano, vale la ACC sugli ideali, quindi quest'ultima catena è stazionaria. In particolare anche  $V(I(Y_1)) \supseteq V(I(Y_2)) \supseteq \dots$  è stazionaria, ma questa coincide con la catena iniziale perché gli  $Y_i$  sono chiusi di Zariski.  $\square$

**Definizione 1.7.14.** Dato  $X$  spazio topologico noetheriano e  $Y \subseteq X$  chiuso non vuoto, diciamo che  $Y$  è *riducibile* se  $\exists Z, W$  chiusi, contenuti propriamente in  $Y$ , tali che  $Y = Z \cup W$  (in particolare  $Z, W$  non possono essere vuoti).

È abbastanza immediato mostrare che i supporti delle curve riducibili sono chiusi di Zariski riducibili. Per dimostrare il viceversa, si utilizza il Nullstellensatz.

**Definizione 1.7.15.** Dato  $X$  spazio topologico noetheriano e  $Y \subseteq X$  chiuso non vuoto, una sua *decomposizione irriducibile* è una scrittura della forma  $Y = Z_1 \cup \dots \cup Z_k$ , dove gli  $Z_i$  sono chiusi irriducibili. La decomposizione si dirà *minimale* se  $\forall i \neq j \ Z_i \not\subseteq Z_j$ .

*Osservazione 1.7.16.* Da una decomposizione irriducibile possiamo sempre ridurci ad una decomposizione minimale, scartando i chiusi superflui (sono finiti, quindi si può procedere induttivamente).

**Teorema 1.7.17.** Sia  $X$  uno spazio topologico noetheriano,  $Y \subseteq X$  un suo chiuso. Allora  $Y$  ammette sempre una decomposizione irriducibile; inoltre la sua decomposizione minimale è unica (a meno dell'ordine).

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma = \{Y \subseteq X \text{ chiuso} \mid Y \text{ non ammette decomposizione irriducibile}\}$ , dotato dell'ordinamento parziale dato dall'inclusione discendente (cioè  $Y_1 \leq Y_2$  se  $Y_1 \supseteq Y_2$ ). Per il lemma di Zorn (fatte eventuali verifiche), troviamo  $Y_0 \in \Sigma$  elemento minimale. Dato che  $Y_0$  non ammette decomposizione, in particolare non è irriducibile, quindi  $Y_0 = Z \cup W$  con  $Z, W \subsetneq Y_0$ <sup>5</sup>. Tuttavia  $Z$  e  $W$  ammettono decomposizione per minimalità di  $Y_0$ , e combinandole ne otteniamo una per  $Y_0$ , che è assurdo.

Supponiamo ora che  $Y$  ammetta due decomposizioni minimali  $Z_1 \cup \dots \cup Z_r$  e  $W_1 \cup \dots \cup W_s$ : in particolare  $Z_1 = Z_1 \cap Y = \bigcup (Z_1 \cap W_j)$ . Per irriducibilità si ha  $Z_1 \subseteq W_{j_1}$  per qualche  $j_1$ , e simmetricamente  $W_{j_1} \subseteq Z_{i_1}$  per qualche  $i_1$ ; per minimalità deduciamo  $i_1 = 1$ , da cui  $Z_1 = W_{j_1}$ . Ripetendo il ragionamento per tutti gli indici, possiamo concludere.  $\square$

<sup>5</sup>A meno che non valga  $Y_0 = \emptyset$ , ma così avremmo concluso.

## 1.8 Lezione 8 (23 Ott 2015)

**Esempio 1.8.1.** Quali sono i chiusi di Zariski in  $\mathbb{A}^2$ ? Sono le unioni finite di ipersuperfici e punti. Per vederlo basta osservare che tutti i chiusi sono della forma  $V(f_1, \dots, f_n) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_n)$ , e applicare induttivamente Bézout.

I chiusi di  $\mathbb{A}^3$  (e dimensioni maggiori) sono molto più complicati da descrivere.

**Esempio 1.8.2** (cubica gobba). Sia  $\mathcal{C}_3 = V(y - x^2, z - xy)$  chiuso di  $\mathbb{A}^3$ : si verifica che non è un'ipersuperficie<sup>6</sup>. Cos'è  $\mathcal{C}_3$ ? È il grafico della funzione  $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2 \mid t \mapsto (t^2, t^3)$ .

**Proposizione 1.8.3.** Sia  $X$  un chiuso di  $\mathbb{A}^n$ . Allora  $X$  è irriducibile se e solo se  $I(X) \subseteq R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  è un ideale primo.

*Dimostrazione.* Mostriamo il contrario, cioè che  $X$  è riducibile se e solo se  $I(X)$  non è primo.

( $\Rightarrow$ ) Se  $X = Y \cup Z$  con  $Y, Z \subsetneq X$  chiusi, allora  $\exists f \in I(Y) \setminus I(X)$  e  $g \in I(Z) \setminus I(X)$  (perché le inclusioni si invertono). Osserviamo che  $fg \in I(X)$  (perché  $I(X) = I(Y) \cap I(Z)$ ), dunque  $I(X)$  non può essere primo).

( $\Leftarrow$ ) Se  $I(X) \not\subseteq \text{Spec } R$ , allora  $\exists f, g \in R \setminus I(X)$  tali che  $fg \in I(X)$ . In particolare  $X \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$ , da cui  $X = (V(f) \cap X) \cup (V(g) \cap X)$ . Per concludere basta mostrare che  $V(f), V(g) \not\subseteq X$ , e questo si deduce facilmente.  $\square$

*Osservazione 1.8.4.* Per il principio d'identità dei polinomi,  $I(\mathbb{A}^n) = (0)$ . In particolare  $\mathbb{A}^n$  è irriducibile ( $R$  è un dominio).

**Esercizio 1.8.5.** Sia  $X$  un chiuso di  $\mathbb{A}^n$ ,  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$  una sua decomposizione irriducibile minimale: allora  $I(X) = I(X_1) \cap \dots \cap I(X_n)$ ,  $I(X)$  è radicale e gli  $I(X_i)$  sono primi distinti minimali (nel senso che  $I(X_i) \not\subseteq \bigcap_{j \neq i} I(X_j)$ ).

*Osservazione 1.8.6.* Sia  $X$  un chiuso irriducibile di  $\mathbb{A}^n$ . Allora  $\forall U, V \subseteq X$  aperti non vuoti  $U \cap V \neq \emptyset$  (si mostra passando ai complementari). In particolare, ogni aperto non vuoto contenuto in  $X$  è denso in  $X$ .

*Osservazione 1.8.7.* Se  $X$  è uno spazio topologico noetheriano e  $Y \subset X$  è un sottospazio topologico, allora anche  $Y$  è noetheriano.

Questo ci consente di dare la seguente definizione:

**Definizione 1.8.8.** Se  $X$  è uno spazio topologico noetheriano e  $Y$  è un sottoinsieme qualunque, diremo che  $Y$  è *irriducibile* se lo è nella topologia di sottospazio (indotta da  $X$  su  $Y$ ).

**Proposizione 1.8.9.** Un insieme  $Y \subseteq X$  è irriducibile se e solo se  $\overline{Y}$  è irriducibile in  $X$ .

*Dimostrazione.*

**$Y$  riducibile:** allora  $\exists Z_1, Z_2$  chiusi in  $X$  tali che  $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ , tali che  $Y \not\subseteq Z_1, Z_2$ . Osserviamo che  $\overline{Y} = \overline{Y \cap Z_1} \cup \overline{Y \cap Z_2}$  e che  $\exists y_1 \in Y \setminus Z_1$ , che è aperto in  $Y$ . Ragionando su  $X$ , ci accorgiamo che  $y_1 \notin \overline{Y \cap Z_1}$ . Vale lo stesso per  $\overline{Y \cap Z_2}$ , quindi abbiamo una decomposizione irriducibile per  $\overline{Y}$ .

**$Y$  irriducibile:** sia  $\overline{Y} = Z_1 \cup Z_2$  con  $Z_1, Z_2$  chiusi di  $X$ . In particolare  $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$  è unione di chiusi di  $Y$ , quindi wlog  $Y \subseteq Z_1$  e infine  $\overline{Y} \subseteq Z_1 \subseteq \overline{Y}$ .

$\square$

<sup>6</sup>Il polinomio ridotto dovrebbe dividere  $y - x^2$  e  $z - xy$ .

### 1.8.1 Topologia di Zariski sul proiettivo

Vogliamo definire la topologia di Zariski anche sugli spazi proiettivi.

**Definizione 1.8.10.** La *topologia di Zariski* su  $\mathbb{P}^n$  è la topologia quoziente<sup>7</sup> definita da  $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ , rispetto alla topologia indotta su  $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$  da quella di Zariski su  $\mathbb{A}^{n+1}$ .

In generale si preferisce descriverla a partire dai chiusi:  $Y \subseteq \mathbb{P}^n$  sarà un chiuso se e solo se  $\pi^{-1}(Y)$  è chiuso in  $\mathbb{A}^{n+1}$  e saturo (cioè  $\forall x \in \pi^{-1}(Y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \lambda x \in \pi^{-1}(Y)$ ).

*Osservazione 1.8.11.* Sia  $Y$  un chiuso di  $\mathbb{P}^n$ : allora si potrà scrivere  $\pi^{-1}(Y) = Z \cap (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})$ , dove  $Z = V(f_1, \dots, f_n)$  è un chiuso di  $\mathbb{A}^{n+1}$ . Cosa implica su  $Z$  la saturità di  $\pi^{-1}(Y)$ ? Se  $x \in Z$ , allora  $\forall i$  si ha  $f_i(x) = 0$ , ma quindi  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \quad f_i(\lambda x) = 0$ . Passando alla chiusura, anche  $0 \in Z$ .

Diamo dunque la seguente definizione:

**Definizione 1.8.12.** Dato un chiuso proiettivo  $Y$ , definiamo il suo *cono algebrico* come  $\mathcal{C}Y = \pi^{-1}(Y) \cup \{0\}$ .

Valgono le seguenti proprietà:

1. Si osserva facilmente che  $\mathcal{C}Y$  è un chiuso affine.
2.  $\mathcal{C}Y$  è un cono, nel senso che  $\forall x \in \mathcal{C}Y \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x \in \mathcal{C}Y$ .
3. Se  $Y = \emptyset$ , chiaramente  $\mathcal{C}Y = \{0\}$ .
4. Dato un cono algebrico  $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ ,  $\pi(\mathcal{Z} \setminus \{0\})$  è un chiuso proiettivo. In particolare, questo dà luogo ad una bigezione.

**Definizione 1.8.13.** Se  $Y \in \mathbb{P}^n$  è un chiuso, definiamo il suo ideale  $I(Y)$  come  $I(\mathcal{C}Y)$  (affine).

**Definizione 1.8.14.** Dato un ideale  $I$  di  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ , definiamo  $I_d = I \cap \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ . In generale vale  $\bigoplus_{d \geq 0} I_d \subseteq I$ , e diremo che  $I$  è un *ideale omogeneo* se vale l'uguaglianza.

*Osservazione 1.8.15.* Ogni polinomio  $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  si scrive in modo unico come somma di componenti omogenee  $f = \sum_{i=a}^b f_i$  (dove  $f_a, f_b \neq 0$ ). In particolare, un ideale  $I$  è omogeneo se e solo se  $\forall f = \sum_{i=a}^b f_i \in I$  si ha  $f_i \in I$  per  $i = a, \dots, b$ .

**Esercizio 1.8.16.**  $I$  è omogeneo se e solo se è generato da polinomi omogenei.

**Proposizione 1.8.17.** Un chiuso affine  $X$  è un cono algebrico se e solo se  $I(X)$  è omogeneo.

*Dimostrazione.*

( $\Leftarrow$ ) Se  $f \in I(X)$  è un polinomio omogeneo, allora  $f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Sia  $f \in I(X)$ , sia  $f = \sum_{i=a}^b f_i$  la sua scrittura in componenti omogenee e sia  $v \in X$ . Allora

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad 0 = f(\lambda v) = \sum_{i=a}^b f_i(\lambda v) = \sum_{i=a}^b \lambda^i f_i(v),$$

da cui  $\forall i$  si ha  $f_i(v) = 0$  e quindi  $f_i(x) \in I(X)$ , per arbitrarietà di  $\lambda$ . □

<sup>7</sup>Cioè la topologia meno fine tra quelle che rendono continua la proiezione.

**Lemma 1.8.18.** Sia  $I$  un ideale omogeneo di  $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ . Allora  $I \in \text{Spec } R$  se e solo se  $\forall f, g \in I$  omogenei vale  $f \in I$  oppure  $g \in I$ .<sup>8</sup>

*Dimostrazione.* La freccia ( $\Rightarrow$ ) è ovvia. Supponiamo dunque  $I \notin \text{Spec } R$  e passiamo al quoziente  $\bar{R} = R/I$ : vogliamo esibire due polinomi omogenei non nulli in  $R$ , tali che il loro prodotto sia nullo. Sicuramente  $\exists f, g \neq 0$  (non necessariamente omogenei) tali che  $fg = 0$ . Scriviamo  $f = f_a + R_1$  e  $g = g_b + R_2$ , dove  $f_a$  e  $g_b$  sono le componenti omogenee non nulle di grado minimo di  $f$  e  $g$  (rispettivamente di grado  $a$  e  $b$ ). Da  $fg = 0$  si ha necessariamente  $f_a g_b = 0$ , ma  $f_a, g_b \neq 0$ .  $\square$

**Corollario 1.8.19.** Sia  $Y$  un chiuso proiettivo non vuoto. Allora  $Y$  è irriducibile se e solo se  $\mathcal{C}Y$  è irriducibile (affine).

*Dimostrazione.*

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo  $Y$  riducibile: allora  $Y = Y_1 \cup Y_2$  dove  $Y_1, Y_2$  sono chiusi contenuti propriamente in  $Y$ . In particolare  $\mathcal{C}Y = \mathcal{C}Y_1 \cup \mathcal{C}Y_2$  (funzione inversa commuta con l'unione) è una decomposizione non banale (non si può avere per sempio  $\mathcal{C}Y_1 = \mathcal{C}Y$  a causa della bigezione).

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo  $\mathcal{C}Y$  riducibile: allora  $I(\mathcal{C}Y) = I(Y)$  non è primo, quindi troviamo  $f, g \notin I(Y)$  omogenei tali che  $fg \in I(Y)$ . Osserviamo che  $fg \in I(Y) = I(\mathcal{C}Y)$  implica  $V(f) \cup V(g) \supseteq \mathcal{C}Y$  ( $\mathcal{C}Y$  è chiuso), da cui  $\mathcal{C}Y = (\mathcal{C}Y \cap V(f)) \cup (\mathcal{C}Y \cap V(g))$ . Si conclude notando che  $f \notin I(\mathcal{C}Y) \Rightarrow \mathcal{C}Y \not\subseteq V(f)$  (e analogo per  $g$ ).  $\square$

Ricordiamo che, se  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ , denotiamo

$$V(F) = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Osserviamo che le carte affini  $U_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$  offrono un ricoprimento aperto di  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposizione 1.8.20.** Sia  $j : \mathbb{A}^n \rightarrow U_0 \mid (x_1, \dots, x_n) \mapsto [1, x_1, \dots, x_n]$ :  $j$  è un omeomorfismo.

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto nelle prime lezioni che è bigettiva.

Per la continuità è sufficiente testare sulle ipersuperfici  $V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$  ( $j^{-1}$  commuta con l'intersezione), e si verifica immediatamente che  $j^{-1}(V(F)) = V(f)$  dove  $f = D(F)$ .

Concludiamo mostrando che  $j$  è chiusa: basta testare sulle ipersuperfici  $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$  ( $j$  è bigettiva, quindi commuta con l'intersezione), e si verifica facilmente che  $j(V(f)) = V(F) \cap U_0$ , dove  $F = H(f)$ .  $\square$

**Definizione 1.8.21.** Se  $X$  è un chiuso di  $\mathbb{A}^n$ , definiamo la sua *chiusura proiettiva* in  $\mathbb{P}^n$  come la chiusura topologica di  $j(X)$  in  $\mathbb{P}^n$ .

**Esempio 1.8.22.** In generale non è vero che  $\overline{V(f_i : i \in I)} = V(H(f_i) : i \in I)$ , vediamolo con un esempio. Sia  $\mathcal{C}_3 = \{y - x^2 = z - xy = 0\}$  la cubica gobba, vista a inizio lezione. Supponiamo per assurdo che valga effettivamente  $\overline{\mathcal{C}_3} = V(wy - x^2, zw - xy) \subseteq \mathbb{P}^3$ . Osserviamo che in tal caso  $\overline{\mathcal{C}_3} \cap \{w = 0\} = \{w = x = 0\}$  (una retta). Tuttavia si verifica facilmente che  $zx - y^2 \in I(\mathcal{C}_3)$ , da cui  $\overline{\mathcal{C}_3} \subseteq V(zx - y^2)$ . In particolare si dovrà avere  $\overline{\mathcal{C}_3} = V(wy - x^2, zw - xy, zx - y^2) = \{w = x = y = 0\}$ , ma questo è solo un punto!

Nell'esempio precedente possiamo comunque osservare che  $\overline{\mathcal{C}_3} \subseteq \{wy - x^2 = wx - xy = zx - y^2 = 0\}$ . Infatti, se  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  è un chiuso, è chiaro che  $f \in I(X) \Rightarrow \overline{X} \subseteq V(f)$ . Più in generale, mostreremo che  $I(\overline{X}) = (H(f) : f \in I(X))$ .

<sup>8</sup>In altri termini, è sufficiente fare il test di primalità sugli omogenei.

## 1.9 Lezione 9 (28 Ott 2015)

In generale abbiamo due applicazioni  $I, V$  tra i chiusi di Zariski di  $\mathbb{A}^n$  e gli ideali di  $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Osserviamo che in realtà  $\text{Im } I \subseteq \{I : \sqrt{I} = I\}$ , quindi possiamo limitarci a considerare la restrizione di  $V$  a questo insieme.

*Osservazione 1.9.1.* Mostriamo che per avere una bigezione è necessaria la chiusura algebrica, nel caso  $n = 1$ . Infatti in questo caso  $R$  è un PID, e in generale un  $J$  ideale radicale è della forma

$$J = (f) = \left( \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)g(x) \right),$$

dove  $g(x)$  non ha radici in  $\mathbb{K}$ . Allora  $V(J) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , e quindi  $I(V(J)) = (x - \lambda_1, \dots, x - \lambda_k)$ . Dato che, per  $\mathbb{K} \neq \overline{\mathbb{K}}$ , troviamo sempre un  $g(x)$  di grado almeno 2 irriducibile, non possiamo avere una corrispondenza biunivoca.

*Osservazione 1.9.2.* Se  $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ , allora  $I(P) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ . Infatti vale per  $P = 0$  (i polinomi che risolvono sono quelli senza termine noto), e gli altri si possono ottenere per traslazione.

**Teorema 1.9.3** (Nullstellensatz di Hilbert). Sia  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ . Allora valgono le seguenti condizioni equivalenti<sup>9</sup>:

1. Per ogni ideale  $J \subseteq R$ , se  $V(J) = \emptyset$  allora  $1 \in V(J)$  (in particolare  $J = R$ );
2. Se  $J \in \text{SpecMax } R$ , allora  $\exists P \in \mathbb{A}^n$  tale che  $J = I(P)$ ;
3. Per ogni ideale  $J$  vale  $I(V(J)) = \sqrt{J}$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo prima l'equivalenza delle tre proposizioni, in seguito mostreremo che vale la 2.

(3  $\Rightarrow$  2) Se  $J \in \text{SpecMax } R$ , allora  $I(V(J)) = J$ , da cui  $\exists P \in V(J)$  (altrimenti  $V(J) = \emptyset$  che porta a  $I(V(J)) = R$ ). Quindi  $J \subseteq I(P)$  e vale l'uguaglianza per massimalità.

(2  $\Rightarrow$  1) Supponiamo  $V(J) = \emptyset$ . Se per assurdo  $1 \notin J$ , allora  $\exists \mathfrak{m} \in \text{SpecMax}$  tale che  $J \subseteq \mathfrak{m} = I(P)$  per qualche  $P \in \mathbb{A}^n$ , che è assurdo perché implica  $P \in V(\mathfrak{m}) \subseteq V(J)$ .

(1  $\Rightarrow$  3) In generale  $I(V(J)) \supseteq \sqrt{J}$ , quindi basta mostrare che  $\forall g \in I(V(J))$  vale  $g \in \sqrt{J}$ . Sia  $\tilde{J} = (J, yg - 1)$  ideale di  $R[y]$ . Osserviamo che  $V(\tilde{J}) = \emptyset$ :  $(\mathbf{x}, y) \in V(\tilde{J})$  dovrebbe soddisfare  $g(\mathbf{x}) = 0$ , ma a questo punto  $yg(\mathbf{x}) - 1 = -1 \neq 0$ . Dunque  $1 \in \tilde{J}$  e si potrà scrivere

$$1 = \sum_{i=1}^m a_i(x, y)f_i(x) + b(x, y)(yg(x) - 1), \quad f_i \in J.$$

Sostituisco  $y = \frac{1}{g}$  (questo equivale a quozientare per  $(1 - gy)$ ) e moltiplico tutto per un'opportuna potenza di  $g$  (per far sparire i denominatori) ottenendo

$$g^N = \sum_{i=1}^m \tilde{a}_i(x)f_i(x) \in J,$$

cioè  $g \in \sqrt{J}$ .

---

<sup>9</sup>Nel senso della dimostrazione, non è che possono non valere con queste ipotesi.

(2) Supponiamo  $J \in \text{SpecMax}$ : basta mostrare che  $\exists P \in V(J)$  (da cui  $J \subseteq I(P)$  e si conclude per massimalità). Consideriamo  $F = R/J$ : è un campo, ma anche una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata ( $R$  lo è). Per il Nullstellensatz algebrico<sup>10</sup>  $F$  è un'estensione algebrica di  $\mathbb{K}$ , che è algebricamente chiuso, quindi  $F = \mathbb{K}$ . Sia  $\pi : R \rightarrow F = \mathbb{K}$  la proiezione a quoziente, siano  $a_i = \pi(x_i)$ ,  $P = (a_1, \dots, a_n)$ : chiaramente  $I(P) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \mapsto 0$ , quindi  $P \in V(J)$ .  $\square$

*Osservazione 1.9.4.* Abbiamo mostrato che nel caso  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  si ha un bigezione

$$\{I \text{ radicali}\} \longleftrightarrow \{X \text{ chiusi}\}.$$

In realtà nella lezione precedente avevamo già visto che le stesse mappe danno la bigezione

$$\{I \text{ primi}\} \longleftrightarrow \{X \text{ irriducibili}\}.$$

Per il Nullstellensatz di Hilbert, vale anche la bigezione

$$\{I \text{ massimali}\} \longleftrightarrow \{X \text{ punti}\}.$$

### 1.9.1 Nullstellensatz proiettivo

Sia d'ora in poi  $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ . Abbiamo già visto nella lezione precedente una bigezione tra i chiusi di  $\mathbb{P}^n$  e i coni algebrici di  $\mathbb{A}^{n+1}$ . Abbiamo associato a ciascun chiuso  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  un ideale  $I(X)$ , che si è verificato essere omogeneo, tramite la mappa analoga affine, applicata a  $CX$ . Osserviamo che in particolare  $I(X)$  è radicale e, dato che  $\emptyset$  non è un cono algebrico,  $I(X) \subseteq (x_0, \dots, x_n)$ . Possiamo dunque considerare il seguente diagramma:

*spazio dove inserirò il diagramma*

Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , abbiamo visto che la mappa  $I_{\mathbb{A}}$  diventa biunivoca, quindi anche  $\varphi$  (una freccia è ovvia, per l'altra passiamo dall'ideale alla varietà affine, che corrisponde al cono algebrico).

**Teorema 1.9.5** (Nullstellensatz proiettivo). Sia  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , sia  $J \subseteq R$  un ideale proprio<sup>11</sup>. Valgono i due enunciati equivalenti:

1. Se  $V_{\mathbb{P}}(J) = \emptyset$ , allora  $J \supseteq (x_0, \dots, x_n)$ , detto *ideale irrilevante*;
2.  $I(V(J)) = \sqrt{J}$ .

*Hint.* Applicare il Nullstellensatz affine, facendo attenzione al passaggio da varietà affine a proiettiva (e viceversa).

**Esempio 1.9.6.** Nel caso proiettivo, cade la corrispondenza tra ideali massimali e punti. Si consideri ad esempio  $P = [1, 3, -2, 1] \in \mathbb{P}^3$ : il suo ideale sarà quello associato alla retta in  $\mathbb{A}^4$  passante per l'origine e per  $(1, 3, -2, 1) \in \mathbb{A}^4$ . La retta si può ricavare imponendo che la seguente matrice non abbia rango massimale:

$$\text{Rk} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 3 & x_1 \\ -2 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad I(P) = (x_1 - 3x_0, x_2 - 2x_0, x_3 - x_0).$$

Quest'ideale però non è massimale. Tuttavia vale ancora una corrispondenza tra irriducibili e ideali primi (si è visto che vale quella tra chiusi proiettivi irriducibili e coni algebrici, quindi basta applicare quella solita).

<sup>10</sup>Se  $\mathbb{K} \subseteq F$  sono campi e  $F$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata, allora  $F$  è un'estensione finita di  $\mathbb{K}$ .

<sup>11</sup>A lezione non è stato detto, ma il secondo punto non sembra funzionare altrimenti...

## 1.9.2 Ipersuperfici

Supponiamo d'ora in poi  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ .

*Osservazione 1.9.7.* Sia  $X = V(f)$  un'ipersuperficie, sia  $f = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$  la decomposizione in irriducibili (a meno di un fattore moltiplicativo invertibile). Osserviamo che  $I(X) = \sqrt{(f)} = (p_1 \cdots p_k)$ , da cui  $X = V(p_1) \cup \dots \cup V(p_k)$ . Dato che i  $p_i$  sono irriducibili,  $(p_i)$  sono primi e  $V(p_i)$  sono irriducibili. Questa decomposizione è anche minimale: infatti se  $\exists i \neq j$  tali che  $V(p_i) \subseteq V(p_j)$ , in particolare  $(p_i) \supseteq (p_j)$ , da cui  $p_i = p_j$  (a meno di coefficiente moltiplicativo).

Analogamente, se  $F$  è omogeneo e  $F_1, \dots, F_k$  sono i suoi fattori irriducibili distinti (che sono omogenei, vedi Lezione 1),  $X = V_{\mathbb{P}}(F) = \bigcup V_{\mathbb{P}}(F_i)$  è la sua decomposizione minimale in irriducibili.

*Osservazione 1.9.8.* Sia  $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ , supponiamo  $f$  non abbia fattori multipli (in realtà non ci interessa davvero, ma semplifica). Abbiamo visto (ma non dimostrato) che  $I(\overline{X}) = (H(g) : g \in (f))$ , ma per molteplicità dell'omogeneizzazione  $(H(g) : g \in (f)) = (F)$  dove  $F = H(f)$ . In particolare, la chiusura proiettiva dell'ipersuperficie  $X$  (vista come nelle prime lezioni) coincide con la chiusura proiettiva definita tramite la topologia di Zariski.

## 1.9.3 Varietà quasi-proiettive

**Definizione 1.9.9.** Diciamo che  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  è una *varietà quasi-proiettiva* se è localmente chiusa in  $\mathbb{P}^n$  (cioè  $X = Z \cap U$  dove  $Z$  è un chiuso e  $U$  un aperto).

*Osservazione 1.9.10.* Tutti i chiusi e gli aperti di  $\mathbb{P}^n$  sono varietà quasi-proiettive. In particolare, dato che  $\mathbb{A}^n \cong U_0$  che è aperto,  $\mathbb{A}^n$  è una varietà quasi-proiettiva.

**Definizione 1.9.11.** Sia  $X$  una varietà quasi-proiettiva. Una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  si dice *regolare* se  $\forall P \in X$  esistono  $U \ni P$  aperto e  $A, B \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$  tali che

$$f = \frac{A}{B} \text{ su } U, \quad B \neq 0 \text{ su } U.$$

Si verifica facilmente la buona definizione.

**Esercizio 1.9.12.** Le funzioni regolari formano una  $\mathbb{K}$ -algebra.

Tale  $\mathbb{K}$ -algebra sarà indicata con  $\mathcal{O}_X(X)$ .

**Definizione 1.9.13.** Se  $X, Y$  sono varietà quasi-proiettive, diremo che  $f : X \rightarrow Y$  è un *morfismo* se soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $f$  è una funzione continua;
2.  $\forall V \subseteq Y$  aperto  $\forall \varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$  regolare  $\varphi \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{K}$  è ancora regolare.

Si verifica (lasciato per esercizio) che l'identità è un morfismo, e che la composizione di morfismi è ancora un morfismo. A questo punto possiamo dire che  $f : X \rightarrow Y$  è un *isomorfismo* di varietà quasi-proiettive se  $\exists Y \rightarrow X$  morfismo tale che  $g \circ f = \text{Id}_X$  e  $f \circ g = \text{Id}_Y$ .

*Osservazione 1.9.14.* Per chi conosce il linguaggio delle categorie, non abbiamo fatto altro che definire la categoria delle varietà quasi-proiettive e verificare le proprietà richieste dai morfismi.

## 1.10 Lezione 10 (30 Ott 2015)

Sia per ora  $X$  un chiuso di  $\mathbb{A}^n$ ,  $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Definizione 1.10.1.** Se  $X$  è un chiuso di  $\mathbb{A}^n$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , diciamo che  $f$  è *regolare* se  $\forall P \in X$  esiste  $U \ni P$  aperto in  $X$  e due polinomi  $a, b \in R$  tali che

$$b \neq 0, \quad f = \frac{a}{b} \quad \text{su } U.$$

Chiameremo per ora (ma è una definizione che rivedremo) *funzioni polinomiali* quelle che ammettono  $U = X$  con  $b \equiv 1$ .

**Definizione 1.10.2.** Sia  $r_k : R \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$  la mappa che restringe  $f \mapsto f|_X$ : si verifica facilmente che è ben definita ed è un omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre. Definiamo dunque l'*anello delle coordinate* di  $X$ , oppure *algebra affine* come  $\mathbb{K}[X] := R/I(X)$ , dove  $I(X) = \ker r_k = \{f \in R \mid f \equiv 0 \text{ su } X\}$ . Osserviamo che  $\mathbb{K}[X]$  si immerge (iniettivamente) in  $\mathcal{O}_X(X)$ , tramite  $r_k$ .

Consideriamo le funzioni  $V_X$  e  $I_X$  tra  $\{I \text{ ideale radicale di } \mathbb{K}[X]\}$  e  $\{Y \subseteq X \text{ chiuso}\}$  date da  $V_X(J) = \{x \in X \mid \forall f \in J \ f(x) = 0\}$  e  $I_X(Y) = \{f \in \mathbb{K}[X] \mid f|_Y = 0\}$ : si verifica che è tutto ben definito.

**Teorema 1.10.3** (Nullstellensatz relativo). Supponiamo  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ : allora  $V_X$  e  $I_X$  sono bigettive e una l'inversa dell'altra.

*Dimostrazione.* Sia  $\pi : R \rightarrow \mathbb{K}[X]$  la proiezione a quoziente: questa induce una corrispondenza biunivoca tra ideali di  $R$  e di  $\mathbb{K}[X]$ , che preserva radicalità, primalità e massimalità. L'osservazione principale è che  $V_X(J) = V_{\mathbb{A}^n}(\pi^{-1}(J))$  per ogni  $J$  ideale radicale di  $\mathbb{K}[X]$ . A questo punto, seguendo le seguenti bigezioni:

$$\begin{aligned} \{Y \subseteq X \text{ chiuso}\} &\longleftrightarrow \{V_{\mathbb{A}^n}(J) \mid J \supseteq I(X) \text{ ideale radicale di } R\} \\ \{V_{\mathbb{A}^n}(J) \mid J \supseteq I(X) \text{ ideale radicale di } R\} &\longleftrightarrow \{J \supseteq I(X) \mid J \text{ ideale radicale di } R\} \\ \{J \supseteq I(X) \text{ ideale radicale di } R\} &\longleftrightarrow \{\tilde{J}\} \text{ ideale radicale di } \mathbb{K}[X], \end{aligned}$$

si può giungere ad una conclusione. □

**Proposizione 1.10.4.** Supponiamo  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ : allora l'immersione  $r : \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$  è un isomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre.

*Dimostrazione.* Ci basta mostrare la surgettività. Data  $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$ , definiamo

$$J = (\mathbb{K}[X] : \varphi)_{\mathbb{K}[X]} = \{f \in \mathbb{K}[X] \mid f\varphi \in \mathbb{K}[X]\} :$$

questo è un ideale di  $\mathbb{K}[X]$ , e il nostro scopo è mostrare che  $1 \in J$  (in questo modo  $\varphi \in \mathbb{K}[X]$  e abbiamo concluso). Mostriamo quindi che  $V_X(J) = \emptyset$  (è equivalente per il Nullstellensatz).

Sia  $P \in X$ , sia  $X = (X_1 \cup \dots \cup X_k) \cup (X_{k+1} \cup \dots \cup X_s)$  una decomposizione irriducibile (minimale) di  $X$ , ordinata in modo tale che  $P \in X_1, \dots, X_k$  ma  $P \notin X_{k+1}, \dots, X_s$ . Per definizione di funzione regolare,  $\exists U \ni P$  aperto di  $X$  e  $a, b \in R$  tali che  $b \neq 0$  su  $U$  e  $\varphi|_U = \frac{a}{b}$ ; in particolare si possono prendere  $a, b \in \mathbb{K}[X]$  (è tutto ben definito). In particolare vale  $b\varphi - a = 0$  su  $U$ .

Per un risultato che vedremo in seguito, l'insieme  $\{Q \in X \mid (b\varphi - a)(Q) = 0\}$  è un chiuso. Osserviamo ora che  $\forall i \leq k$  vale  $P \in U \cap X_i \neq \emptyset$ , da cui (vedi Osservazione 1.8.6)  $U$  è denso in  $X_i$  e necessariamente  $b\varphi - a = 0$  su  $X_1 \cup \dots \cup X_k$ .

Sia ora  $c \in \mathbb{K}[X]$  tale che  $c \in I(X_{k+1}, \dots, X_s)$  ma  $c(P) \neq 0$ <sup>12</sup>: varrà  $c(b\varphi - a) = 0$  su tutto  $X$ , in particolare  $cb\varphi = ac \in \mathbb{K}[X]$ , da cui  $cb \in J$ . Tuttavia  $cb(P) \neq 0$ , dunque  $P \notin V_X(J)$ . □

<sup>12</sup>Per esempio osservare che  $X_{k+1} \cup \dots \cup X_s \subsetneq X_{k+1} \cup \dots \cup X_s \cup \{P\}$  e passare agli ideali.

Sia ora  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  una varietà quasi proiettiva: vogliamo descrivere i morfismi  $f : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ .

**Lemma 1.10.5.** Se  $f : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ , allora è un morfismo se e solo se è una funzione regolare.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ )  $\text{Id}_{\mathbb{K}}$  è regolare, da cui  $f = \text{Id}_{\mathbb{K}} \circ f$  è ancora regolare.

( $\Leftarrow$ ) Mostriamo che  $f$  è continua: per farlo basta mostrare che  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$   $f^{-1}(\lambda)$  è chiuso (i chiusi di Zariski su  $\mathbb{A}^1$  sono unioni finite di punti). Ricordiamo (fatto topologico) che, dato  $\{U_i\}_{i \in I}$  ricoprimento aperto di  $X$ , un insieme  $C \subseteq X$  è chiuso se e solo se per ogni  $i \in I$  lo è anche  $C \cap U_i$  nella topologia indotta in  $U_i$ . Scegliamo gli  $U_i$  al variare di tutti i  $P_i \in X$ , tali che  $P_i \in U_i$  ed esistano  $A_i, B_i \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$  tali che  $B_i \neq 0$  su  $U_i$  e  $f|_{U_i} = \frac{A_i}{B_i}$ . Osserviamo che se  $Q \in U_i$  si ha  $Q \in f^{-1}(\lambda) \iff Q \in V(\lambda B_i - A_i)$ , da cui  $f^{-1}(\lambda) \cap U_i = V(\lambda B_i - A_i) \cap U_i$ , e possiamo concludere che  $f$  è continua.

La dimostrazione dell'altra proprietà è lasciata per esercizio (in realtà lascia uno statement più generale, ma non sono chiare le ipotesi).  $\square$

**Proposizione 1.10.6.** Se  $f = (f_1, \dots, f_m) : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ , allora  $f$  è un morfismo se e solo se  $\forall i$   $f_i$  è regolare.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) La proiezione nella  $i$ -esima componente  $\pi_i : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{K}$  è banalmente una funzione regolare, quindi  $f_i = \pi_i \circ f$  è regolare.

( $\Leftarrow$ ) Mostriamo che  $f$  è continua: per farlo basta mostrare che  $\forall g \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$  si ha  $f^{-1}(V(g))$  chiuso (i chiusi di Zariski di  $\mathbb{A}^m$  sono intersezione finita di ipersuperfici). Osserviamo che  $x \in f^{-1}(V(g))$  se e solo se  $g \circ f(x) = 0$ .  $f_1, \dots, f_m$  sono regolari per ipotesi,  $g$  è polinomiale, in particolare  $g \circ f$  sarà regolare, e  $f^{-1}(V(g)) = V(g \circ f)$  sarà chiuso in quanto luogo di zeri di una funzione regolare.

Per la condizione sulla composizione, si fanno ragionamenti analoghi a quelli fatti nel caso  $m = 1$  (per esercizio).  $\square$

**Esempio 1.10.7.** Nel caso  $X = \mathbb{A}^n$ , si ha che i morfismi  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  sono le  $m$ -uple di polinomi in  $n$  variabili (vedi anche Proposizione 1.10.4).

**Definizione 1.10.8.** Una varietà quasi proiettiva  $X$  si dice *affine* se è isomorfa ad un chiuso di uno spazio affine.

**Esempio 1.10.9.** Sia  $U = \{x \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^1$  una varietà quasi-proiettiva<sup>13</sup>. Consideriamo  $f : U \rightarrow \mathbb{A}^2$  tale che  $f(x) = (x, \frac{1}{x})$ :  $\text{Im } f$  è l'iperbole equilatera  $Y = V(xy - 1)$ , inoltre si verifica facilmente che  $f$  è bigettiva di inversa  $\pi : Y \rightarrow U \mid \pi(x, y) = x$ . Questi sono banalmente due morfismi, quindi  $U$  è una varietà affine.

Sia  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  un chiuso. Denotiamo con  $X_f$  al variare di  $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  gli aperti principali (vedi Lezione 7). Si verifica che gli  $X_f$  sono in particolare varietà quasi-proiettive. Ricordiamo che questa forma una base della topologia di Zariski indotta su  $X$ .

**Proposizione 1.10.10.** Gli aperti principali sono varietà quasi-proiettive affini.

*Dimostrazione.* Siano  $I = I(X) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $J = I + (yf - 1)$  ideale di  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$  e  $Y = V(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ . Vogliamo mostrare che  $X_f \cong Y$ . Consideriamo le mappe

$$\begin{aligned} \varphi : X_f &\rightarrow Y \mid \varphi(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{x}, \frac{1}{f(\mathbf{x})} \right), \\ \psi : Y &\rightarrow X_f \mid \psi(\mathbf{x}, y) = (\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Si verifica che sono ben definite, l'una l'inversa dell'altra e dei morfismi.  $\square$

<sup>13</sup>Funziona perché  $U = \mathbb{P}^1 \setminus \{[1, 0], [1, 0]\}$ .

**Corollario 1.10.11.** Ogni  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  varietà quasi-proiettiva ha una base di aperti affini.

*Dimostrazione.* Separiamo tre casi:

- Se  $X$  è affine, basta applicare la proposizione precedente (wlog  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  a meno di isomorfismo, gli isomorfismi sono in particolare omeomorfismi);
- Se  $X$  è localmente chiuso in  $\mathbb{A}^n$ , allora  $X$  è aperto in  $\overline{X}^{\mathbb{A}^n}$  (verifica). Dato che gli aperti di  $X$  sono esattamente le restrizioni degli aperti di  $\overline{X}$  in  $X$ , il fatto che  $X$  sia aperto consente di fornire la base cercata a partire da quella di  $\overline{X}$  (che è affine).
- In generale, scriviamo  $X = \bigcup_{i=0}^n X \cap U_i$ : per ogni  $i$ ,  $X_i = X \cap U_i$  è localmente chiuso in  $U_i \cong \mathbb{A}^n$ , quindi possiamo trovare una base di aperti affini per ciascuno e combinarle.  $\square$

**Definizione 1.10.12.** Se  $f : X \rightarrow Y$  è un morfismo di variabili quasi-proiettive, definiamo il pullback  $f^* : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$  tale che  $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ . Si verifica che il pullback è ben definito ed è un omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre. Inoltre si comporta bene rispetto all'identità e alla composizione.

**Definizione 1.10.13.** Una  $\mathbb{K}$ -algebra  $R$  si dice *ridotta* se non ha elementi nilpotenti.

*Osservazione 1.10.14.* Osserviamo che, se  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  è un chiuso affine, in particolare  $\mathbb{K}[X]$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra ridotta<sup>14</sup> finitamente generata.

In particolare  $X \mapsto \mathbb{K}[X]$  sarà un funtore controvariante da varietà affini a  $\mathbb{K}$ -algebre finitamente generate ridotte<sup>15</sup>.

*Osservazione 1.10.15.* Si verifica che se  $f : X \rightarrow Y$  è un isomorfismo di varietà quasi-proiettive, allora  $f^* : \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$  è un isomorfismo (di  $\mathbb{K}$ -algebre).

**Proposizione 1.10.16.** Sia  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  un chiuso, sia  $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ , sia  $\mathbb{K}[X_f] := \mathbb{K}[Y]$ , dove  $Y$  è definito a partire da  $X$  come nella dimostrazione della Proposizione 1.10.10. Allora  $\mathbb{K}[X_f] = \mathbb{K}[X]_f = \{ \frac{a}{f^m} \mid a \in \mathbb{K}[X], m \in \mathbb{N} \}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\psi = \pi|_Y : Y \rightarrow X$  che manda  $(x_1, \dots, x_n, y) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  (la sua immagine è  $X_f$ ). Sia  $\psi^* : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[Y]$  il suo pullback: si osserva che  $\psi^*(f)y = 1$ , quindi si può applicare la proprietà universale della localizzazione ed estendere  $\psi^*$  a  $\overline{\psi} : \mathbb{K}[X]_f \rightarrow \mathbb{K}[Y]$ . Questo è il nostro candidato isomorfismo (che sia un omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre ci crediamo).

Mostriamo che è surgettivo: basta mostrare che  $\text{Im } \overline{\psi}$  contiene  $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{K}[Y]$ . Chiaramente  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}[x] \subseteq \mathbb{K}[x]_f$ , inoltre  $y = \frac{1}{f}$  e quindi si trova nell'immagine.

Mostriamo che è iniettivo: supponiamo  $\frac{a}{f^m} \in \ker \overline{\psi}$ , con  $a \in \mathbb{K}[X]$ : in particolare  $a \in \ker \overline{\psi}$  e quindi  $a \in \ker \psi$ . Questo significa che  $\forall \mathbf{x} \in X, y = f(\mathbf{x})$  si ha  $0 = a(\psi(\mathbf{x}, y)) = a(\mathbf{x})$ , da cui  $a = 0$ .  $\square$

## 1.11 Lezione 11 (04 Nov 2015)

**Proposizione 1.11.1.** Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , le funzioni regolari su  $\mathbb{P}^1$  sono le costanti.

*Dimostrazione.* Scriviamo  $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ , consideriamo le mappe solite (isomorfismi?)

$$U_0 \rightarrow \mathbb{A}^1 \quad \left| \quad t = \frac{x_1}{x_0}, \quad U_1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \quad \left| \quad t = \frac{x_0}{x_1}.$$

<sup>14</sup>Qui si tratta di notare che  $I(X)$  è un ideale radicale, quindi il quoziente non contiene nilpotenti.

<sup>15</sup>Sospetto che serva l'ipotesi  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$  qui, a volte ce la scordiamo...

Osserviamo che su  $U_0 \cap U_1$  vale  $t = \frac{1}{s}$ . Supponiamo che  $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$ : potremo scrivere  $f|_{U_0} = p(t)$  e  $f|_{U_1} = q(s)$  con  $p \in \mathbb{K}[t]$  e  $q \in \mathbb{K}[s]$  (ricordiamo che le uniche funzioni regolari su  $\mathbb{A}^1$  sono i polinomi). In particolare, su  $U_0 \cap U_1$  vale  $f = p(t) = q(\frac{1}{t})$ . Possiamo scrivere

$$q(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m, \quad a_i \in \mathbb{K}, \quad a_0 \neq 0, \quad m = \deg q.$$

Manipolando la formula otteniamo  $t^m p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$  su  $U_0 \cap U_1$ . Dato che  $U_0 \cap U_1$  è un aperto non vuoto di  $U_0$ , è denso e quindi l'uguaglianza vale su tutto  $U_0 \cong \mathbb{A}^1$ . Possiamo quindi applicare il principio d'identità dei polinomi, ottenendo l'uguaglianza polinomiale, da cui deduciamo  $m = 0$ , dato che  $a_0 \neq 0$ ; dunque  $f$  vale costantemente  $a_0$  su  $U_0$ . Analogamente mostriamo che  $f$  è costantemente  $a_0$  su  $U_1$ .  $\square$

**Corollario 1.11.2.** Se  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ , le funzioni regolari su  $\mathbb{P}^n$  sono le costanti.

*Dimostrazione.* Le funzioni regolari su  $\mathbb{P}^n$  in particolare sono regolari ristrette alle rette di  $\mathbb{P}^n$  (la restrizione non crea problemi, pensandoci un po'). Per la proposizione precedente,  $f$  quindi è costante su tutte le rette; in particolare è costante su tutto  $\mathbb{P}^n$ .  $\square$

**Esempio 1.11.3.** La varietà quasi-proiettiva  $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$  non è una varietà affine.

Scriviamo  $X = U \cup V$  dove  $U = \{x \neq 0\}$  e  $V = \{y \neq 0\}$ : questi sono aperti principali di  $\mathbb{A}^2$ , in particolare sono affini. Inoltre si avrà (vedi Proposizione 1.10.16)  $\mathbb{K}[U] = \mathbb{K}[x, y]_x$  e  $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x, y]_y$ .

Supponiamo per assurdo che  $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$  sia una varietà affine: in particolare avrà senso considerare  $\gamma : \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^2$  e  $\gamma^* : \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \mathbb{K}[\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}]$ . Il nostro scopo è mostrare che  $\gamma^*$  è un isomorfismo: in questo modo si può osservare che  $\mathfrak{m} = (x, y)$  è un ideale massimale di  $\mathbb{K}[x, y]$ , quindi di  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}]$ , tuttavia  $V_X(\mathfrak{m}) = \emptyset$  (in contraddizione con il Nullstellensatz relativo).

Per mostrare che è iniettiva basta scrivere le cose. Dimostrare la surgettività è un po' più complesso. Sia  $f \in \mathbb{K}[X]$ : vogliamo far vedere che è polinomiale. Osserviamo che  $f|_U = \frac{a(x, y)}{x^\alpha}$  e  $f|_V = \frac{b(x, y)}{y^\beta}$ , con  $(x, a) = (y, b) = 1$ .

Se  $\alpha \leq 0$ , allora  $f|_U \in \mathbb{K}[x, y]$  da cui  $f - x^{-\alpha} a(x, y) = 0$  su  $U$  e (passando alla chiusura)  $f = x^{-\alpha} a(x, y)$  su tutto  $X$ . È tutto analogo se  $\beta \leq 0$ .

Se  $\alpha, \beta > 0$ , allora  $\frac{a(x, y)}{x^\alpha} = \frac{b(x, y)}{y^\beta}$  su  $U \cap V$ , da cui  $y^\beta a(x, y) = x^\alpha b(x, y)$  su  $U \cap V$  e in particolare su  $X$ . Ne deduciamo che  $y^\beta a = x^\alpha b$  in  $\mathbb{K}[x, y]$ , da cui  $y \mid b$ , che è assurdo.

**Esempio 1.11.4.** Esistono morfismi bigettivi che non sono isomorfismi. Sia  $C = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ : siamo in presenza di una cuspide in 0. Vogliamo dare una parametrizzazione  $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow C$ : va bene per esempio  $f(t) = (t^2, t^3)$ . Questa mappa non è calata dal cielo: se immaginiamo di considerare tutte le rette della forma  $y = tx$  e di intersecarle con la curva, si ricava  $x = t^2$  e  $y = t^3$ . Non è difficile verificare che  $f$  è un morfismo bigettivo.

Sia ora  $f^* : \mathbb{K}[C] \rightarrow \mathbb{K}[\mathbb{A}^1]$  il pullback. Chiaramente  $I(C) = \sqrt{(y^2 - x^3)} = (y^2 - x^3)$ . Possiamo scrivere  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1] = \mathbb{K}[t]$ , e si ha  $f^*(x) = t^2$  e  $f^*(y) = t^3$ : osserviamo che  $\text{Im } f^* = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid \frac{dp}{dt}(0) = 0\}$ , tuttavia questo implica che  $t \notin \text{Im } f^*$ , quindi  $f^*$  non è surgettiva (in contraddizione con l'Osservazione 1.10.15).

**Esercizio 1.11.5.** Mostrare che, parametrizzando allo stesso modo la curva

$$C = V(y^2 - x^2(x + 1)),$$

la  $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow C$  ottenuta non è bigettiva.

*Hint.* Non è iniettiva perché  $C$  ha un punto doppio.

*Osservazione 1.11.6.* Siano  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{A}^m$  due chiusi, sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo,  $f^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  il loro pullback. Abbiamo già osservato che  $\mathbb{K}[X]$  non ha nilpotenti, in particolare  $\ker f^*$  sarà radicale ( $\mathbb{K}[Y]/\ker f^* \simeq \mathbb{K}[X]$ ). Dunque, per il Nullstellensatz relativo, si ha  $\ker f^* = I(Z)$  per qualche  $Z \subseteq Y$ . Ad uno sguardo più attento, si ha proprio  $Z = \overline{f(X)}$ .

**Definizione 1.11.7.** Un morfismo di varietà quasi-proiettive  $X \rightarrow Y$  si dice *dominante* se  $\overline{\text{Im } f} = Y$ .

**Corollario 1.11.8.** Se  $X, Y$  sono varietà affini e  $f : X \rightarrow Y$  è un morfismo, allora  $f$  è dominante se e solo se  $f^*$  è iniettiva.

**Esempio 1.11.9.** In generale i morfismi non sono né aperti né chiusi. Si consideri per esempio  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  che manda  $(x, y) \mapsto (x, xy)$ : si verifica che  $\text{Im } f = \{x \neq 0\} \cup \{0, 0\}$ , che non è un chiuso, né un aperto, né una varietà quasi-proiettiva, tuttavia è un *costruibile* (cioè unione finita di localmente chiusi<sup>16</sup>). Quello che si può dire (ma non dimostreremo) è che l'immagine di un morfismo dominante è una varietà quasi-proiettiva.

**Esempio 1.11.10.** Abbiamo già visto che  $\mathbb{A}^1 \not\cong C = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2$  tramite la mappa  $t \mapsto (t^2, t^3)$ . Ci chiediamo se possa valere comunque un isomorfismo tramite un'altra mappa: moralmente no ( $C$  ha un punto "speciale", che è la cuspide), ma come si può dimostrare formalmente? Basta far vedere che  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1] \cong \mathbb{K}[t]$  e  $\mathbb{K}[C]$  non sono isomorfi come  $\mathbb{K}$ -algebre: per esempio,  $\mathbb{K}[t]$  è UFD, mentre  $\mathbb{K}[C]$  no ( $x^6 = y^6$ ); oppure  $\mathbb{K}[t]$  è un PID, mentre  $(x, y) \subseteq \mathbb{K}[C]$  non è un ideale principale.

**Definizione 1.11.11.** Siano  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{A}^m$  chiusi, sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo. Allora  $f$  è un'*immersione chiusa* se  $f(X)$  è chiuso e  $f : X \rightarrow f(X)$  è un isomorfismo.

**Proposizione 1.11.12.** Siano  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{A}^m$  chiusi, sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo. Allora  $f$  è un'*immersione chiusa* se e solo se  $f^*$  è surgettiva.

*Dimostrazione.* Sia  $W = \overline{f(X)}$ , sia  $g = f : X \rightarrow W$ , sia  $j : W \rightarrow Y$ : vale  $f = j \circ g$ . Passando ai pullback, abbiamo  $f^* = g^* \circ j^*$ . Osserviamo che  $j^* = \text{id}_W$ , ed è surgettiva (basta prendere un rappresentante su  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^m]$  e restringere a  $Y$ ). Inoltre  $g^*$  è iniettiva in quanto  $g$  è dominante (vedi Corollario 1.11.8). Deduciamo quindi che  $g^*$  è un isomorfismo se e solo se  $g^*$  è surgettiva, se e solo se  $f^*$  è surgettiva (ricordiamo che  $j^*$  è surgettiva). Dato che  $g^*$  è un isomorfismo se e solo se  $g$  è un isomorfismo (lo dimostreremo dopo), basta verificare che  $g$  è un isomorfismo se e solo se  $f$  è un'*immersione chiusa*, ma questo è immediato.  $\square$

**Proposizione 1.11.13.** Siano  $X, Y$  varietà affini, sia  $\varphi : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  un omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre. Allora  $\exists! f : X \rightarrow Y$  morfismo tale che  $f^* = \varphi$ .

*Dimostrazione.* Separiamo due casi.

- Supponiamo prima  $X = \mathbb{A}^n$  e  $Y = \mathbb{A}^m$ : in questo modo possiamo identificare  $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ ,  $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Sia  $F_i = \varphi(y_i) \in \mathbb{K}[X]$  per  $i = 1, \dots, m$ , sia

$$F : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m \quad | \quad F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x})),$$

che è sicuramente un morfismo. Osserviamo che  $\mathbb{K}[Y]$  è generato (come  $\mathbb{K}$ -algebra) dagli  $y_i$ , e si ha  $F^*(y_i) = y_i \circ F = F_i = \varphi(y_i)$ , quindi  $F^* = \varphi$ .

<sup>16</sup>Mi è parso di capire che questa cosa valga in generale per morfismi.

- Nel caso generale, siano  $i_X : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$  e  $i_Y : Y \hookrightarrow \mathbb{A}^m$  le immersioni chiuse che rendono  $X, Y$  varietà affini. In particolare abbiamo  $i_X^* : \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  e  $i_Y^* : \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \rightarrow \mathbb{K}[Y]$ . Sia  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ i_Y^* : \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ .

Osserviamo ancora una volta che  $i_X^*$  è surgettiva (è una restrizione...), quindi per  $i = 1, \dots, m$  possiamo prendere  $F_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$  che solleva  $\tilde{\varphi}(y_i)$ : questo ci permette di definire  $\varphi_0 : \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \rightarrow \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$  omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre che fa commutare il diagramma ( $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$  è un anello di polinomi, quindi basta decidere le immagini delle coordinate  $y_i$ ).

Applicando il primo punto, esiste un unico morfismo  $F : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  tale che  $F^* = \varphi_0$ . Sia  $f = F|_X = F \circ i_X$ : per commutatività del diagramma di  $\mathbb{K}$ -algebre si verifica<sup>17</sup>  $f(X) \subseteq Y$ , dunque  $f : X \rightarrow Y$  è il nostro candidato morfismo. Effettivamente tutto funziona (testare sui generatori).  $\square$

**Corollario 1.11.14.** Siano  $X, Y$  varietà affini, sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo. Allora  $f$  è un isomorfismo se e solo se  $f^*$  è un isomorfismo (di  $\mathbb{K}$ -algebre).

*Dimostrazione.* La freccia ( $\Rightarrow$ ) in effetti l'avevamo già verificata. Supponiamo quindi che  $f^*$  sia un isomorfismo, e sia  $\varphi = f^{-*} : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[Y]$ : dato  $g : Y \rightarrow X$  morfismo tale che  $g^* = \varphi$ , si osserva facilmente che  $(f \circ g)^* = \text{Id}_Y^*$ , da cui  $f \circ g = \text{Id}_Y$  per l'unicità (e analogamente  $g \circ f = \text{Id}_X$ ).  $\square$

**Esempio 1.11.15.** Il corollario appena visto ci offre una dimostrazione alternativa del fatto che  $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$  non è una varietà affine: se lo fosse, data ancora  $j : X \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ , avremmo ancora che  $j^*$  è un isomorfismo, ma  $j$  non è surgettiva.

Proponiamo un altro corollario:

**Corollario 1.11.16.** Siano  $X, Y$  due varietà affini. Allora  $X \cong Y$  se e solo se  $\mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}[Y]$ .

*Dimostrazione.* Applicazione immediata del corollario precedente (da un isomorfismo di varietà passiamo ad un isomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre, e viceversa).  $\square$

## 1.12 Lezione 12 (06 Nov 2015)

**Definizione 1.12.1.** Siano  $\underline{\mathcal{A}}$  e  $\underline{\mathcal{B}}$  due categorie, siano  $F_1, F_2 : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$  due funtori. Sia  $\eta : F_1 \rightarrow F_2$  che associa  $\forall A \in \underline{\mathcal{A}}$  un morfismo  $\eta_A : F_1(A) \rightarrow F_2(A)$  in  $\underline{\mathcal{B}}$ . Diciamo che  $\eta$  è una *trasformazione naturale* se,  $\forall \varphi : A \rightarrow A'$  morfismo in  $\underline{\mathcal{A}}$ , il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{\eta_A} & F_2(A) \\ F_1\varphi \downarrow & & \downarrow F_2\varphi \\ F_1(A') & \xrightarrow{\eta_{A'}} & F_2(A') \end{array} .$$

Diciamo inoltre che  $\eta$  è un' *equivalenza naturale* se  $\forall A \in \underline{\mathcal{A}}$   $\eta_A$  è un isomorfismo e le rispettive inverse  $\xi_B$  fanno commutare il diagramma opposto.

**Definizione 1.12.2.** Siano  $\underline{\mathcal{A}}$  e  $\underline{\mathcal{B}}$  due categorie. Un funtore  $F : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$  è un' *equivalenza di categorie* se  $\exists G : \underline{\mathcal{B}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$  funtore tale che  $\exists \eta : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\underline{\mathcal{B}}}$  e  $\xi : G \circ F \rightarrow \text{Id}_{\underline{\mathcal{A}}}$  equivalenze naturali.

<sup>17</sup>Si osserva che  $f^* = \varphi \circ i_Y^*$ , da cui  $\forall g \in I(Y)$   $g \circ f = \varphi \circ i_Y^*(g) = \varphi(g \circ i_Y) = \varphi(0) = 0$ , che significa  $I(Y) \subseteq I(f(X))$  e infine  $f(X) \subseteq Y$ .

**Esempio 1.12.3.** Sia  $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$  la categoria degli spazi vettoriali a dimensione finita, dove i morfismi sono le applicazioni lineari. Consideriamo il funtore controvariante *duale*  $F : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$  che manda

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}} \ni V \mapsto V^*, \quad (\varphi : V \rightarrow W) \mapsto (\varphi^* : W^* \rightarrow V^*) \\ \forall \alpha \in W^* \quad \varphi^*(\alpha) = \alpha \circ \varphi.$$

Consideriamo ora il funtore covariante *biduale*  $F' : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$  che manda

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}} \ni V \mapsto V^{**}, \quad (\varphi : V \rightarrow W) \mapsto (\varphi^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}) \\ \forall \xi \in V^{**} \quad \varphi^{**}(\xi) = \xi \circ \varphi^*.$$

Si può verificare che  $F'$  è un'equivalenza di categorie.

Presentiamo (senza dimostrarlo) un criterio per verificare se due categorie sono equivalenti:

**Definizione 1.12.4.** Sia  $F : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$  un funtore tra due categorie. Allora  $F$  si dice *pienamente fedele* se  $\forall A_1, A_2 \in \underline{\mathcal{A}}$  la mappa  $\underline{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \rightarrow \underline{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2))$ , definita da  $F$  sui morfismi, è bigettiva.

Diciamo inoltre che  $F$  è *essenzialmente surgettivo* se  $\forall B \in \underline{\mathcal{B}}$  esiste  $A \in \underline{\mathcal{A}}$  tale che  $B \cong F(A)$ .

**Lemma 1.12.5.** Sia  $F : \underline{\mathcal{A}} \rightarrow \underline{\mathcal{B}}$  un funtore tra due categorie. Allora  $F$  è un'equivalenza di categorie se e solo se è pienamente fedele ed essenzialmente surgettivo.

Usiamo il criterio appena presentato per verificare che le varietà affini sono equivalenti alle  $\mathbb{K}$ -algebre ridotte finitamente generate:

**Proposizione 1.12.6.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo algebricamente chiuso. Sia  $\text{Aff}_{\mathbb{K}}$  la categoria delle varietà affini (che ha per morfismi i morfismi), sia  $\text{RAlg}_{\mathbb{K}}$  la categoria delle  $\mathbb{K}$ -algebre ridotte finitamente generate (che ha per morfismi gli omomorfismi di  $\mathbb{K}$ -algebre). Sia  $F : \text{Aff}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{RAlg}_{\mathbb{K}}$  il funtore che manda  $X \mapsto \mathbb{K}[X]$  e  $\alpha \mapsto \alpha^*$ . Allora  $F$  è un'equivalenza di categorie.

*Dimostrazione.* Abbiamo già mostrato che  $F$  è pienamente fedele (vedi Proposizione 1.11.13. Sia dunque  $R$  una  $\mathbb{K}$ -algebra ridotta e finitamente generata: sarà quindi generata da un opportuno omomorfismo surgettivo di  $\mathbb{K}$ -algebre della forma  $p : \mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R$ . Sia  $J = \ker p$ : avremo  $R \cong \mathbb{K}[\mathbf{x}]/J$ , da cui  $J = \sqrt{J}$  perché  $R$  è ridotta. Dunque per il Nullstellensatz  $J = I(X)$  per qualche chiuso  $X$ , e ne deduciamo  $\mathbb{K}[X] \cong R$  per definizione di  $\mathbb{K}[X]$ .  $\square$

In particolare, qualunque informazione può essere cercata indiscriminatamente nelle varietà affini o nei relativi anelli coordinati.

*Osservazione 1.12.7.* Sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo di varietà affini e sia  $f^* : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  il pullback. Sia  $\forall Q \in X \quad M_Q \subseteq \mathbb{K}[X]$  l'ideale massimale associato al punto  $Q$ , sia analogamente definito  $\forall P \in Y \quad M_P \subseteq \mathbb{K}[Y]$ . Allora  $M_{f(Q)} = f^{-1}(M_Q)$  (infatti  $g \in f^{-1}(M_Q)$  se e solo se  $f^*(g) \in M_Q$  se e solo se  $g \circ f(Q) = 0$  se e solo se  $g \in M_{f(Q)}$ ).

Osserviamo che in generale, se  $f : X \rightarrow Y$  è un omomorfismo di anelli e  $\mathfrak{m} \subseteq Y$  è massimale, non è detto che  $\mathfrak{m}^C = f^{-1}(\mathfrak{m}^C)$  sia ancora massimale (contratti di primi però sono ancora primi).

**Esercizio 1.12.8.** Se  $f : X \rightarrow Y$  è un omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre, allora i contratti dei massimali sono ancora massimali.

*Osservazione 1.12.9.* Supponiamo ancora una volta  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ . Ricordiamoci che in generale gli ideali primi sono in corrispondenza con le varietà irriducibili. Ci chiediamo cosa sia  $\text{Spec}(\mathbb{K}[x])$ : dato che i chiusi di  $\mathbb{A}$  sono unioni finite di punti, gli unici irriducibili sono  $\emptyset$  e  $\{c\}$  per  $c \in \mathbb{K}$ ,

che corrispondono agli ideali  $(0)$  e  $(x - c)$  in  $\text{Spec}(\mathbb{K}[x])$  (in un certo senso rappresentabili come  $0 \cup \mathbb{K}$ ).

Analogamente, ricordando che i chiusi di  $\mathbb{A}^2$  sono le unioni finite di punti e ipersuperfici, gli unici irriducibili sono  $\emptyset$ ,  $\{c\}$  per  $c \in \mathbb{K}^2$  e  $V(f)$  per  $f \in \mathbb{K}[x, y]$  irriducibile. Questi corrispondono agli ideali  $(0)$ ,  $M_c$  e  $(f)$  per  $f \in \mathbb{K}[x, y]$  irriducibile.

**Definizione 1.12.10.** Dato un anello (commutativo con identità)  $A$ , definiamo una topologia (anche questa detta di *Zariski*) su  $\text{Spec } A$  a partire dai chiusi, che saranno della forma  $V(I) = \{p \in \text{Spec } A \mid p \supseteq I\}$ , al variare degli ideali  $I \subseteq A$ .

**Esercizio 1.12.11.** Verificare che si tratta effettivamente di una topologia.

**Definizione 1.12.12.** Siano  $A, B$  anelli e  $\varphi : A \rightarrow B$  un omomorfismo (di anelli). Allora definiamo il *morfismo*  $\varphi^\# : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  che manda  $p \mapsto p^C$ .

**Esercizio 1.12.13.** Dimostrare che  $\varphi^\#$  è una funzione continua.

*Hint.* Verificare che  $\varphi^{-\#}(V(J)) = V(J^e)$  per ogni  $J \subseteq A$  ideale.

[Seguono accenni sugli *schemi* (in senso algebrico), che qui non verranno riportati]

**Proposizione 1.12.14.** Si osserva che, se  $p \in \text{Spec } A$ , allora  $\{p\}$  è chiuso se e solo se  $p \in \text{SpecMax } A$ <sup>18</sup>.

*Osservazione 1.12.15.* Se  $A$  è un dominio, allora  $(0) \in \text{Spec } A$ . Ci accorgiamo che  $(0)$  non è contenuto in nessun altro chiuso, o equivalentemente è contenuto in ogni aperto non vuoto (è solo un punto). Questo implica che  $\overline{(0)} = \text{Spec } A$  (cioè  $\{(0)\}$  è denso). In questo caso  $(0)$  è noto come *punto generico*.

**Esempio 1.12.16.** Osserviamo che

$$\text{Spec}(\mathbb{R}[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - c) \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{((x - z)(x - \bar{z})) \mid z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}.$$

In particolare, per la Proposizione 1.12.14 deduciamo che il punto generico è l'unico non chiuso.

**Esempio 1.12.17.** Nel caso degli interi  $\text{Spec } \mathbb{Z} = \{(0)\} \cup \{(p) \mid p \text{ è primo}\}$  (questo lo sappiamo da Aritmetica).

**Esempio 1.12.18.** Banalmente  $\text{Spec } \mathbb{C}$  è costituito dal solo punto generico. Anche  $\text{Spec}(\mathbb{C}[t]/t^2)$  è costituito da un solo punto: infatti i suoi ideali sono tutti principali (ma non è un dominio!), e  $a + bt$  è invertibile se e solo se  $a \neq 0$ . Segue che l'unico ideale primo di  $\mathbb{C}[t]/t^2$  sarà  $(t)$ .

Osserviamo che  $\mathbb{C}$  rappresenta le funzioni costanti, mentre  $\mathbb{C}[t]/t^2$  rappresenta le equazioni polinomiali fino al II ordine<sup>19</sup>. In qualche senso  $\text{Spec } \mathbb{C}$  e  $\text{Spec}(\mathbb{C}[t]/t^2)$  non sono la stessa cosa, e questo si può dedurre più facilmente dal seguente esempio.

**Esempio 1.12.19.** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid x \mapsto x^2$ : il suo pullback è  $f^* : \mathbb{C}[y] \rightarrow \mathbb{C}[x] \mid y \mapsto x^2$ . Dato  $c \in \mathbb{C}$ , possiamo identificare  $f^{-1}(c)$  con  $x^2 - c = 0$  (sono le sue soluzioni...). In senso schemistico<sup>20</sup>, possiamo scrivere  $f^{-1}(c) = \text{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x^2 - c))$ . Se  $c \neq 0$  si osserva facilmente che  $\mathbb{C}[x]/(x^2 - c) \cong \mathbb{C}[x]/(x - b) \oplus \mathbb{C}[x]/(x + b) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  (dove  $b \in \mathbb{C} : b^2 = c$ ). In particolare  $\mathbb{C}[x]/(x^2 - c)$  ha solo due ideali primi. D'altra parte, se  $c = 0$ , abbiamo  $\mathbb{C}[x]/x^2$  (come nell'esempio precedente): abbiamo un solo ideale primo, ma in qualche senso possiamo considerarlo un punto doppio.

<sup>18</sup>In particolare, questa topologia di Zariski (in generale) non è neanche T1.

<sup>19</sup>Questo discorso non mi è del tutto chiaro, penso che riguardi ancora gli schemi...

<sup>20</sup>Qualunque cosa voglia dire.

**Esempio 1.12.20.** Sia  $v_{1,2} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tale che  $v_{1,2}([x_0, x_1]) = [x_0^2, x_0x_1, x_1^2]$ . È facile verificarne la buona definizione (bisogna mostrare che  $v_{1,2}([\lambda x_0, \lambda x_1]) = v_{1,2}([x_0, x_1])$ , e che  $x_0^2 = x_0x_1 = x_1^2 = 0 \rightarrow x_0 = x_1 = 0$ ).

Possiamo inoltre dimostrare che  $v_{1,2}$  è un morfismo:

- Per la continuità, basta mostrare che  $v_{1,2}^{-1}(V(F))$  è un chiuso per ogni  $F \in \mathbb{K}[y_0, y_1, y_2]$  omogeneo. Si verifica facilmente che  $v_{1,2}^{-1}(V(F(y_0, y_1, y_2))) = V(F(x_0^2, x_0x_1, x_1^2))$ , e che  $G(x_0, x_1) = F(x_0^2, x_0x_1, x_1^2)$  è ancora un polinomio omogeneo.
- Dobbiamo mostrare che  $\forall U \subseteq \mathbb{P}^2$  aperto  $\forall \varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$  regolare, allora anche  $\varphi \circ v_{1,2} : v_{1,2}^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{K}$  è regolare. A meno di passare a sottointorni, possiamo supporre  $\varphi = \frac{A(y)}{B(y)}$  con  $A, B$  omogenee dello stesso grado, con  $B \neq 0$  nel sottointorno. Ne consegue che

$$\varphi \circ v_{1,2}(x_0, x_1) = \frac{A(x_0^2, x_0x_1, x_1^2)}{B(x_0^2, x_0x_1, x_1^2)} = \frac{\hat{A}(x_0, x_1)}{\hat{B}(x_0, x_1)},$$

dove tutto è ancora soddisfatto ( $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sono ancora omogenee dello stesso grado).

*Osservazione 1.12.21.* Analogamente all'esempio precedente, se  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  è una varietà quasi-proiettiva, e  $F_0, \dots, F_m$  sono polinomi omogenei dello stesso grado tali che  $X \cap \bigcap_{i=0}^m F_i = \emptyset$ , allora l'applicazione  $X \rightarrow \mathbb{P}^n \mid x \mapsto [F_0(x), \dots, F_m(x)]$  è ben definita ed è un morfismo.

**Esempio 1.12.22.** Ci chiediamo cosa sia  $\text{Im } v_{1,2}$ : chiaramente  $\text{Im } v_{1,2} \subseteq \mathcal{C}_2 = \{y_0y_2 - y_1^2 = 0\}$  (semplice verifica). In realtà possiamo verificare che  $v_{1,2}$  induce proprio un'isomorfismo tra queste varietà quasi-proiettive. Mostriamolo costruendo il morfismo inverso  $\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

Osservando che nell'immagine  $y_0 = x_0^2, y_1 = x_0x_1$  e  $y_2 = x_1^2$ , osserviamo che (tranne in casi opportuni) si ha  $\frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{y_1} = \frac{y_1}{y_2}$ . Proviamo a definire tutto nelle carte:

- Sia  $U_0 = \mathcal{C}_2 \cap \{y_0 \neq 0\}$ : definiamo  $U_0 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid [y_0, y_1, y_2] \mapsto [y_0, y_1]$ . Qui è ben definito ed è effettivamente un morfismo (vedi osservazione precedente). Restringendoci alla carta, si tratta chiaramente dell'inversa di  $v_{1,2}$ .
- Sia  $U_2 = \mathcal{C}_2 \cap \{y_2 \neq 0\}$ : definiamo  $U_2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid [y_0, y_1, y_2] \mapsto [y_1, y_2]$ . Anche in questo caso è ben definito ed è un morfismo, ed è l'inversa di un'opportuna restrizione di  $v_{1,2}$ .
- L'essere un morfismo è una proprietà locale, quindi basta verificare che i due morfismi "si incollino" su  $U_0 \cap U_2$ . Questo si verifica immediatamente, dato che  $[y_0, y_1, y_2] \in \mathcal{C}_2 \iff \frac{y_0}{y_1} = \frac{y_1}{y_2}$ .

## 1.13 Lezione 13 (11 Nov 2015)

Definiamo le *mappe di Veronese*

$$v_{1,n} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n \quad \mid \quad [x_0, x_1] \mapsto [x_0^n, x_0^{n-1}x_1, \dots, x_1^n].$$

Questi sono chiaramente dei morfismi a valori in  $\mathbb{P}^n$  (vedi Osservazione 1.12.21) Definiamo ora su  $\mathbb{P}^n$  l'insieme

$$C_n = \left\{ [y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{P}^n \mid \text{Rk} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1} & y_n \end{pmatrix} \leq 1 \right\},$$

detto *curva razionale* di grado  $n$  (nel caso  $n = 3$  è la cubica gobba). Questo è un chiuso proiettivo: è definita dai polinomi omogenei che determinano i determinanti dei minori.

Si verifica immediatamente (basta sostituire) che  $\text{Im } v_{1,2} \subseteq C_n$ : tutte le righe risultano essere multiple di  $(x_0, x_1)$ .

**Teorema 1.13.1.** La mappa di Veronese  $v_{1,n} : \mathbb{P}^1 \rightarrow C_n$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Basta esibire un morfismo inverso  $g : C_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Anzi: basta prendere un opportuno ricoprimento aperto di  $C_n$ , definire un morfismo inverso su ciascuno di essi, e verificare che nelle intersezioni è tutto ben definito (sono proprietà locali).

Siano  $U_0 = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$  e  $U_n = \{x_n \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ : chiaramente  $C_n = (C_n \cap U_0) \cup (C_n \cap U_n)$ . Consideriamo un generico  $[y_0, \dots, y_n] \in C_n$ : osserviamo che non si può verificare  $y_0 = y_n = 0$  (studiando i determinanti dei minori di ordine 2 della matrice sopracitata). Osserviamo che, dato  $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1$ , visto  $v_{1,n}([x_0, x_1])$ , ci aspettiamo che, considerata ancora la matrice associata, almeno una riga tra la prima e l'ultima sia non nulla, e ciascuna riga non nulla soddisfi  $[y_i, y_{i+1}] = [x_0, x_1]$ . Dunque definiamo sugli aperti:

$$\begin{aligned} g : C_n \cap U_0 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \mid y \mapsto [y_0, y_1] \\ g : C_n \cap U_n &\rightarrow \mathbb{P}^1 \mid y \mapsto [y_{n-1}, y_n]. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $g$  è ben definita nell'intersezione, che è un morfismo e che, per com'è definita, è l'inversa di  $v_{1,n}$ .  $\square$

Definiamo ora la *mappa di Veronese*

$$v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_1x_2, x_0x_2] \sim \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Definiamo quindi

$$\Sigma = \left\{ [z_{ij}]_{0 \leq i \leq j \leq 2} \in \mathbb{P}^5 \mid \text{Rk} \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} \\ z_{01} & z_{11} & z_{12} \\ z_{02} & z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \leq 1 \right\},$$

che è ancora un chiuso proiettivo (stesse ragioni delle curve razionali). Anche in questo caso  $\text{Im } v_{2,2} \subseteq \Sigma$  (verifica per sostituzione), e si può procedere (allo stesso modo di prima) a dimostrare che si tratta invero di un isomorfismo.

L'unica accortezza sta nelle carte da considerare:  $U_i = \{z_{ii} \neq 0\}$  per  $0 \leq i \leq 2$ . Infatti si verifica (sempre per ragioni relative ai determinanti dei minori) che non si può avere contemporaneamente  $z_{00} = z_{11} = z_{22} = 0$  in  $\Sigma$ .

A questo punto sembra sensato passare ad una vera generalizzazione di quanto stiamo facendo:

**Definizione 1.13.2.** Siano  $k, n$  due interi positivi, sia  $N = \binom{n+k}{n} - 1$ , diamo a  $\mathbb{P}^N$  coordinate della forma  $z_I$  al variare di  $I$  tra i multiindici di lunghezza  $k+1$  e grado  $n$  (cioè quelli che determinano tutti i monomi omogenei in  $k+1$  variabili e grado totale  $n$ ). Definiamo la *mappa di Veronese* di dimensione  $k$  e grado  $n$  come

$$v_{k,n} : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^N \mid [x_0, \dots, x_k] \mapsto [x^I]_{|I|=n}.$$

Definiamo inoltre il chiuso proiettivo in  $\mathbb{P}^N$

$$\Sigma_{k,n} = \{z_I z_J - z_{I'} z_{J'} = 0 \mid |I| = |J| = |I'| = |J'| = n, \ I + J = I' + J'\}.$$

Anche in questo caso si verifica  $\text{Im } v_{k,n} \subseteq \Sigma_{k,n}$  (pensare a come si comportano gli esponenti rispetto ai prodotti).

**Teorema 1.13.3.** La mappa di Veronese  $v_{k,n} : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^N$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è del tutto analoga ai casi precedenti. L'unica finezza è come dimostrare che  $V(z_{n0}\dots 0, \dots, z_{0\dots 0n}) \cap \Sigma_{k,n} = \emptyset$ : un modo potrebbe essere, dato un  $I$  generico, prendere  $I^{(1)}, J^{(1)}$  tali che  $2I = I^{(1)} + J^{(1)}$ , "concentrando" la parte positiva di  $I^{(1)}$  nei primi elementi, per poi procedere per induzione (ad un certo punto si arriverà a  $I^{(h)} = (0, \dots, 0, n, 0, \dots, 0)$  e avremo scritto  $z_I^{2^h} = z_{I^{(h)}} \dots$ ).  $\square$

**Esempio 1.13.4.** Sia  $X = \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0^2 + x_1^2 - 3x_2^2 = 0\}$ : ci chiediamo se è una varietà affine. Consideriamo  $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ : questa induce un isomorfismo

$$v_{2,2} : X \leftrightarrow \Sigma_{2,2} \setminus V_{\mathbb{P}^5}(z_{00} + z_{11} - 3z_{22}).$$

Questo è un chiuso proiettivo di  $\mathbb{P}^5$  al quale si è tolto un iperpiano: dunque è un chiuso di  $\mathbb{A}^5$ .

L'esempio precedente si può ovviamente generalizzare:

**Proposizione 1.13.5.** Il complementare di qualunque ipersuperficie in  $\mathbb{P}^k$  è una varietà affine.

*Dimostrazione.* Sia  $F = \sum_I a_I x^I$  l'equazione dell'ipersuperficie (polinomio omogeneo di grado  $d$  in  $k+1$  variabili): allora

$$V(F) = v_{k,d}^{-1}\left(V\left(\sum a_I z_I\right)\right) \Rightarrow v_{k,d}(V(F)) = V\left(\sum a_I z_I\right)$$

e si avrà  $\mathbb{P}^k \setminus V(F) \cong \Sigma_{k,n} \setminus V(\sum a_I z_I)$  tramite la mappa di Veronese.  $\square$

### 1.13.1 Prodotti di varietà

Introduciamo il concetto di prodotto di varietà quasi-proiettive, nel linguaggio della proprietà universale:

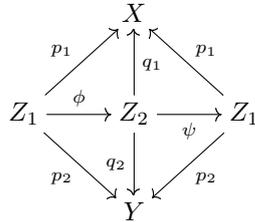
**Definizione 1.13.6.** Siano  $X, Y$  due varietà quasi-proiettive. Allora la terna  $(Z, p_1, p_2)$ , dove  $Z$  è una varietà quasi-proiettiva e  $p_1 : Z \rightarrow X, p_2 : Z \rightarrow Y$  sono due morfismi, si dice *prodotto* di  $X, Y$  se, per ogni varietà quasi-proiettiva  $W$  e coppia di morfismi  $f : W \rightarrow X, g : W \rightarrow Y$ , il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \\ p_1 \swarrow & \phi & \searrow p_2 \\ & Z & \end{array}$$

In tal caso i morfismi  $p_1$  e  $p_2$  sono detti *proiezioni*.

**Proposizione 1.13.7.** Il prodotto di varietà è unico a meno di isomorfismo.

*Dimostrazione.* Supponiamo di avere due prodotti  $(Z_1, p_1, p_2)$  e  $(Z_2, q_1, q_2)$ . Applicando la proprietà universale a  $(Z_2, q_1, q_2)$  rispetto a  $Z_1$ , e a  $Z_1(p_1, p_2)$  rispetto a  $Z_2$ , otteniamo due morfismi  $\phi, \psi$  che fanno commutare il seguente diagramma:

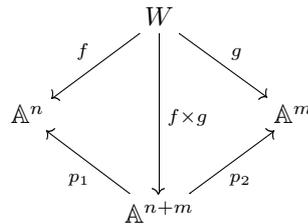


Banalmente  $\psi \circ \phi : Z_1 \rightarrow Z_1$  fa commutare il sottodiagramma  $Z_1, X, Z_1, Y$ , così come lo fa commutare  $\text{Id}_{Z_1}$ , dunque  $\psi \circ \phi = \text{Id}_{Z_1}$  per unicità. Analogamente  $\phi \circ \psi = \text{Id}_{Z_2}$ .  $\square$

Vediamo prima qual è il prodotto di spazi affini:

**Proposizione 1.13.8.** Il prodotto delle varietà  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathbb{A}^m$  è  $(\mathbb{A}^{n+m}, p_1, p_2)$ , dove  $p_1 : \mathbb{A}^{n+m} \rightarrow \mathbb{A}^n$  e  $p_2 : \mathbb{A}^{n+m} \rightarrow \mathbb{A}^m$  sono le proiezioni usuali.

*Dimostrazione.* Basta verificare la proprietà universale. Sia  $W$  una varietà quasi-proiettiva, siano  $f : W \rightarrow \mathbb{A}^n$  e  $g : W \rightarrow \mathbb{A}^m$  due morfismi. Possiamo scrivere genericamente  $f = (f_1, \dots, f_n)$  e  $g = (g_1, \dots, g_m)$ , dove i  $f_i$  e i  $g_j$  sono funzioni regolari. Sia dunque  $f \times g : W \rightarrow \mathbb{A}^{n+m} \mid z \mapsto (f_i, g_j)$ :



La mappa  $f \times g$  è banalmente un morfismo, e fa commutare il diagramma<sup>21</sup>.  $\square$

*Osservazione 1.13.9.* Osserviamo che la topologia su  $\mathbb{A}^{n+m}$  non è la topologia prodotto: per esempio, la topologia prodotto su  $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$  è quella generata da quantità finite di punti e rette parallele agli assi (come chiusi), mentre quella di Zariski su  $\mathbb{A}^2$  ha molti più chiusi.

Si estende tutto facilmente ai chiusi di spazi affini:

**Proposizione 1.13.10.** Siano  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{A}^m$  due chiusi: allora  $X \times Y$  (prodotto cartesiano) è chiuso in  $\mathbb{A}^{n+m}$ , e coincide con il prodotto definito dalla proprietà universale.

Ci chiediamo a questo punto cosa sia l'anello delle coordinate del prodotto:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y \xrightarrow{p_2} Y & \Rightarrow & \mathbb{K}[X \times Y] \xleftarrow{p_2^*} \mathbb{K}[Y] \\
 p_1 \downarrow & & \uparrow p_1^* \\
 X & & \mathbb{K}[X]
 \end{array}$$

<sup>21</sup>In realtà manca da dimostrare l'unicità, ma è immediato verificare che una  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{A}^{n+m}$  che faccia commutare il diagramma è necessariamente di quella forma.

**Proposizione 1.13.11.** Sia  $\mu : \mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X \times Y]$  l'omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre indotto dalla moltiplicazione:

$$\mu(f(x) \otimes g(y)) = f(x)g(y).$$

Allora  $\mu$  è un isomorfismo di  $\mathbb{K}$ -algebre.

*Dimostrazione.* Che sia ben definito è una facile verifica.

**Surgettività:** Dato che  $\mathbb{K}[X \times Y]$  è generato come  $\mathbb{K}$ -algebra dalle classi di  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ , è sufficiente osservare che  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in \text{Im } \mu$ . Questo è immediato:  $x_i = \mu(x_i \otimes 1)$  e  $y_j = \mu(1 \otimes y_j)$  per ogni  $i, j$ .

**Iniettività:** Un elemento generico del prodotto tensore può essere scritto come  $z = \sum_{i=1}^s f_i(x) \otimes g_i(y)$ , dove possiamo supporre wlog che le  $g_i(y)$  siano linearmente indipendenti su  $\mathbb{K}$  (altrimenti ricavo  $g_k = \sum \lambda_i g_i$  e sostituisco). Se  $z \in \ker \mu$ , allora  $\sum f_i(x)g_i(y) \equiv 0$  su  $\mathbb{K}[X \times Y]$ . In particolare,  $\forall x_0 \in X$  si ha  $\sum f_i(x_0)g_i(y) \equiv 0$  su  $\mathbb{K}[Y]$ , ma questo implica  $\forall i \ f_i(x_0) = 0$ , da cui  $f_i(x) \equiv 0$  su  $X$  per arbitrarietà di  $x_0$ . Dunque  $z = \sum 0 \otimes g_i(y) = 0$ .  $\square$

## 1.14 Lezione 14 (18 Nov 2015)

### 1.14.1 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ come varietà

Goal: vogliamo costruire  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , come varietà quasi-proiettiva.

**Definizione 1.14.1.** Definiamo la *mappa di Segre*

$$s_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3 \sim \mathbb{P}(\mathbb{A}^{2 \times 2}) \quad | \quad ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \mapsto \begin{bmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_1 \\ x_1 y_0 & x_1 y_1 \end{bmatrix}.$$

Si osserva facilmente che la mappa di Segre è ben definita, e che la sua immagine è contenuta nella *varietà di Segre*<sup>22</sup>:

$$\Sigma_{1,1} = \{Z = (z_{ij}) \in \mathbb{P}^3 \mid \text{Rk}(Z) \leq 1\}.$$

La varietà di Segre è effettivamente una varietà (come avevamo fatto per la varietà di Veronese).

Siano  $p_1 : \Sigma_{1,1} \rightarrow \mathbb{P}^1$  la mappa data dalle colonne e  $p_2 : \Sigma_{1,1} \rightarrow \mathbb{P}^1$  la mappa data dalle righe (definite come nella lezione precedente, andrebbero fatte un po' di verifiche, ma siamo fondamentalmente nelle ipotesi giuste). Osserviamo che questi due sono morfismi.

**Proposizione 1.14.2.** La mappa di Segre è una bigezione<sup>23</sup> con  $\Sigma_{1,1}$ .

*Hint.* Mostrare su carte opportune che  $p_1 \times p_2$  e  $s_{1,1}$  sono l'una l'inversa dell'altra.

A cosa ci servono queste mappe? A costruire il prodotto  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ :

**Proposizione 1.14.3.**  $(\Sigma_{1,1}, p_1, p_2)$  è il prodotto di  $\mathbb{P}^1$  per  $\mathbb{P}^1$ .

<sup>22</sup>Attenzione! Nonostante la notazione simile, la varietà di Segre non coincide con quella di Veronese!

<sup>23</sup>Dal punto di vista insiemistico: non abbiamo ancora dotato  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  di struttura.

*Dimostrazione.* Bisogna verificare la proprietà universale. Siano quindi  $X, f, g$  come nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{P}^1 & \\
 p_2 \nearrow & & \nwarrow g \\
 \Sigma_{1,1} & \xleftarrow{\phi} & X \\
 p_1 \searrow & & \swarrow f \\
 & \mathbb{P}^1 &
 \end{array}$$

Vogliamo mostrare che esiste un'unico morfismo  $\phi$  che fa commutare il diagramma. Osserviamo che un tale morfismo dev'essere necessariamente della forma  $\phi = s_{1,1} \circ (f \times g)$ : infatti

$$\begin{cases} p_1 \circ \phi = f \\ p_2 \circ \phi = g \end{cases} \Rightarrow (p_1 \times p_2) \circ \phi = f \times g \Rightarrow \phi = s_{1,1} \circ (f \times g),$$

ricordando che  $s_{1,1}$  è l'inversa di  $(p_1 \times p_2)$ .

È chiaro che una tale mappa fa commutare il diagramma, ma dobbiamo verificare che è un morfismo. Consideriamo il ricoprimento aperto di  $X$  dato dagli  $X_{i,j} = \{f_i \neq 0\} \cap \{g_j \neq 0\}$  per  $0 \leq i, j \leq 1$ : basta mostrare che  $\phi|_{X_{i,j}}$  è un morfismo per ogni  $i, j$ ; ci limitiamo a  $i = j = 0$ . Sia  $U_0 = \{f_0 \neq 0\} = f^{-1}(x_0 \neq 0)$ : allora  $f(U_0) \subseteq \mathbb{P}^1 \setminus \{[0, 1]\} \sim \mathbb{A}^1$ , dunque  $f|_{U_0}$  è regolare (vedi Proposizione 1.10.6), e possiamo scrivere  $x \xrightarrow{f} [1, f_1(x)]$  con  $f_1$  funzione regolare. Analogamente  $V_0 = \{g_0 \neq 0\}$  e  $g|_{V_0} : x \mapsto [1, g_1(x)]$  con  $g_1$  regolare. Dato che  $X_{0,0} = U_0 \cap V_0$ , possiamo scrivere

$$\phi|_{X_{0,0}} : x \mapsto \begin{bmatrix} 1 & g_1(x) \\ f_1(x) & g_1(x)f_1(x) \end{bmatrix} \in \{z_{0,0} \neq 0\} \sim \mathbb{A}^3,$$

e concludiamo che  $\phi|_{X_{0,0}}$  è un morfismo (sempre per la Proposizione 1.10.6).  $\square$

*Osservazione 1.14.4.* Osserviamo che, denotando  $\mathbb{P}^3 \sim \begin{bmatrix} x & z \\ t & y \end{bmatrix}$ , si ha  $\Sigma_{1,1} = V(xy - zt)$ , cioè  $\Sigma_{1,1}$  è un'iperboloide, che è una quadrica rigata<sup>24</sup>. Ci aspettiamo quindi che esistano due famiglie di rette  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , tali che

- Le rette in  $\mathcal{A}$  (risp. in  $\mathcal{B}$ ) sono tutte disgiunte tra loro;
- Le rette in  $\mathcal{A}$  (risp. in  $\mathcal{B}$ ) sono contenute interamente in  $\Sigma_{1,1}$ ;
- Per ogni  $P \in \Sigma_{1,1}$ , esistono uniche  $r \in \mathcal{A}$  e  $s \in \mathcal{B}$  tali che  $P \in r$  e  $P \in s$ ;
- Per ogni  $r \in \mathcal{A}$  e  $s \in \mathcal{B}$  si ha  $\#(r \cap s) = 1$ .

Effettivamente, fissato  $[c, d] \in \mathbb{P}^1$ , osserviamo che

$$s_{1,1}|_{\mathbb{P}^1 \times \{[c,d]\}} : [x_0, x_1] \mapsto \begin{bmatrix} ax_0 & bx_0 \\ ax_1 & bx_1 \end{bmatrix}$$

è una proiezione, quindi l'immagine rispetto a  $s_{1,1}$  di sottoinsiemi della forma  $\mathbb{P}^1 \times \{\text{pt}\}$  (risp.  $\{\text{pt}\} \times \mathbb{P}^1$ ) sono delle rette proiettive. Possiamo osservare che questo ci dà due famiglie di rette, che rispettano i punti precedenti.

<sup>24</sup>Fatti che qualcuno potrebbe ricordarsi da Geometria 2.

## Topologia di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Vogliamo ora definire una topologia su  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ : dato che  $s_{1,1}$  è appena diventato un isomorfismo, induciamo su  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  la topologia di Zariski di  $\Sigma_{1,1} \subseteq \mathbb{P}^3$ . Questa topologia sarà quindi generata dai chiusi della forma  $s_{1,1}^{-1}(V(F))$ , al variare di  $F(z) \in \mathbb{K}[z_{ij}]$  tra i polinomi omogenei in quattro variabili.

**Esempio 1.14.5.** Sia  $F(z) = z_{00} + z_{10} - z_{01}$ : si osserva facilmente che

$$s_{1,1}^{-1}(V(F)) = \{x_0y_0 + x_1y_0 - x_0y_1 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

In particolare, sarà  $s_{1,1}^{-1}(V(F)) = V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(H)$ , dove  $H$  è un polinomio biomogeneo di bigrado  $(1, 1)$  (di cosa stiamo parlando? Lo definiamo tra un attimo). Questo in realtà succede per qualunque scelta di  $F$  tra i polinomi omogenei in quattro variabili: se  $F$  ha grado  $d$ ,  $H$  avrà bigrado  $(d, d)$ .

**Definizione 1.14.6.** Diciamo che  $H(x_0, x_1; y_0, y_1) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}; \mathbf{y}]$  è un polinomio *biomogeneo* di bigrado  $(a, b)$  se  $H$  è omogeneo di grado  $a$  fissato  $\mathbf{y} \in \mathbb{A}^2$ , e omogeneo di grado  $b$  fissato  $\mathbf{x} \in \mathbb{A}^2$ .

*Osservazione 1.14.7.* Osserviamo che,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$ , si ha  $H(\lambda\mathbf{x}; \mu\mathbf{y}) = \lambda^a \mu^b H(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  (applicare la omogeneità rispetto a  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ). Questo ci permette di dare una buona definizione degli zeri di  $H$  in  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , similmente al caso degli zeri di polinomi omogenei in  $\mathbb{P}^1$ .

Possiamo quindi definire i chiusi di  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  tramite gli insiemi della forma  $V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(H)$  al variare di  $H$  tra i polinomi biomogenei di bigrado  $(d, d)$ , e di  $d \geq 0$ . In questo modo ci siamo “liberati” della mappa di Segre dalle definizioni.

**Esempio 1.14.8.** Consideriamo l'insieme  $\{x_1 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ : è definito da un polinomio biomogeneo di bigrado  $(1, 0)$ . Ci chiediamo se sia un chiuso; la risposta è affermativa: basta scriverlo come

$$\{x_1 = 0\} = \{x_1y_0 = 0\} \cap \{x_1y_1 = 0\}.$$

Infatti non si può avere contemporaneamente  $y_0 = 0$  e  $y_1 = 0$ .

*Osservazione 1.14.9.* Il trucco precedente si può applicare in generale: se  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  è biomogeneo di bigrado  $(a, b)$ , con  $a < b$ , allora vale in generale

$$V_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(G(x, y)) = V(x_0^{b-a}G) \cap V(x_1^{b-a}G),$$

dunque è ancora un chiuso. Questo ci consente di definire i chiusi di  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  a partire da tutti i polinomi biomogenei, non solo quelli con bigrado  $(d, d)$ .

Si verifica facilmente<sup>25</sup> che questa topologia è (strettamente) più fine della topologia prodotto su  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

## Funzioni regolari su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Per vedere le funzioni regolari su  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , dobbiamo prendere le funzioni regolari su  $\Sigma_{1,1}$  e spostarle su  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  tramite  $s_{1,1}$ .

Basta studiarle localmente: una funzione regolare su un aperto di  $\Sigma_{1,1}$  sarà localmente della forma  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K} \mid \varphi = \frac{A}{B}$ , dove  $U$  è un aperto (opportunosamente piccolo) di  $\Sigma_{1,1}$ ,  $A$  e  $B$  sono polinomi omogenei dello stesso grado  $d$  (in quattro variabili) e  $V(B) \cap U = \emptyset$ .

<sup>25</sup>Mi è sembrato di capire che, fondamentalmente, i chiusi che arrivano dalla topologia prodotto sono dati da polinomi biomogenei in cui uno dei due gradi è zero.

Spostandoci su  $V = s_{1,1}^{-1}(U) \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , ricaviamo

$$\psi = \varphi \circ s_{1,1} : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \psi = \frac{A(x_i y_j)}{B(x_i y_j)} = \frac{H(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{F(\mathbf{x}; \mathbf{y})},$$

dove  $H, F$  sono polinomi biomogenei di bigrado  $(d, d)$ , e  $V(F) \cap V = \emptyset$ .

Possiamo applicare il trucco precedente anche a questo caso: se  $A, B$  sono due polinomi biomogenei di bigrado  $(a, b)$  con  $a < b$ , e  $V \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  è un aperto, definiamo  $U_i = V \cap \{x_i \neq 0\}$  per  $i = 0, 1$  e

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{x_0^{b-a} A(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{x_0^{b-a} B(\mathbf{x}; \mathbf{y})} && \text{su } U_0, \\ \psi(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \frac{x_1^{b-a} A(\mathbf{x}; \mathbf{y})}{x_1^{b-a} B(\mathbf{x}; \mathbf{y})} && \text{su } U_1. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\psi$  è ben definita (sull'intersezione coincide), e in entrambe le carte è quoziente di due polinomi biomogenei con bigrado  $(b, b)$ , quindi è regolare. In pratica, abbiamo appena verificato che le funzioni regolari su  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  si possono definire tramite qualunque rapporto di polinomi biomogenei (non solo con bigrado  $(d, d)$ ).

### $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ come varietà

Tutto si estende facilmente al caso di  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ , tramite le seguenti definizioni:

**Definizione 1.14.10.** Definiamo per  $n, m \geq 0$  la *mappa di Segre*

$$s_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m} \sim \mathbb{P}(\mathbb{A}^{(n+1) \times (m+1)}) \quad \mid \quad ([x_i]_{0 \leq i \leq n}, [y_j]_{0 \leq j \leq m}) \mapsto (x_i y_j)_{i,j}$$

Anche in questo caso la mappa di Segre è ben definita, e la sua immagine è contenuta nella *varietà di Segre*  $\Sigma_{n,m} = \{Z = (z_{ij}) \in \mathbb{P}^{nm+n+m} \mid \text{Rk}(Z) \leq 1\}$ .

Come ci aspettiamo, definiamo  $p_1 : \Sigma_{n,m} \rightarrow \mathbb{P}^n$  (risp.  $p_2 : \Sigma_{n,m} \rightarrow \mathbb{P}^m$ ) come il morfismo dato dalle colonne (risp. dato dalle righe), e come prima si verifica che  $p_1 \times p_2$  e  $s_{n,m}$  sono l'una l'inversa dell'altra. A questo punto è immediato verificare il seguente:

**Proposizione 1.14.11.**  $(\Sigma_{n,m}, p_1, p_2)$  è il prodotto  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ .

Analogamente a prima, i chiusi di  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  saranno intersezione arbitraria di insiemi della forma  $V(H)$ , al variare di  $H$  tra i polinomi biomogenei di bigrado arbitrario; questa topologia è chiaramente più fine di quella prodotto.

Infine, anche la caratterizzazione delle funzioni regolari è del tutto analoga.

### 1.14.2 Caso generale

Possiamo finalmente costruire il prodotto di varietà quasi-proiettive qualsiasi. Se  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{P}^m$  sono due varietà quasi-proiettive, possiamo scrivere  $X = U \cap Z$  e  $Y = V \cap W$ , dove  $U$  (risp.  $V$ ) è un aperto di  $\mathbb{P}^n$  (risp. di  $\mathbb{P}^m$ ) e  $Z$  (risp.  $W$ ) è un chiuso di  $\mathbb{P}^n$  (risp. di  $\mathbb{P}^m$ ). Consideriamo il prodotto insiemistico  $X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ : si ha banalmente  $X \times Y = (U \times V) \cap (Z \times W)$ . Possiamo dire che  $U \times V$  è un aperto e  $Z \times W$  è un chiuso di  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ , nella topologia di prodotto di varietà: infatti questa è più fine della topologia prodotto (insiemistica). Ne deduciamo che  $X \times Y$  è una varietà quasi-proiettiva.

**Proposizione 1.14.12.** Siano  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{P}^m$  due varietà quasi-proiettive. Allora  $(X \times Y, p_1|_{X \times Y}, p_2|_{X \times Y})$  è la varietà prodotto di  $X$  e  $Y$ .

*Osservazione 1.14.13.* Si verifica facilmente che, se  $X, Y$  sono varietà proiettive (risp. affini), allora anche  $X \times Y$  lo è.

**Esercizio 1.14.14.** Dimostrare che  $X, Y$  affini implica  $X \times Y$  affine senza utilizzare la proprietà universale del prodotto.

**Proposizione 1.14.15.** Sia  $X$  una varietà quasi-proiettiva, sia  $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$  la sua *diagonale*. Allora  $\Delta_X$  è un chiuso.

*Dimostrazione.* È sufficiente dimostrarlo per  $X = \mathbb{P}^n$ : infatti se  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  si ha  $\Delta_X = (X \times X) \cap \Delta_{\mathbb{P}^n}$ , e abbiamo già verificato che  $X \times X$  è un chiuso.

Sia dunque  $\Delta_{\mathbb{P}^n} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ : può essere scritto anche come

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{P}^n} &= \{([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \mid [\mathbf{x}] = [\mathbf{y}]\} = \\ &= \{([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \mid \text{Rk}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Si tratta quindi di un chiuso (è determinato dalle condizioni sui determinanti). □

Ricordiamo che in Geometria 2 avevamo visto che uno spazio topologico è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nella topologia prodotto. Non siamo davvero in questo caso, dato che la topologia considerata su  $X \times X$  non è quella prodotto solita, ma possiamo sfruttare questo risultato sulla diagonale per dimostrare alcuni risultati, che in genere si basano sul fatto che una topologia sia T2.

**Proposizione 1.14.16.** Siano  $X, Y$  due varietà quasi-proiettive, siano  $f, g : X \rightarrow Y$  due morfismi: allora  $Z = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  è un chiuso di  $X$ .

*Dimostrazione.* La mappa  $f \times g : X \rightarrow Y \times Y$  è un morfismo<sup>26</sup>, dunque  $Z = (f \times g)^{-1}(\Delta_Y)$  è necessariamente un chiuso (i morfismi sono continui). □

**Corollario 1.14.17.** Se  $f = g$  su un denso, allora  $f = g$  su tutto  $X$ .

**Esempio 1.14.18.** Siano  $X, Y$  due varietà quasi-proiettive, sia  $y_0 \in Y$ , sia  $i_{y_0} : X \rightarrow X \times Y \mid x \mapsto (x, y_0)$ : questa mappa è un morfismo perché può essere scritta come prodotto di morfismi ( $i_{y_0} = \text{Id}_X \times \text{cost}_{y_0}$ ). Inoltre, si verifica facilmente che  $i_{y_0}$  è un isomorfismo con la sua immagine, e che la sua inversa è  $p_1|_{X \times \{y_0\}}$ , che è un morfismo.

**Esercizio 1.14.19.** Siano  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  varietà quasi-proiettive, siano  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  e  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  due morfismi. Sia  $(f, g) : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 \mid (x_1, x_2) \mapsto (f(x_1), g(x_2))$ : allora  $(f, g)$  è un morfismo.

*Hint.* Applicare la proprietà universale su opportune mappe.

## 1.15 Lezione 15 (20 Nov 2015)

**Proposizione 1.15.1.** Siano  $X, Y$  due varietà quasi-proiettive irriducibili. Allora anche  $X \times Y$  è irriducibile.

<sup>26</sup>Convincersene, ad esempio applicando la proprietà universale del prodotto.

*Dimostrazione.* Sia  $X \times Y = Z \cup W$ , dove  $Z, W$  sono due chiusi di  $X \times Y$ : vogliamo mostrare che quest'unione deve necessariamente essere banale.

Siano  $X_1 = \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subseteq Z\}$  e  $X_2 = \{x \in X \mid \{x\} \times Y \subseteq W\}$ . Osserviamo che  $\forall x \in X$  si ha

$$\{x\} \times Y = ((\{x\} \times Y) \cap Z) \cup ((\{x\} \times Y) \cap W) = Z_x \cup Y_x :$$

dato che  $\{x\} \times Y \cong Y$  che è irriducibile, e  $Z_x, Y_x$  sono due chiusi, si deve avere  $\{x\} \times Y \subseteq Z$  (cioè  $x \in X_1$ ) oppure  $\{x\} \times Y \subseteq W$  (cioè  $x \in X_2$ ). Abbiamo appena mostrato che  $X = X_1 \cup X_2$ .

Vogliamo quindi verificare che  $X_1$  e  $X_2$  sono due chiusi: in questo modo possiamo concludere, in quanto (per irriducibilità di  $X$ ) si avrà wlog  $X_1 = X$  da cui  $Z = X \times Y$ . Sia  $p : X \times Y \rightarrow X$  la proiezione: osserviamo in particolare che  $p|_{X \times \{y\}}$  è un isomorfismo per ogni scelta di  $y \in Y$ . Osserviamo che vale  $x \in X_1$  se e solo se  $\forall y \in Y (x, y) \in Z$ , se e solo se  $\forall y \in Y x \in p((X \times \{y\}) \cap Z)$ , da cui  $X_1 = \bigcap_{y \in Y} p((X \times \{y\}) \cap Z)$ . I singoli  $p((X \times \{y\}) \cap Z)$  sono chiusi, in quanto  $X \times \{y\}$  e  $Z$  lo sono (e  $p|_{X \times \{y\}}$  è un isomorfismo).  $\square$

### 1.15.1 Associatività nelle cubiche lisce

Torniamo a parlare dell'operazione di gruppo che avevamo definito sulle cubiche lisce nella Lezione 6. Sia dunque  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$  una cubica liscia e  $\mu : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  la sua legge di gruppo. Osserviamo che  $\mu$  è associativa se e solo se il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{(\mu, \text{Id})} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ (\text{Id}, \mu) \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{C} \end{array}$$

**Proposizione 1.15.2.**  $\mu : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  è un morfismo.

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $\mu(A, B) = R(O, R(A, B))$ , dove  $R : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  associa a due punti su  $\mathcal{C}$  il terzo punto della retta associata (nel caso  $A = B$ , si prende la tangente). Dunque è sufficiente verificare che  $R$  è un morfismo. Mettiamo  $\mathcal{C}$  in forma di Weierstrass: otteniamo la parte affine  $\mathcal{C}_0 : y^2 = x^3 + ax + b$  e un flesso all'infinito  $P_0$ .

Siano  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  in  $\mathcal{C}_0$ , e ricaviamone  $(x_3, y_3) = R(A, B)$ . In particolare  $A, B \in \mathcal{C}_0$ , da cui

$$\begin{cases} y_1^2 = x_1^3 + ax_1 + b \\ y_2^2 = x_2^3 + ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a). \quad (1.3)$$

- Sia  $X_1 = \{x_1 \neq x_2\}$  (è un aperto di  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ). Se  $(A, B) \in X_1$ , allora  $L(A, B) : y = y_1 + \lambda(x - x_2)$ , dove  $\lambda(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  è il coefficiente angolare della retta, ed è una funzione regolare in  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Sostituendo nell'equazione di  $\mathcal{C}_0$ , otteniamo l'equazione  $x^3 - \lambda^2 x^2 + \dots = 0$  (ci interessa solo il termine di grado 2). Osserviamo che  $\lambda^2 = x_1 + x_2 + x_3$ , da cui  $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$  e  $y_3 = x_3^3 + ax_3 + b$ . In particolare  $R$  è un morfismo su  $X_1$ .
- Sia  $X_2 = \{y_1 + y_2 \neq 0\}$  (aperto di  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ). Se  $(A, B) \in X_1 \cap X_2$ , ci aspettiamo da (1.3) che valga

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a}{y_1 + y_2},$$

per cui possiamo definire  $\lambda = \frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + a}{y_1 + y_2}$ , e quindi ricavare  $x_3, y_3$  con la stessa formula. Bisogna verificare che questa scelta effettivamente sia compatibile con la definizione di  $R$

su  $X_2 \setminus X_1$ , ma per  $x_1 = x_2$  si ha  $y_1 = y_2 \neq 0$ , dunque  $A = B$  e  $\lambda = \frac{3x_1^2+a}{2y_1}$  corrisponde al coefficiente angolare della tangente a  $\mathcal{C}$  in  $A$  (crediamoci). Quindi  $R$  è un morfismo anche su  $X_2$ .

- Incollando  $X_1$  e  $X_2$ , mostriamo che  $R$  è un morfismo su  $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \setminus \{(A, B) \mid P_0 \in L(A, B)\}$  (si può verificare che l'unico caso problematico, cioè  $y_1 + y_2 = x_1 - x_2 = 0$ , porta ad avere  $R(A, B) = P_0$ ). Scegliendo ogni volta un flesso diverso (ne abbiamo 9) al posto di  $P_0$ , otteniamo un ricoprimento aperto di  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$ , su ciascuno dei quali  $R$  è un morfismo.  $\square$

A questo punto facciamo le seguenti osservazioni:

1.  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  è irriducibile (le curve lisce sono irriducibili, e abbiamo mostrato che il prodotto di irriducibili lo è ancora);
2. Il diagramma commuta su un aperto non vuoto di  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  (si pensi alle condizioni che avevamo imposto quando abbiamo dimostrato l'associatività "quasi ovunque");
3. Tutte le mappe del diagramma precedente sono morfismi.

Mettendo assieme queste osservazioni, deduciamo che il diagramma commuta<sup>27</sup>.

### 1.15.2 Gruppi algebrici

**Definizione 1.15.3.**  $G$  è un *gruppo algebrico* se ha struttura di varietà, struttura di gruppo e le operazioni di moltiplicazione e di inversione sono morfismi.

Elenchiamo diversi esempi di gruppi algebrici:

- (1) Una cubica piana liscia è un gruppo algebrico (ricordare come si ricava l'inversa tramite  $\mu$ ).
- (2) Il *gruppo additivo*  $\mathbb{G}_a := (\mathbb{K}, +)$ .
- (3) Il *gruppo moltiplicativo*  $\mathbb{G}_m := (\mathbb{K}^*, \cdot)$ .
- (4) Se  $G_1$  e  $G_2$  sono gruppi algebrici, allora anche  $G_1 \times G_2$  è un gruppo algebrico (esercizio); ad esempio le somme finite di gruppi moltiplicativi  $G_m \oplus \dots \oplus G_m$  sono dette *tori*.
- (5) Il gruppo lineare  $\mathrm{GL}(n)$  è un gruppo algebrico.
  - È un aperto principale di  $\mathbb{A}^{n^2}$ , dato che si richiede che il determinante (che è un polinomio omogeneo) non si annulli.
  - Dato che  $\mathrm{GL}(n)$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{A}^{n^2}$ , per testare se una mappa a valori in  $\mathrm{GL}(n)$  sia un morfismo, è sufficiente verificare se componente per componente si tratta di una funzione regolare. Questo è ovviamente rispettato dalla moltiplicazione, ma anche dall'inversione (si ricordi la formula ottenuta tramite l'aggiunto).

Quali sono le funzioni regolari di  $\mathrm{GL}(n)$ ? Sono  $\mathbb{K}[\mathrm{GL}(n)] = \mathbb{K}[a_{ij}]_D$ , dove  $D = \det(a_{ij})$  (aperto principale).

Analogamente, saranno gruppi algebrici anche i sottogruppi  $\mathrm{SL}(n)$ , quello delle matrici diagonali, quello delle matrici triangolari inferiori (risp. superiori), e altri analoghi. Questi sono noti come *gruppi parabolici*.

<sup>27</sup>Gli aperti non vuoti negli irriducibili sono densi, e da  $\mu \circ (\mu, \mathrm{Id}) = \mu \circ (\mathrm{Id}, \mu)$  su quell'aperto possiamo passare alla chiusura, grazie al Corollario 1.14.17.

(6) Il gruppo lineare proiettivo  $\mathbb{PGL}(n+1) = \mathbb{P}^{(n+1)^2-1} \setminus \{\det = 0\}$ . Osserviamo che questa definizione ha senso, in quanto il determinante è un polinomio omogeneo nei coefficienti della matrice.

- $\mathbb{PGL}(n+1)$  è ancora un aperto principale di  $\mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$ , in particolare è una varietà affine.
- Per verificare che la moltiplicazione è un morfismo, basta verificare che i coefficienti di  $AB$  siano polinomi biomogenei nei coefficienti di  $A$  e  $B$ <sup>28</sup>. Questo è ovviamente verificato.
- Per verificare che l'inversione è un morfismo, osserviamo che  $[A] = [A^\dagger]$  (l'aggiunto), e i coefficienti di  $A^\dagger$  sono polinomi omogenei nei coefficienti di  $A$ .

**Definizione 1.15.4.** Siano  $X$  una varietà quasi-proiettiva e  $G$  un gruppo algebrico. Chiameremo *azione* di  $G$  su  $X$  qualunque azione (di gruppo su un insieme)  $G \times X \rightarrow X \mid (g, x) \mapsto gx$  che sia anche un morfismo. In tal caso diremo che  $G$  *agisce* su  $X$ .

**Esempio 1.15.5.** Ogni gruppo algebrico agisce su sé stesso tramite moltiplicazione a sinistra.

**Esempio 1.15.6.**  $GL(n)$  (e i sottogruppi parabolici) agiscono su  $\mathbb{K}^n$ , tramite moltiplicazione matrice-vettore, che è un morfismo (è polinomiale coefficiente per coefficiente). Analogamente  $\mathbb{PGL}(n)$  agisce su  $\mathbb{P}^n$  (funziona ancora tutto, perché le componenti di  $Av$  sono polinomi biomogenei di bigrado  $(1, 1)$  nei coefficienti di  $A$  e  $v$ ).

**Esercizio 1.15.7.** Lo *stabilizzatore* di un punto (cioè  $\text{St}(P) = \{g \in G \mid gP = P\}$ ) è un chiuso.

**Esempio 1.15.8.** Consideriamo l'azione di  $\mathbb{G}_m$  su  $\mathbb{A}^2$ :  $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ . Quali sono le orbite? Il singoletto  $\{0\}$  e tutte le rette passanti per lo zero. Osserviamo che le orbite non sono chiuse (a parte  $\{0\}$  e che lo zero è contenuto nella chiusura di queste.

Consideriamo ora l'azione di  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$  su  $\mathbb{A}^2$ :  $(\lambda, \mu) \cdot (x, y) = (\lambda x, \mu y)$ . Le orbite in questo caso sono:

- $\mathbb{A}^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$ ,
- $\{x=0\} \setminus \{(0,0)\}$ ,
- $\{y=0\} \setminus \{(0,0)\}$ ,
- $\{(0,0)\}$ .

Si possono fare considerazioni analoghe sulle chiusure delle orbite.

### 1.15.3 Varietà proiettive

Anticipiamo un teorema che dimostreremo alla prossima lezione:

**Teorema 1.15.9.** Sia  $X$  una varietà proiettiva<sup>29</sup>: allora  $\forall Y$  varietà quasi-proiettiva la proiezione  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  è una mappa chiusa.

Una  $X$  con questa proprietà si dice *universalmente chiusa*.

<sup>28</sup>Si può giustificare in diversi modi, per esempio osservando che polinomi biomogenei con lo stesso bigrado in  $X \times Y$  corrispondono a polinomi omogenei con lo stesso grado nella varietà di Segre.

<sup>29</sup>Senza "quasi-".

*Osservazione 1.15.10.* Si verifica che negli spazi T2 tutti i compatti sono universalmente chiusi. Questo teorema quindi restituirà alle varietà proiettive alcune proprietà proprie delle varietà compatte.

Presentiamo due corollari:

**Corollario 1.15.11.** Sia  $X$  varietà proiettiva,  $Y$  una varietà quasi-proiettiva e  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo: allora  $f$  è una mappa chiusa.

*Dimostrazione.* Osserviamo che basta dimostrare che  $f(X)$  è chiuso (se  $W \subseteq X$  è un chiuso, applichiamo il risultato alla restrizione  $f|_{\text{vert}_W} : W \rightarrow Y$ , che è ancora un morfismo).

Sia  $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$  il grafico di  $f$ , sia inoltre

$$F = (f, \text{Id}_Y) : X \times Y \rightarrow Y \times Y \quad | \quad (x, y) \mapsto (f(x), y) :$$

chiaramente  $F$  è un morfismo (Esercizio 1.14.19) e  $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$  sarà chiuso. Infine,  $f(X) = p_2(\Gamma_f)$ , quindi possiamo applicare il Teorema 1.15.9.  $\square$

**Corollario 1.15.12.** Sia  $X$  una varietà proiettiva e connessa: allora le funzioni regolari su  $X$  sono costanti.

*Dimostrazione.* Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  una funzione regolare, sia  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  definita componendo  $f$  con l'immersione  $\mathbb{K} \cong U_0 \subseteq \mathbb{P}^1$ : si tratta ancora di un morfismo, quindi  $\tilde{f}(X)$  è necessariamente un chiuso proprio e connesso di  $\mathbb{P}^1$ , cioè un singoletto  $\{\text{pt}\}$ . Concludiamo osservando che  $\tilde{f}(X) \cong f(X)$ .  $\square$

Concludiamo la lezione con una prima bozza della dimostrazione del teorema.

*Dimostrazione del Teorema 1.15.9 (prima parte).*

- (1) Mostriamo che possiamo supporre  $Y$  affine. Infatti  $Y = \bigcup V_i$  unione di aperti affini (vedi Corollario 1.10.11). Indichiamo con  $p_i : X \times V_i \rightarrow V_i$  la proiezione, prendiamo  $Z \subseteq X \times Y$  chiuso e poniamo  $Z_i = Z \cap (X \times V_i)$ . Osserviamo che  $p(Z)$  è chiuso se e solo se  $\forall i$   $p(Z) \cap V_i = p_i(Z_i)$  è chiuso, dunque è sufficiente dimostrare l'enunciato per gli  $Y_i$ .
- (2) Mostriamo che possiamo supporre  $Y = \mathbb{A}^m$ . Infatti, se  $Y$  è un chiuso di  $\mathbb{A}^m$  e  $Z$  è un chiuso di  $X \times Y$ , a maggior ragione  $Z$  sarà chiuso in  $X \times \mathbb{A}^m$ . Se l'enunciato è soddisfatto per  $\mathbb{A}^m$ , allora  $p(Z) \subseteq Y$  è chiuso in  $\mathbb{A}^m$ , e quindi anche in  $Y$ .
- (3) Mostriamo che possiamo supporre  $X = \mathbb{P}^n$ . Infatti, se  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  è un chiuso e  $Z$  è un chiuso in  $X \times \mathbb{A}^m$ , allora  $Z$  sarà chiuso anche in  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ , e possiamo applicare lo stesso ragionamento di sopra.  $\square$

*Osservazione 1.15.13.* I ragionamenti precedenti ci ricordano una differenza importante tra varietà proiettive e affini: mentre le varietà proiettive sono chiuse in ogni spazio che le contenga, questo non è in generale vero per le varietà affini.

## 1.16 Lezione 16 (25 Nov 2015)

*Dimostrazione del Teorema 1.15.9 (seconda parte).* Ci siamo ridotti al caso  $X = \mathbb{P}^n$ ,  $Y = \mathbb{A}^m$ . Siano  $\mathbf{x} = x_0, \dots, x_n$  (risp.  $\mathbf{y} = y_1, \dots, y_m$ ) coordinate omogenee (risp. affini) su  $X$  (risp.  $Y$ ). Sia  $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$  un chiuso: vogliamo mostrare che anche  $p(Z) \subseteq \mathbb{A}^m$  è un chiuso. Consideriamo l'immersione  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ : i chiusi di  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  sono intersezioni finite di luoghi di zeri di

polinomi omogenei (in  $x_0, \dots, x_n$  e  $y_0, \dots, y_m$ ), quindi la loro restrizione alla topologia indotta su  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$  è ottenuta deomogeneizzando rispetto a  $y_0$ . Ne deduciamo che  $Z$  è chiuso se e solo se  $Z = \bigcup_{i=1}^r V(f_i(\mathbf{x}; \mathbf{y}))$ , dove gli  $f_i$  sono omogenei in  $\mathbf{x}$ .

Fissiamo  $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{A}^m$ : osserviamo che  $p^{-1}(\bar{\mathbf{y}}) \cap Z = \bigcap V_{\mathbb{P}^n}(f_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})) \times \{\bar{\mathbf{y}}\} \cong \bigcap V_{\mathbb{P}^n}(f_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}))$ , dunque possiamo scrivere

$$p(Z) = \left\{ \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{A}^m \mid \bigcap_{i=1}^r V_{\mathbb{P}^n}(f_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})) \neq \emptyset \right\} = \{ \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{A}^m \mid V_{\mathbb{P}^n}(I_{\bar{\mathbf{y}}}) \neq \emptyset \},$$

dove  $I_{\bar{\mathbf{y}}} = (f_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}), \dots, f_r(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})) \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$  è un ideale omogeneo.

Ricordiamo che (per il Nullstellensatz proiettivo)  $V(I_{\bar{\mathbf{y}}}) = \emptyset$  se e solo se  $\sqrt{I_{\bar{\mathbf{y}}}} \supseteq (x_0, \dots, x_n)$  se e solo se  $\exists N : \forall i \ x_i^N \in I_{\bar{\mathbf{y}}}$  se e solo se  $\exists M : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_M \subseteq I_{\bar{\mathbf{y}}}$  se e solo se  $\exists M : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_M \subseteq (I_{\bar{\mathbf{y}}})_M$  (dove per  $(I_{\bar{\mathbf{y}}})_M$  si intende la parte omogenea di grado  $M$  dell'ideale). Il contenimento opposto è ovvio, quindi

$$\mathbb{A}^m \setminus p(Z) = \bigcup_{M \geq 0} \left\{ \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{A}^m \mid \mathbb{K}[\mathbf{x}]_M = (I_{\bar{\mathbf{y}}})_M \right\}.$$

Fissato  $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{A}^m$ , osserviamo che sia  $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M$  sia  $(I_{\bar{\mathbf{y}}})_M$  sono spazi vettoriali di dimensione finita. Una base di  $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M$  è data dai monomi di grado  $M$  in  $\mathbf{x}$ , mentre una base di  $(I_{\bar{\mathbf{y}}})_M$  è data dai polinomi della forma  $\mathbf{x}^J f_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})$ , al variare di  $J$  tra i multiindici tali che  $\deg(f_i) + |J| = M$  (se questo non è possibile, si esclude tale  $f_i$ ). Sia dunque  $A(\bar{\mathbf{y}})$  la matrice le cui righe sono le coordinate dei polinomi  $\mathbf{x}^J f_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})$  rispetto alla base dei monomi di  $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M$ : osserviamo che si ha  $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_M = (I_{\bar{\mathbf{y}}})_M$  se e solo se  $A(\bar{\mathbf{y}})$  ha rango massimo  $\rho_M$  (dove  $\rho_M = \binom{M+n}{n}$ ). Questo è equivalente a chiedere che ci sia un minore di  $A(\bar{\mathbf{y}})$  di ordine  $\rho_M$  non nullo<sup>30</sup>. Facendo variare  $\mathbf{y} \in \mathbb{A}^m$ , otteniamo la matrice  $A(\mathbf{y})$ , i cui coefficienti sono polinomi nella variabile  $\mathbf{y}$ , quindi chiedere che almeno uno dei suoi minori sia non nullo è unione di condizioni della forma  $q(\mathbf{y}) \neq 0$ , e dà luogo ad un aperto  $U_M \subseteq \mathbb{A}^m$ .

Possiamo finalmente concludere che  $\mathbb{A}^m \setminus p(Z) = \bigcup_{M \geq 0} U_M$  è un aperto, quindi  $p(Z)$  è un chiuso di  $\mathbb{A}^m$ .  $\square$

### 1.16.1 Applicazioni

Fissiamo  $n \geq 2$  e  $d \geq 1$ : vogliamo studiare le ipersuperfici di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^n$ , cioè  $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d)$ . Definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} U_{\text{red}} &= \{[h] \mid h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, [h] \text{ ridotta}\}; \\ U_{\text{irr}} &= \{[h] \mid h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, [h] \text{ irriducibile}\}; \\ U_{\text{sm}} &= \{[h] \mid h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, [h] \text{ liscia}\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che in generale vale  $U_{\text{sm}} \subseteq U_{\text{irr}} \subseteq U_{\text{red}}$ .

Il nostro scopo è dimostrare che questi tre insiemi sono aperti non vuoti di  $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d) = \mathbb{P}^N$ , in particolare sono insiemi densi (aperti non vuoti in un irriducibile).

1. Consideriamo  $a, b \geq 1$  interi tali che  $2a + b = d$ , e definiamo la mappa

$$q_{a,b} : \mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_a) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_b) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_d) \mid ([f], [g]) \mapsto [f^2g].$$

<sup>30</sup>Qui per "minore" si intende il determinante della sottomatrice; alcuni autori intendono invece la sottomatrice stessa.

Questo è un morfismo perché i coefficienti di  $f^2g$  sono biomogenei di bigrado  $(2, 1)$  (nei coefficienti di  $f$  e  $g$ ). Osserviamo che

$$\bigcup_{2a+b=d} \text{Im}(q_{a,b}) = \{[h] \mid h \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d, h \text{ ha un fattore multiplo}\} = (U_{\text{red}})^C,$$

che per il Teorema 1.15.9 è un chiuso; in particolare  $U_{\text{red}}$  è un aperto.

Resta da mostrare che  $U_{\text{red}}$  non è vuoto: esibiamo un esempio. Sia  $h(\mathbf{x}) = x_0x_1^{d-1} + x_2 \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_d$ : questo polinomio è irriducibile perché, deomogeneizzando rispetto a  $x_1$ , si ottiene  $y + x^d$  che è irriducibile perché di primo grado rispetto alla  $y$ .

2. Facendo lo stesso gioco del punto precedente con  $a + b = d$  e  $q_{a,b} : ([f], [g]) \mapsto [fg]$ , otteniamo che  $U_{\text{irr}}$  è un aperto. L'esempio precedente ovviamente funziona anche in questo caso.

3. Definiamo l'insieme  $I \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$ :

$$I = \{(P, [h]) \mid h \text{ singolare in } P\} = \left\{ (P, [h]) \mid h(P) = 0, \forall i \frac{\partial h}{\partial x_i}(P) = 0 \right\}.$$

Osserviamo che le condizioni che definiscono  $I$  sono date da polinomi biomogenei di bigrado  $(d, 1)$  e  $(d - 1, 1)$  (rispettivamente nelle coordinate di  $P$  e nei coefficienti di  $h$ ), quindi

$$p_2(I) = \{[h] \mid \exists P \text{ punto singolare per } h\} = (U_{\text{sm}})^C$$

è un chiuso di  $\mathbb{P}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_d)$  per il Teorema 1.15.9; in particolare  $U_{\text{sm}}$  è aperto.

Presentiamo un esempio in  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  (ma in realtà il risultato vale in generale in  $\text{char } \mathbb{K} = p$ ) per mostrare che  $U_{\text{sm}}$  non è vuoto. Consideriamo  $h(\mathbf{x}) = x_0^d + \dots + x_n^d$ : si verifica facilmente che non possiede punti singolari.

## 1.16.2 Scoppiamento (o blowup)

Consideriamo il morfismo  $p : \mathbb{A}^2 \rightarrow \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid (x, y) \mapsto [x, y]$ : ci chiediamo se si possa estendere ad un morfismo  $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . La risposta è negativa: supponiamo per assurdo che esista una tale  $\tilde{p} : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , e  $\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  definiamo il morfismo

$$\lambda_{a,b} : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \lambda_{a,b}(t) = \tilde{p}(ta, tb).$$

Dato che  $\tilde{p} = p$  su  $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , in particolare  $\lambda_{a,b} \equiv [a, b]$  su  $\mathbb{A} \setminus \{0\}$ , e di conseguenza  $\lambda_{a,b} \equiv [a, b]$  su  $\mathbb{A}$  (due morfismi che coincidono su un denso). Questo implicherebbe che  $\tilde{p}(0, 0)$  dipenda da  $a, b$ , che è assurdo.

Idea (che poi sarà il blowup): togliere lo 0 da  $\mathbb{A}^2$  e rimpiazzarlo con l'insieme di tutte le direzioni del piano, in modo da poter estendere  $p$ .

**Definizione 1.16.1.** Sia  $\Gamma = \{(a, b; [a, b]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid (a, b) \neq 0\}$  il grafico di  $p$  (immerso in  $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ ). Definiamo lo *scoppiamento* (o *blowup*) di  $\mathbb{A}^2$  come  $\widehat{\mathbb{A}^2} = \overline{\Gamma}$ .

**Proposizione 1.16.2.** Lo scoppiamento  $\widehat{\mathbb{A}^2}$  è  $Z = \{(x, y; [z_0, z_1]) \mid xz_1 - yz_0 = 0\}$ . Più precisamente,  $\widehat{\mathbb{A}^2} = \Gamma \cup E$ , dove  $E = \{(0, 0)\} \times \mathbb{P}^1$  è detta *curva eccezionale*.

*Dimostrazione.* Si osserva immediatamente che  $Z$  è un chiuso e  $\Gamma \subseteq Z$ , da cui  $\bar{\Gamma} \subseteq Z$ . Consideriamo la proiezione  $\varepsilon : Z \rightarrow \mathbb{A}^2$ : si verifica che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{A}^2 \quad \varepsilon^{-1}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y; [x, y])\} & \text{se } (x, y) \neq 0, \\ \{(0, 0)\} \times \mathbb{P}^1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In particolare si può notare che  $Z = \Gamma \cup E$ .

Per concludere basta verificare che  $E \subseteq \bar{\Gamma}$ . Sia  $(a, b) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ : vogliamo mostrare che  $(0, 0; [a, b]) \in \bar{\Gamma}$ . Sia  $\hat{\lambda}_{a,b} : \langle (a, b) \rangle_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \hat{\lambda}_{a,b} \equiv [a, b]$ , sia  $\lambda_{a,b} = \hat{\lambda}_{a,b}|_{\langle (a,b) \rangle_{\mathbb{K}^*}}$  la sua restrizione alla retta bucata. Si osserva che il grafico di  $\hat{\lambda}_{a,b}$  è la chiusura del grafico di  $\lambda_{a,b}$ , che a sua volta è contenuto in  $\Gamma$ ; in particolare  $(0, 0; [a, b]) \in \bar{\Gamma}$ .  $\square$

*Osservazione 1.16.3.* Il blowup  $\hat{\mathbb{A}}^2$  è irriducibile: infatti  $\hat{\mathbb{A}}^2 = \bar{\Gamma}$ ,  $\Gamma \cong \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$  è irriducibile perché aperto nell'irriducibile  $\mathbb{A}^2$ .

*Osservazione 1.16.4.* Abbiamo già visto il morfismo  $\varepsilon : \hat{\mathbb{A}}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  che proietta nelle prime coordinate; si osserva che induce un isomorfismo  $\varepsilon|_{\hat{\mathbb{A}}^2 \setminus E} \rightarrow \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ . Analogamente possiamo definire il morfismo  $q : \hat{\mathbb{A}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  che proietta nelle seconde coordinate. Si osserva che, laddove ha senso,  $p \circ \varepsilon = q$ , quindi  $q$  è il morfismo “estensione” cercato.

La filosofia dietro al blowup è dunque la seguente: estendere le varietà per poterci estendere i morfismi.

Osserviamo che possiamo ricoprire il blowup  $\hat{\mathbb{A}}^2$  tramite due carte  $U_0 = \{z_0 \neq 0\} \cap \hat{\mathbb{A}}^2$  e  $U_1 = \{z_1 \neq 0\} \cap \hat{\mathbb{A}}^2$ . Su  $U_0$  possiamo dare la parametrizzazione affine  $z = \frac{z_1}{z_0}$ , da cui  $U_0 \cong \{(x, xz, z) \in \mathbb{A}^3\} \cong \mathbb{A}^2$  (con coordinate  $x, z$ ). Analogamente, su  $U_1$  poniamo  $w = \frac{z_0}{z_1}$  e si avrà  $U_1 \cong \{(yw, y, w) \in \mathbb{A}^3\} \cong \mathbb{A}^2$  (con coordinate  $y, w$ ). L'intersezione  $U_0 \cap U_1$  è data chiaramente da  $\{z \neq 0\} \subseteq U_0$ , o anche  $\{w \neq 0\} \subseteq U_1$ ; in ogni caso si avrà  $w = \frac{1}{z}$ .

Consideriamo  $\varepsilon|_{U_0} : U_0 \rightarrow \mathbb{A}^2$ : questa prende  $(x, y; [z_0, z_1])$  e la manda in  $(x, y)$ , ma per le relazioni su  $U_0$ , interpretando  $U_0 \subseteq \mathbb{A}^2$  si ha  $\varepsilon|_{U_0}(x, z) = (x, xz)$ . Osserviamo che, dato che  $E = \hat{\mathbb{A}}^2 \cap \{x = y = 0\}$ , abbiamo  $E \cap U_0 = \{x = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$ .

**Esempio 1.16.5.** Sia  $f(x, y) = y - \lambda x$  l'equazione di una retta  $r = [f]$  in  $\mathbb{A}^2$ : vorremmo studiare il suo sollevamento in  $U_0$  (tramite  $\varepsilon$ ). Osserviamo che  $\varepsilon^{-1}(r) \cap U_0 = \{(x, z) \mid x(z - \lambda) = 0\}$  (dobbiamo sostituire  $y = zx$  nell'equazione). Questo dà luogo all'unione di due rette in  $\mathbb{A}^2$ :  $x = 0$  e  $z = \lambda$ . Interpretando  $\mathbb{A}^2 \sim (x, z)$  come piano verticale, immergiamo  $\varepsilon^{-1}(r) \cap U_0$  in  $\mathbb{A}^3 \sim (x, y, z)$  ricordando che  $y = zx$ : avremo quindi le due rette  $x = y = 0$  e  $(z = \lambda, y = \lambda x)$ . Osserviamo che, proiettando nuovamente su  $\mathbb{A}^2 \sim (x, y)$ , riotterremo la retta  $y = \lambda x$ .

**Esempio 1.16.6.** Sia  $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$  l'equazione della *cubica annodata*  $\mathcal{C} = [f]$  in  $\mathbb{A}^2$ . In questo caso  $\varepsilon^{-1}(\mathcal{C}) \cap U_0 = \{x^2(z^2 - x - 1) = 0\}$ , quindi abbiamo una retta doppia  $x = 0$  (che è la retta eccezionale, meno il punto all'infinito) e la quadrica  $z^2 = x + 1$ . Chiamiamo l'equazione  $x^2(z^2 - x - 1)$  *trasformazione totale* e l'equazione  $z^2 - x - 1$  *trasformazione stretta*. Osserviamo che la trasformazione stretta interseca la retta eccezionale  $x = 0$  in  $z = \pm 1$ . Cosa succede se immergiamo tutto in  $\mathbb{A}^3 \sim (x, y, z)$ ? In origine, nel piano  $x, y$  la curva presentava un nodo in  $(0, 0)$ ; adesso abbiamo sollevato questa curva “sciogliendo” il nodo nei due punti  $(0, 0, \pm 1)$ : in particolare possiamo scomporre la cubica sollevata in due componenti: la retta (doppia) eccezionale  $x = y = 0$  e la curva liscia  $(z^2 = x + 1, y = zx)$ .

**Esercizio 1.16.7.**

(1) La molteplicità della curva eccezionale è uguale alla molteplicità del punto 0.

- (2) Fare lo stesso ragionamento dell'esempio precedente per la curva  $y^2 = x^3$  e osservare che perde la singolarità che ha in 0.
- (3) Cercare punto multiplo ordinario<sup>31</sup>.

## 1.17 Lezione 17 (27 Nov 2015)

**Definizione 1.17.1.** Dati due interi  $1 \leq k \leq n$ , definiamo la *grassmanniana*

$$\begin{aligned} \text{Gr}(k, n) &= \{H \subseteq \mathbb{K}^n \mid H \text{ sottospazio vettoriale di dimensione } k\} \cong \\ &\cong \{K \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \mid K \text{ sottospazio proiettivo di dimensione } k-1\} \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\text{Gr}(1, n) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  (sono le rette di  $\mathbb{K}^n$  passanti per 0), mentre  $\text{Gr}(n-1, n) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{K})^*$ .

Vorremmo dare in generale a  $\text{Gr}(k, n)$  una struttura di varietà proiettiva.

**Definizione 1.17.2.** Possiamo associare ad ogni  $H \in \text{Gr}(k, n)$  una matrice  $n \times k$ , le cui colonne sono una base di  $H$ . Quest'associazione non è univoca, ma lo è a meno di moltiplicare a destra per matrici della forma  $M \in \text{GL}(k)$ . Associamo ad ogni matrice  $A$  così ottenuta le *coordinate di Plücker*:

$$\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad p_{i_1, \dots, i_k}(A) = \det(A(i_1, \dots, i_k; 1 : k)),$$

cioè per ogni possibile scelta di  $k$  righe associamo il determinante della rispettiva sottomatrice. Osserviamo che la formula  $A' = AM$  passa a  $A'(i_1, \dots, i_k; 1 : k) = A(i_1, \dots, i_k; 1 : k)M$ , quindi (per la formula di Binet) se  $A$  e  $A'$  definiscono lo stesso spazio vettoriale, allora le loro coordinate di Plücker differiscono per un coefficiente moltiplicativo. Inoltre, dato che le colonne sono linearmente indipendenti, almeno una delle coordinate sarà sempre non nulla. In particolare, possiamo definire l'*immersione di Plücker*:

$$P : \text{Gr}(k, n) \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \quad | \quad H \mapsto [p_{i_1, \dots, i_k}(H)]_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$$

Consideriamo il primo caso non banale, cioè  $\text{Gr}(2, 4)$ : l'immersione di Plücker è

$$P : \text{Gr}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^5 \sim [z_{1,2}, z_{1,3}, z_{1,4}, z_{2,3}, z_{2,4}, z_{3,4}]$$

Possiamo ricoprire  $\text{Gr}(2, 4)$  con carte della forma  $U_{i,j} = \{H \in \text{Gr}(2, 4) \mid p_{i,j} \neq 0\}$ . In particolare, studiamo la restrizione di  $P$  in  $U_{1,2}$ : in questa carta le matrici sono della forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0,$$

quindi possiamo sempre ricondurci univocamente a matrici equivalenti della forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} p_{1,2} &= 1, & p_{1,3} &= b, \\ p_{1,4} &= d, & p_{2,3} &= -a, \\ p_{2,4} &= -c, & p_{3,4} &= ad - bc. \end{aligned}$$

<sup>31</sup>Qualunque cosa voglia dire...

In particolare, osserviamo che (nell'immagine di  $\text{Gr}(2, 4)$  in  $\mathbb{P}^5$ ), le coordinate  $p_{1,3}, p_{1,4}, p_{2,3}, p_{2,4}$  sono libere, mentre la coordinata  $p_{3,4}$  dipende dalle precedenti.

Si verifica abbastanza facilmente che vale

$$\begin{aligned} P(U_{1,2}) &= P(\text{Gr}(2, 4)) \cap \{z_{1,2} \neq 0\} = \\ &= \{z_{1,2} \neq 0\} \cap \{z_{1,2}z_{3,4} + z_{2,3}z_{1,4} - z_{1,3}z_{2,4} = 0\} =: V_{1,2}, \end{aligned}$$

e che  $P|_{U_{1,2}}$  è iniettiva, dunque  $P$  induce una bigezione di  $U_{1,2}$  con  $V_{1,2}$ . Chiedendoci quale sia l'inversa, ci mettiamo nella carta affine  $y_{1,3}, y_{1,4}, y_{2,3}, y_{2,4}, y_{3,4}$  di  $\mathbb{P}^5$ , ottenuta deomogeneizzando per  $z_{1,2}$ : chiaramente basta mandare

$$(y_{1,3}, y_{1,4}, y_{2,3}, y_{2,4}, y_{3,4}) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -y_{2,3} & y_{1,3} \\ -y_{2,4} & y_{1,4} \end{bmatrix}.$$

Il fatto che la  $y_{3,4}$  non compaia nell'immagine non ci deve stupire troppo: grazie alla relazione  $z_{1,2}z_{3,4} + z_{2,3}z_{1,4} - z_{1,3}z_{2,4} = 0$ , otteniamo  $y_{3,4} = -y_{2,3}y_{1,4} + y_{1,3}y_{2,4}$ .

Adesso incolliamo le carte: ci accorgiamo che si ha esattamente

$$P(\text{Gr}(2, 4)) = \{z_{1,2}z_{3,4} + z_{2,3}z_{1,4} - z_{1,3}z_{2,4} = 0\},$$

che è nota come *quadrica di Klein*, che si verifica essere una curva non singolare in  $\mathbb{P}^5$ . Inoltre si può verificare (ragionando sulle carte) che anche  $P$  è iniettiva, quindi abbiamo una bigezione e possiamo dare a  $\text{Gr}(2, 4)$  la struttura di varietà proiettiva derivata da quella della quadrica di Klein.

Questo procedimento si generalizza per  $\text{Gr}(k, n)$ . Sia  $V = P(\text{Gr}(k, n))$ , sia  $N = \binom{n}{k} - 1$  la dimensione dello spazio in arrivo. Definiamo  $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  gli insiemi

$$V_{i_1, \dots, i_k} = V \cap \{z_{i_1, \dots, i_k} \neq 0\}, \quad U_{i_1, \dots, i_k} = P^{-1}(V_{i_1, \dots, i_k}).$$

Dobbiamo studiare la restrizione di  $P$  agli insiemi  $U_{i_1, \dots, i_k}$ : per semplicità di notazione, ci limitiamo a considerare il caso di  $U_{1, \dots, k}$ . Per definizione si ha

$$P|_{U_{1, \dots, k}} : U_{1, \dots, k} \rightarrow V_{1, \dots, k} \subseteq \{z_1, \dots, z_k \neq 0\}.$$

Come prima possiamo rappresentare univocamente  $H \in U_{1, \dots, k}$  con una matrice della forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \end{bmatrix}.$$

Vogliamo calcolare le coordinate di Plücker:

- Banalmente  $p_{1, \dots, k} = 1$ . Da un altro punto di vista, questa coordinata, essendo non nulla per definizione di  $U_{1, \dots, k}$ , può essere sempre fissata a 1.
- Se  $i_1, \dots, i_{k-1} \leq k$  e  $i_k > k$ , calcolando il determinante otteniamo  $p_{i_1, \dots, i_k} = \pm a_{i_k, \hat{i}_j}$ , dove  $\hat{i}_j$  è l'indice mancante tra  $1, \dots, k$ . D'altra parte, uno può semplicemente scrivere  $a_{i,j} = p_{1, \dots, \hat{j}, \dots, k, i}$  per  $i > k$ .

- Gli altri  $p_{i_1, \dots, i_k}$  si ottengono come determinanti di minori della sottomatrice  $(a_{i,j})$  (intesa come la parte che sta sotto l'identità). Dato che questi  $a_{i,j}$  sono coordinate di Plücker già valutate nel punto precedente, otteniamo un polinomio omogeneo nelle altre coordinate.

Come prima, si può mostrare che  $P : \text{Gr}(k, n) \rightarrow V$  è una bigezione e costruire la mappa inversa. Analogamente al caso particolare, si verifica che  $V_{1, \dots, k}$  è chiuso in  $\{z_{1, \dots, k} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$  (è intersezione di luoghi di zeri di polinomi omogenei). In particolare  $V$  è chiuso e possiamo trasferire la sua struttura topologica su  $\text{Gr}(k, n)$ . Osserviamo che le carte  $U_{i_1, \dots, i_k}$  sono degli aperti isomorfi a  $\mathbb{A}^{n(k-n)}$  (le scelte libere della matrice  $(a_{i,j})$ ).

Si può dare una diversa interpretazione con argomenti sul prodotto esterno.

### 1.17.1 Applicazioni

**Esempio 1.17.3.** Siamo interessati a verificare che, per ogni scelta di  $P = [a, b, c, d] \in \mathbb{P}^3$ , l'insieme  $\{\ell \in \text{Gr}(2, 4) \mid P \in \ell\}$  è un chiuso di Zariski.

Per ogni  $\ell \in \text{Gr}(2, 4)$  consideriamo la matrice associata  $A = (a_{i,j})$ : chiedere che  $P \in \ell$  è equivalente a imporre

$$\text{Rk} \left( \begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c \\ a_{4,1} & a_{4,2} & d \end{array} \right) \leq 2.$$

Questa condizione è equivalente a imporre quattro condizioni lineari sui minori di  $A$ , quindi all'intersezione dei luoghi di zeri di (fino a) quattro polinomi omogenei di grado 1 nei coefficienti di Plücker.

A seconda della scelta di  $P = [a, b, c, d]$ , possiamo avere meno di quattro polinomi di grado 1: per esempio, se  $P = [1, 0, 0, 0]$ , tre dei quattro polinomi risultano essere banali.

Un altro approccio può essere quello di dimostrarlo per ogni carta, ottenendo condizioni della forma

$$\text{Rk} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c \\ a_{4,1} & a_{4,2} & d \end{array} \right) \leq 2.$$

**Esempio 1.17.4.** Sia  $X = \{(\ell, m) \in \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4) \mid \ell \cap m \neq \emptyset\}$ : vorrei mostrare che è chiuso tramite le coordinate di Plücker.

Un'idea è quella di procedere in modo simile all'esempio precedente: se  $\ell, m \in \text{Gr}(2, 4)$  e  $A = (a_{i,j})$ ,  $B = (b_{i,j})$  sono le loro matrici associate, chiedere che  $\ell \cap m \neq \emptyset$  è equivalente a

$$\det \left( \begin{array}{cc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_{3,1} & b_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & b_{4,1} & b_{4,2} \end{array} \right) = 0.$$

Questa condizione è difficile da tradurre in coordinate di Plücker. Potremmo quindi prendere due carte di  $\text{Gr}(2, 4)$  e vedere il problema nel loro prodotto, ma questo non migliora di molto la situazione.

Un metodo più elegante è quello di introdurre una varietà ausiliaria: consideriamo

$$p_2 : \mathbb{P}^3 \times \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4) \rightarrow \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4). \\ Y = \{(P, \ell, m) \in \mathbb{P}^3 \times \text{Gr}(2, 4) \times \text{Gr}(2, 4) \mid P \in \ell \cap m\}.$$

Ci accorgiamo che  $X = p_2(Y)$ , quindi (per il Teorema 1.15.9) è sufficiente mostrare che  $Y$  è chiuso. Questo è facile: ci siamo riportati a intersecare due condizioni come quelle dell'esempio precedente:

$$\text{Rk} \left( \begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c \\ a_{4,1} & a_{4,2} & d \end{array} \right) \leq 2, \quad \text{Rk} \left( \begin{array}{cc|c} b_{1,1} & b_{1,2} & a \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b \\ b_{3,1} & b_{3,2} & c \\ b_{4,1} & b_{4,2} & d \end{array} \right) \leq 2.$$

**Esempio 1.17.5.** Vogliamo verificare che le grassmanniane sono irriducibili. Consideriamo l'azione di  $\text{GL}(n)$  su  $\text{Gr}(k, n)$  data dalla moltiplicazione a sinistra. Si verifica che, data una matrice  $A$  che rappresenta  $H \in \text{Gr}(k, n)$ , le coordinate di Plücker di  $MA$  sono della forma  $\sum \lambda_{i_1, \dots, i_k}(M) p_{i_1, \dots, i_k}(A)$ , dove i  $\lambda_*$  sono polinomi omogenei nelle entrate di  $M$ . In particolare l'azione sopracitata è un morfismo e si tratta quindi di un'azione algebrica.

Si osserva che  $\text{GL}(n)$  agisce transitivamente<sup>32</sup> su  $\text{Gr}(k, n)$ , cioè

$$\forall H_0 \in \text{Gr}(k, n) \quad \varphi_{H_0} : \text{GL}(n) \rightarrow \text{Gr}(k, n) \mid g \mapsto g(H_0).$$

Dalla formula delle coordinate di  $MA$  si deduce che anche  $\varphi_{H_0}$  è un morfismo: dato che i morfismi sono applicazioni continue, sarà sufficiente mostrare che  $\text{GL}(n)$  è irriducibile, ma questo è ovvio perché si tratta di un aperto non vuoto di  $\mathbb{A}^{n \times n}$ , che è a sua volta irriducibile.

## 1.17.2 Geometria birazionale

**Definizione 1.17.6.** Sia  $X$  una varietà quasi-proiettiva. Una *funzione razionale*  $f : X \dashrightarrow \mathbb{K}$  è una classe d'equivalenza di coppie  $(U, \varphi)$ , dove  $U \subseteq X$  è un aperto denso e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$  è una funzione regolare, tale che

$$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \varphi = \psi \text{ su } U \cap V.$$

*Osservazione 1.17.7.* Bisogna verificare che si tratta effettivamente di una relazione d'equivalenza. La riflessività e la simmetria sono ovvie, la transitività un po' meno.

Osserviamo come prima cosa che, se  $U$  e  $V$  sono aperti densi, allora anche  $U \cap V$  lo è:

- Se  $X$  è irriducibile, allora  $U \cap V$  è denso in quanto aperto non vuoto di un irriducibile ( $U \cap V \neq \emptyset$  per densità).
- Se  $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$  con  $X_1, \dots, X_k$  irriducibili, osserviamo che  $U$  è denso in  $X$  se e solo se  $\forall i \ U \cap X_i \neq \emptyset$ ; si può concludere in maniera analoga restringendoci ai singoli  $X_i$ .

Siano dunque  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  e  $(W, \xi)$  tali che  $(U, \varphi) \sim (V, \psi)$  e  $(V, \psi) \sim (W, \xi)$ : in particolare  $\varphi = \psi = \xi$  su  $U \cap V \cap W$  che è denso in  $U \cap W$ , quindi coincideranno anche su  $U \cap W$  (le funzioni regolari sono morfismi).

*Osservazione 1.17.8.* Le funzioni razionali si possono tranquillamente sommare, moltiplicare tra di loro o per degli scalari; in particolare formano una  $\mathbb{K}$ -algebra.

Osserviamo inoltre che, se una funzione razionale  $f$  non è costantemente nulla su alcuna componente irriducibile di  $X$ , possiamo definire in modo ovvio<sup>33</sup> la sua inversa  $\frac{1}{f}$ . In particolare, se  $X$  è irriducibile, le funzioni razionali formano un campo che denotiamo con  $\mathbb{K}(X)$ .

**Definizione 1.17.9.** Siano  $X, Y$  due varietà irriducibili. Una *applicazione razionale*  $f : X \dashrightarrow Y$  è una classe d'equivalenza di coppie  $(U, \varphi)$ , dove  $U \subseteq X$  è un aperto non vuoto e  $\varphi : U \rightarrow Y$  è un morfismo, secondo la stessa relazione precedente.

<sup>32</sup>Cioè dà luogo ad una sola orbita.

<sup>33</sup>Prendere wlog  $\varphi$  che non si annulla in  $X$  e passare a  $\frac{1}{\varphi}$ .

## 1.18 Lezione 18 (2 Nov 2015)

Salvo diversamente specificato, le varietà studiate saranno sempre quasi-proiettive irriducibili. Osserviamo che in generale  $\mathbb{K}(X) \supseteq \mathbb{K}$ .

Sia  $X$  chiuso irriducibile in  $\mathbb{A}^n$ , sia  $\mathbb{K}[X]$  il suo anello delle coordinate, che è un dominio. Ha senso parlare del suo campo delle frazioni, che indichiamo con  $F$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ F & & \end{array}$$

Anche  $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}(X)$  è un'inclusione. Esiste un'unica  $\varphi$  che fa commutare il diagramma (per proprietà universale della localizzazione).

**Proposizione 1.18.1.** Se  $X$  è affine, allora  $\varphi$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Dato che  $\varphi$  esiste unica, basta esibire una mappa che faccia commutare il diagramma per vedere com'è definita. Se  $f = \frac{a}{b} \in F$  con  $a, b \in \mathbb{K}[X]$  e  $b \neq 0$ , allora diciamo che  $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = (X_b, \frac{a}{b})$ . Si verifica la buona definizione osservando che  $f = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se e solo se  $ad - bc = 0$  in  $\mathbb{K}[X]$  (e quindi in  $\mathbb{K}(X)$ ).

L'iniettività a questo punto è una verifica banale. Per la surgettività, data  $g \in \mathbb{K}(X)$  rappresentata da  $(U, \psi)$ , ricordando che gli aperti principali sono una base degli aperti affini,  $\exists b \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  tale che  $X_b \subseteq U$ . In particolare possiamo rappresentare  $g$  con  $(X_b, \psi|_{X_b})$ . Osserviamo che  $\psi|_{X_b} \in \mathbb{K}[X_b] = \mathbb{K}[X]_b$  e quindi  $\psi|_{X_b} = \frac{a}{b^r}$  per opportuni  $a \in \mathbb{K}[X]$  e  $r \geq 0$ . Dunque  $g = \varphi\left(\frac{a}{b^r}\right)$ .  $\square$

*Osservazione 1.18.2.* Se  $X$  è una varietà affine irriducibile, allora  $\mathbb{K}(X)$  è un'estensione finitamente generata di  $\mathbb{K}$  (infatti  $\mathbb{K}[X]$  è generato dalle classi delle coordinate su  $\mathbb{A}^n$ , e nel caso affine  $\mathbb{K}(X)$  è il suo campo delle frazioni).

**Esempio 1.18.3.**

- (1)  $\mathbb{K}(\mathbb{A}^1) = \mathbb{K}(x)$  (perché  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1] = \mathbb{K}[x]$ ).
- (2)  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ .
- (3) Sia  $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$  un'ipersuperficie irriducibile. Allora  $I(X) = (f)$  con  $f$  irriducibile. Siano  $x_1, \dots, x_n, y$  coordinate su  $\mathbb{A}^{n+1}$ : possiamo supporre wlog che  $f$  dipenda da  $y$ . Allora

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[\mathbf{x}; y]/(f) = \mathbb{K}[\mathbf{x}][y]/(f).$$

Per il Lemma di Gauss,  $f$  è irriducibile anche in  $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]$ . In particolare, consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(\mathbf{x})[y]/(f) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{K}(X) & & \end{array}$$

Facciamo le seguenti osservazioni:  $\mathbb{K}[X]$  si immerge in  $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]/(f)$  (non è scontato, ma si verifica con Gauss), quest'ultimo è un campo e la freccia che fa commutare il diagramma esiste unica (per proprietà universale, ricordando che  $\mathbb{K}(X)$  è il campo delle frazioni) ed è bigettiva (l'iniettività come prima, la surgettività perché i generatori  $x_1, \dots, x_n, y$  vanno in generatori). In particolare  $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]/(f)$ .

**Esempio 1.18.4.** Si consideri  $\mathcal{C}\{y^2 = p(x)\} \subseteq \mathbb{A}^2$ : abbiamo

$$\mathbb{K}(\mathcal{C}) = \mathbb{K}(x)[y]/(y^2 - p(x)),$$

che è un'estensione di grado 2 di  $\mathbb{K}(x)$ . Se per esempio  $\mathcal{C}_1 = \{y^2 = x^3\}$  è la cubica cuspidata, allora

$$\mathbb{K}(\mathcal{C}_1) = \mathbb{K}(x)[y]/(y^2 - x^3).$$

Sia  $f = \frac{y}{x} \in \mathbb{K}(\mathcal{C}_1)$ : osserviamo che  $f^2 = x$  in  $\mathbb{K}(\mathcal{C}_1)$ . In particolare

$$x, y = xf \in \mathbb{K}(f) \Rightarrow \mathbb{K}(x, y) \subseteq \mathbb{K}(f) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathbb{K}(x, y),$$

da cui  $\mathbb{K}(\mathcal{C}_1) = \mathbb{K}(f) \cong \mathbb{K}(t)$ .

**Esercizio 1.18.5.** Fare lo stesso per la cubica annodata  $\mathcal{C}_2 = \{y^2 - x^2(x+1) = 0\}$ .

Questi esempi sono fuorvianti: si può mostrare che, se  $p$  ha 3 radici distinte  $\mathbb{K}(\mathcal{C}) \cong \mathbb{K}(t)$

*Osservazione 1.18.6.* Supponiamo di avere tre varietà quasi-proiettive irriducibili  $X, Y, Z$ , due mappe razionali  $f : X \dashrightarrow Y$  e  $g : Y \dashrightarrow Z$  e i rispettivi rappresentanti  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ . Cosa è necessario che valga perché la composizione  $g \circ f$  abbia senso? Sicuramente se  $\varphi^{-1}(V) = \emptyset$  abbiamo problemi; d'altra parte, se  $W = \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ , allora  $W$  sarà un aperto non vuoto di  $X$ , quindi un denso, quindi ha senso cambiare rappresentante e considerare la composizione  $\psi \circ \varphi|_{U \cap W}$ . Si verifica che questa proprietà non dipende dalla scelta dei rappresentanti (per esercizio).

**Definizione 1.18.7.** Se  $X, Y$  sono varietà quasi-proiettive irriducibili e  $f : X \dashrightarrow Y$  è una mappa razionale con rappresentante  $(U, \varphi)$ , diciamo che  $f$  è *dominante* se  $\overline{\varphi(U)} = Y$ . Questa condizione equivale a chiedere  $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$  per ogni  $V \subseteq Y$  aperto non vuoto, e non dipende dalla scelta dei rappresentanti.

**Definizione 1.18.8.** Una mappa razionale dominante  $f : X \dashrightarrow Y$  è un *isomorfismo birazionale*<sup>34</sup> se  $\exists g : Y \dashrightarrow X$  tale che  $f \circ g = \text{Id}_Y$  e  $g \circ f = \text{Id}_X$ . In contrapposizione, gli isomorfismi (relativi ai morfismi) saranno a volte chiamati *isomorfismi biregolari*.

**Definizione 1.18.9.** Se  $f : X \dashrightarrow Y$  è una mappa razionale, il suo *dominio* è

$$\text{dom}(f) = \bigcup \{U \mid (U, \varphi) \text{ rappresentante di } f\}.$$

Si può osservare che  $f$  ammette sempre un rappresentante nel suo dominio.

**Esempio 1.18.10.** Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  una varietà quasi-proiettiva irriducibile, siano  $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ , tali che  $\forall i \quad X \not\subseteq V(F_i)$ <sup>35</sup>. Allora  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^m \mid x \mapsto [F_0(x), \dots, F_m(x)]$  è una mappa razionale: infatti  $X \setminus V(F_0, \dots, F_m)$  è un aperto di  $X$ , e questa mappa è ben definita (nonché un morfismo) dove almeno uno dei polinomi non si annulla.

- (1)  $\mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \mid (x, y) \mapsto [x, y]$  non è un morfismo, però è una mappa razionale.
- (2) Sia  $\mathcal{C} = \{y^2 - x^3 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$  la cubica cuspidata, sia  $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathcal{C} \mid t \mapsto (t^2, t^3)$ : abbiamo già dimostrato in lezioni precedenti che  $f$  è un morfismo bigettivo, ma non è un isomorfismo biregolare. Questo è però un isomorfismo birazionale: infatti per  $x \neq 0$  si ha  $t = \frac{y}{x}$ . In particolare  $\text{dom}(f) = \mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$ : infatti è chiaro che vale  $\supseteq$ , ma se non valesse l'uguaglianza avremmo  $\text{dom}(f) = \mathcal{C}$ , da cui  $f$  sarebbe un isomorfismo biregolare.

<sup>34</sup>In pratica abbiamo dotato le varietà quasi-proiettive irriducibili di struttura di categoria, utilizzando le mappe razionali dominanti come morfismi.

<sup>35</sup>In realtà è sufficiente che  $\exists i \dots$

- (3) Se  $U \subseteq X$  è un aperto non vuoto, chiaramente l'immersione  $i : U \hookrightarrow X$  è un isomorfismo birazionale.
- (4) Consideriamo il blowup  $\widehat{\mathbb{A}^2} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{A}^2$ : ricordando le lezioni precedenti,  $\varepsilon$  è un morfismo e, nella carta  $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , ha inversa  $\varepsilon^{-1} : \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^2} \mid (x,y) = \{(x,y,[x,y])\}$ . In particolare  $\varepsilon$  sarà un isomorfismo birazionale. Anche in questo caso osserviamo che  $\text{dom}(\varepsilon) = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ : in caso contrario si avrebbe che  $\varepsilon$  è un isomorfismo biregolare, ma non è iniettiva (manda la curva eccezionale  $E$  in un punto).
- (5) Definiamo la *trasformazione di Cremona* (o *quadratica standard*) come la mappa razionale

$$c : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \quad | \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1].$$

Chiaramente  $\text{dom}(c) \supseteq \mathbb{P}^2 \setminus \{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]\}$ . Inoltre si verifica facilmente che  $c^2 = \text{Id}_{\mathbb{P}^2}$  (come mappa razionale), nella carta  $x_0x_1x_2 \neq 0$ ; in particolare  $c$  è un isomorfismo birazionale, e induce un automorfismo di ordine 2 su  $\mathbb{P}^2 \setminus V(x_0x_1x_2)$ . Ci chiediamo se si possa estendere anche ai punti  $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$ : ci accorgiamo che  $c$  manda ciascuna retta della forma  $r_i = \{x_i = 0\}$  nel punto opposto; in particolare, dato che  $[1,0,0] \in r_1 \cap r_2$ , se per assurdo si potesse estendere  $c$  in  $[1,0,0]$ , dovrebbe mandarlo contemporaneamente in due punti distinti.

**Definizione 1.18.11.** Siano  $X, Y$  varietà quasi-proiettive irriducibili, sia  $f : X \dashrightarrow Y$  una mappa razionale dominante. Definiamo (analogamente al caso regolare)  $f^* : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X) \mid \varphi \mapsto \varphi \circ f$  (ha senso perché  $f$  è dominante). Si osserva che  $f^*$  è un omomorfismo  $\mathbb{K}$ -lineare di campi, o anche un omomorfismo di estensioni di  $\mathbb{K}$ .

*Osservazione 1.18.12.* Anche in questo caso vale la funtorialità, ossia

- $\text{Id} : X \dashrightarrow X \Rightarrow \text{Id}^* = \text{Id}_{\mathbb{K}(X)}$ ;
- Se  $f : X \dashrightarrow Y$ ,  $g : Y \dashrightarrow Z$  sono dominanti, allora  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .

**Corollario 1.18.13.** Se  $X, Y$  sono varietà quasi-proiettive irriducibili isomorfe birazionalmente, allora  $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$  (tramite isomorfismo  $\mathbb{K}$ -lineare).

*Dimostrazione.* Immediato per funtorialità, come nel caso regolare. □

**Corollario 1.18.14.** Se  $X$  è una varietà quasi-proiettiva, allora  $\mathbb{K}(X)$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata.

*Dimostrazione.* Sia  $U \subseteq X$  un aperto affine non vuoto (basta intersecare con  $\mathbb{A}^n$ ): abbiamo visto che  $U \hookrightarrow X$  è un isomorfismo birazionale, quindi  $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(U)$ . Quest'ultima è una  $\mathbb{K}$ -algebra finitamente generata (lo abbiamo visto all'inizio della lezione). □

**Esempio 1.18.15.** Qualche esempio:

- (1) Osserviamo che  $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ , quindi  $\mathbb{K}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(y_1, \dots, y_n)$ . In particolare, ricordando la relazione tra  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathbb{P}^n$ , possiamo scrivere  $\mathbb{K}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{K}\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ .
- (2) Osserviamo che  $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  è una varietà affine, quindi

$$\mathbb{K}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{K}(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m) = \mathbb{K}(\mathbb{A}^{n+m}).$$

- (3) Ricordando che abbiamo una carta  $\mathbb{A}^{n(n-x)} \hookrightarrow \text{Gr}(k, n)$ , abbiamo  $\mathbb{K}(\text{Gr}(k, n)) \cong \mathbb{K}(\mathbb{A}^{n(n-k)})$ .

**Lemma 1.18.16.** Siano  $X, Y$  varietà irriducibili, sia  $\varphi : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$  un omomorfismo  $\mathbb{K}$ -lineare. Allora  $\exists! f : X \dashrightarrow Y$  mappa razionale dominante tale che  $\varphi = f^*$ .

*Dimostrazione.* Possiamo supporre wlog  $X, Y$  affini: altrimenti posso sostituirli con due aperti affini in essi contenuti, e osservare che ipotesi e tesi non cambiano. In questo modo  $\mathbb{K}(X)$  (risp.  $\mathbb{K}(Y)$ ) è proprio il campo delle frazioni di  $\mathbb{K}[X]$  (risp.  $\mathbb{K}[Y]$ ).

Siano  $y_1, \dots, y_m$  generatori di  $\mathbb{K}[Y]$  come  $\mathbb{K}$ -algebra: si osserva che

$$\exists b \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} : \forall 1 \leq i \leq m \quad \varphi(y_i) = \frac{a_i}{b}$$

(passando eventualmente a denominatore comune). In particolare  $\text{Im}(\varphi|_{\mathbb{K}[Y]}) \subseteq \mathbb{K}[X]_b = \mathbb{K}[X_b]$ . Definiamo quindi  $\tilde{\varphi} : \mathbb{K}[Y] \rightarrow \mathbb{K}[X_b]$  come  $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\mathbb{K}[Y]}$  e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(Y) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{K}[Y] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{K}[X_b] \end{array}$$

Per la Proposizione 1.11.13 sappiamo che  $\exists! \psi : X_b \rightarrow Y$  morfismo tale che  $\psi^* = \tilde{\varphi}$ . Sia dunque  $f : X \dashrightarrow Y$  definita dal rappresentante  $(X_b, \psi)$ : osservando che  $\varphi$  è iniettiva in quanto omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -estensioni, per il Corollario 1.11.8 deduciamo che  $f$  è dominante. Verifichiamo che tale  $f$  soddisfa le nostre richieste: se  $\frac{p}{q}$  con  $p, q \in \mathbb{K}[Y]$  e  $q \neq 0$  è un elemento generico di  $\mathbb{K}(Y)$ , vale

$$f^*\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f^*(p)}{f^*(q)} = \frac{p \circ \psi}{q \circ \psi} = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{\varphi}(q)} = \varphi\left(\frac{p}{q}\right).$$

Supponiamo ora che anche  $g : X \dashrightarrow Y$  soddisfi  $g^* = \varphi$ , e verifichiamo che  $f = g$ . Osserviamo che possiamo prendere due rappresentanti  $f \sim (U, \alpha)$ ,  $g \sim (U, \beta)$  con  $U \subseteq X_b$  aperto non vuoto, e che  $\alpha = f \circ i$ ,  $\beta = g \circ i$  con  $i : U \hookrightarrow X$ . In particolare  $\alpha^* = i^* \circ f^* = i^* \circ g^* = \beta^*$ , da cui  $\alpha = \beta$  (nel caso regolare l'unicità l'abbiamo già dimostrata) e quindi  $f \sim g$ .  $\square$

## 1.19 Lezione 19 (04 Dic 2015)

**Proposizione 1.19.1.** Siano  $X, Y$  due varietà quasi-proiettive irriducibili. Allora le seguenti sono equivalenti:

- (1)  $X \sim_{\text{bir}} Y$ ;
- (2)  $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$  (come estensioni di  $\mathbb{K}$ );
- (3)  $\exists U \subseteq X, V \subseteq Y$  aperti non vuoti tali che  $U \cong V$ .

*Dimostrazione.*

(3)  $\Rightarrow$  (1) è ovvio per definizione.

(1)  $\Rightarrow$  (2) l'abbiamo già dimostrato.

(2)  $\Rightarrow$  (3) sia  $\varphi : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$  un isomorfismo  $\mathbb{K}$ -lineare: allora  $\exists f : X \dashrightarrow Y$  mappa razionale dominante tale che  $f^* = \varphi$ . A meno di restringere l'insieme di definizione, possiamo supporre wlog che  $X, Y$  siano varietà affini e che  $f : X \rightarrow Y$  sia un morfismo. Sia  $\psi : \mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(Y)$  l'inversa di  $\varphi$ .

Siano  $x_1, \dots, x_n$  le classi delle coordinate date da un'immersione  $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$  (i soliti generatori). Come fatto in precedenza,  $\exists b \in \mathbb{K}[Y] \setminus \{0\}$  tale che  $\forall i \varphi(x_i) = \frac{a_i}{b}$ , con  $a_i \in \mathbb{K}[Y]$ . In particolare  $\text{Im}(\psi|_{\mathbb{K}[X]}) \subseteq \mathbb{K}[Y]_b = \mathbb{K}[Y_b]$ , ma questo è vero anche restringendo  $\psi$  a  $\mathbb{K}[X]_{\varphi(b)} = \mathbb{K}[X_{\varphi(b)}]$ . Possiamo quindi scrivere il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}(Y) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}(X) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{K}(Y) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{K}[Y_b] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{K}[X_{\varphi(b)}] & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathbb{K}[Y_b] \end{array}$$

Si osserva che  $\tilde{\varphi}$  è un isomorfismo (con inversa  $\tilde{\psi}$ ), in particolare abbiamo un isomorfismo  $Y_b \cong X_{\varphi(b)}$  (vedi Corollario 1.11.16). Questo isomorfismo è proprio  $f|_{Y_b}$ .  $\square$

### 1.19.1 Teoria dei campi

**Definizione 1.19.2.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo,  $F \supseteq \mathbb{K}$  un'estensione. Un insieme finito  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq F$  si dice *algebricamente indipendente* (o si dirà che i suoi elementi lo sono) su  $\mathbb{K}$  se:

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow F \mid p(x) \mapsto p(a_1, \dots, a_n) \text{ è iniettiva.}$$

Un insieme infinito  $S$  è algebricamente indipendente se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è algebricamente indipendente.

**Definizione 1.19.3.** Una *base di trascendenza* di  $F$  su  $\mathbb{K}$  è un insieme algebricamente indipendente massimale.

**Teorema 1.19.4.** Sia  $F \supseteq \mathbb{K}$  un'estensione di campi. Allora esiste sempre una base di trascendenza, e tutte le basi di trascendenza hanno la stessa cardinalità, detta *grado di trascendenza* (che indicheremo con  $\text{Trdeg}_{\mathbb{K}}(F)$ ).

*Dimostrazione omessa.*

*Osservazione 1.19.5.* Si osserva che  $\text{Trdeg}_{\mathbb{K}} F = 0$  se e solo se  $F$  è un'estensione algebrica di  $\mathbb{K}$ .

**Lemma 1.19.6.** Sia  $S \subseteq F$ . Valgono le seguenti proprietà:

- (1) Se  $S$  è algebricamente indipendente, allora  $\exists \mathcal{B}$  base di trascendenza che lo contiene;
- (2) Se  $F \supseteq \mathbb{K}(S)$  è algebrica, allora  $S$  contiene una base di trascendenza  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione omessa.*

*Osservazione 1.19.7.* Se  $X$  è una varietà quasi-proiettiva irriducibile, abbiamo visto che  $\mathbb{K}(X) \supseteq \mathbb{K}$  è un'estensione finitamente generata. In particolare, se  $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(a_1, \dots, a_n)$ , si verifica tramite il lemma precedente che  $\text{Trdeg}(\mathbb{K}(X)) \leq n$ .

**Definizione 1.19.8.** Se  $X$  è una varietà quasi-proiettiva irriducibile, definiamo la sua *dimensione* come  $\dim(X) = \text{Trdeg}(\mathbb{K}(X))$  (che abbiamo appena visto essere finita). Se  $X$  è una varietà quasi-proiettiva riducibile, e  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$  è una sua decomposizione in irriducibili<sup>36</sup>, definiamo la sua dimensione come  $\dim(X) = \max_{1 \leq i \leq n} \dim(X_i)$ .

*Osservazione 1.19.9.* Ricordando la Proposizione 1.19.1, se  $X, Y$  sono varietà quasi-proiettive irriducibili e  $X \sim_{\text{bir}} Y$ , allora  $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$ , quindi  $\dim(X) = \dim(Y)$ . In altri termini, la dimensione è un invariante birazionale.

**Esempio 1.19.10.** Ricordiamo che  $\mathbb{K}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ , quindi  $\dim(\mathbb{A}^n) = n$ . Dato che  $\mathbb{A}^n$  è un aperto non vuoto di  $\mathbb{P}^n$  (e quindi  $\mathbb{A}^n \sim_{\text{bir}} \mathbb{P}^n$ ), si ha anche  $\dim(\mathbb{P}^n) = \dim(\mathbb{A}^n) = n$ . Per la stessa ragione  $\dim(\text{Gr}(k, n)) = k(n - k)$  (contiene una carta isomorfa ad  $\mathbb{A}^{k(n-k)}$ ).

**Esempio 1.19.11.** Sia  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n; y]$  un polinomio irriducibile, supponiamo che  $f$  dipenda da  $y$ . Sia  $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ . Avevamo calcolato (nella lezione precedente)

$$\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]/(f) \stackrel{\text{alg}}{\supseteq} \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n),$$

da cui si verifica immediatamente che  $\dim(X) = n$  (vedi Lemma 1.19.6). In particolare, leipersuperfici irriducibili hanno sempre la dimensione dello spazio in cui vivono, meno uno.

**Proposizione 1.19.12.** Sia  $X$  una varietà quasi-proiettiva irriducibile di dimensione  $n$ . Allora  $\exists f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n; y] = \mathbb{K}[\mathbf{x}; y]$  polinomio irriducibile tale che  $X \sim_{\text{bir}} V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ .

*Dimostrazione.* Lo dimostriamo in caratteristica 0, anche se il risultato è valido più in generale<sup>37</sup>. Sia  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{K}(X)$  una base di trascendenza: in particolare  $\mathbb{K}(X) \supseteq \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$  è un'estensione algebrica finita (perché  $\mathbb{K}(X)$  è finitamente generata su  $\mathbb{K}$ ). Per il teorema dell'elemento primitivo (che possiamo applicare perché siamo in caratteristica 0)  $\exists \alpha \in \mathbb{K}(X)$  tale che  $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[\alpha] \cong \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]/(g)$ , dove  $g \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]$  è il polinomio minimo di  $\alpha$  su  $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)[y]$ , che è monico e irriducibile. Possiamo scrivere

$$g(y) = y^r + a_1(\mathbf{x})y^{r-1} + \dots + a_d(\mathbf{x})$$

e osservare che, a meno di moltiplicare per un opportuno  $d(x) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , si ha che  $f(x, y) = g(y)d(x)$  è un polinomio primitivo in  $\mathbb{K}[\mathbf{x}; y]$  e irriducibile in  $\mathbb{K}(\mathbf{x})[y]$  ( $g$  lo è, e  $d$  è invertibile). In particolare  $f$  è irriducibile per il lemma di Gauss, e si può concludere che  $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(\mathbf{x})[y]/(f) = \mathbb{K}(V(f))$ .  $\square$

**Proposizione 1.19.13.** Siano  $X, Y$  due varietà quasi-proiettive irriducibili, sia  $f : X \dashrightarrow Y$  un morfismo dominante: allora  $\dim Y \leq \dim X$ .

*Dimostrazione.* La mappa  $f^* : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$  è iniettiva (è un omomorfismo di campi), e manda ogni base di trascendenza di  $\mathbb{K}(Y)$  in un insieme di elementi algebricamente indipendenti di  $\mathbb{K}(X)$ .  $\square$

**Proposizione 1.19.14.** Siano  $X, Y$  due varietà quasi-proiettive irriducibili: allora  $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ .

<sup>36</sup>Non dovrebbe dipendere dalla scelta fatta.

<sup>37</sup>Si dovrebbe usare il lemma di normalizzazione di Noether.

*Dimostrazione.* Similmente a quanto fatto in precedenza, possiamo supporre wlog che  $X, Y$  siano affini e soddisfino  $X \subseteq \mathbb{A}^N$  e  $Y \subseteq \mathbb{A}^M$ . In particolare  $\mathbb{K}(X)$  (risp.  $\mathbb{K}(Y)$ ) è generato da classi di coordinate  $x_1, \dots, x_N$  (risp.  $y_1, \dots, y_M$ ) e, a meno di riordinare, possiamo supporre che  $x_1, \dots, x_n$  (risp.  $y_1, \dots, y_m$ ) sia una base di trascendenza di  $\mathbb{K}(X)$  (risp.  $\mathbb{K}(Y)$ ), con  $n \leq N$  (risp.  $m \leq M$ ).

Vogliamo mostrare che  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  è una base di trascendenza di  $\mathbb{K}(X \times Y)$ . È tutto ben definito: basta considerare le proiezioni  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  e  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  e passare a  $p_1^*$  e  $p_2^*$ . Osserviamo che

$$\mathbb{K}(X \times Y) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \stackrel{\text{alg}}{\supseteq} \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) :$$

infatti le relazioni di dipendenza algebrica si spostano da  $\mathbb{K}(X)$  e  $\mathbb{K}(Y)$  su  $\mathbb{K}(X \times Y)$  tramite  $p_1^*$  e  $p_2^*$ ; in particolare, per il Lemma 1.19.6, l'insieme  $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$  contiene una base di trascendenza di  $\mathbb{K}(X \times Y)$ .

Resta da dimostrare che  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  sono algebricamente indipendenti. Supponiamo per assurdo che soddisfino una relazione di dipendenza algebrica: in tal caso  $\exists p \in \mathbb{K}[S_1, \dots, S_n, T_1, \dots, T_m]$  (variabili libere) non nullo, tale che  $p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$  su  $X \times Y$  (possiamo restringerci a lavorare su  $\mathbb{K}[X \times Y]$ ). Scriviamo  $p(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sum_I a_I(\mathbf{S}) \mathbf{T}^I$ , dove  $I$  varia in un insieme di multiindici: in particolare, fissato  $\bar{\mathbf{x}} \in X$ , vale  $\forall y \in Y \sum_I a_I(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{y}^I = 0$ . Interpretando la precedente scrittura come un polinomio in  $\mathbb{K}(Y)$ , e ricordando che  $y_1, \dots, y_m$  ne è una base di trascendenza, deduciamo che  $\forall I \ a_I(\bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$ ; in particolare, per arbitrarietà nella scelta di  $\bar{\mathbf{x}} \in X$ , varrà  $\forall I \ a_I(\mathbf{x}) \equiv 0$  su  $X$ . Dato che  $x_1, \dots, x_n$  era una base di trascendenza per  $\mathbb{K}(X)$ , questo implica che  $\forall I \ a_I(\mathbf{S}) \equiv 0$ , da cui concludiamo  $p \equiv 0$  (come polinomio), che è assurdo.  $\square$

**Proposizione 1.19.15.** Siano  $X, Y$  due varietà irriducibili tali che  $Y \subsetneq X$ : allora  $\dim Y < \dim X$ .

*Dimostrazione.* Ancora una volta possiamo supporre wlog che  $X, Y$  siano varietà affini e valga  $Y \subsetneq X \subseteq \mathbb{A}^N$ . Sia  $n = \dim X$ : dato che l'insieme delle classi coordinate  $\{x_1, \dots, x_N\}$  contiene necessariamente una base di trascendenza di  $Y$ , vogliamo mostrare che non ammette un sottoinsieme di  $n$  elementi algebricamente indipendenti in  $\mathbb{K}(Y)$ .

Supponiamo quindi per assurdo che un tale sottoinsieme sia algebricamente indipendente in  $\mathbb{K}(Y)$  (wlog  $x_1, \dots, x_n$ ). Dalle ipotesi si osserva che  $0 \neq I(Y) \subseteq \mathbb{K}[X]$  (per Nullstellensatz relativo), dunque  $\exists f \in I(Y) \setminus \{0\}$ . Necessariamente  $\{x_1, \dots, x_n, f\}$  è algebricamente dipendente in  $\mathbb{K}(X)$ , quindi esiste un polinomio  $P \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n, Z] \setminus 0$  tale che  $P(\mathbf{x}, f) = 0$  su  $X$ . Scriviamo  $P(\mathbf{T}, Z) = a_0(\mathbf{T})Z^d + \dots + a_d(\mathbf{T})$ : possiamo supporre wlog  $a_d \neq 0$  (in caso contrario riduciamo: siamo su un dominio). La relazione  $P(\mathbf{x}, f) = 0$  su  $X$  implica in particolare  $a_d(\mathbf{T}) = 0$  su  $Y$  ( $f \in I(Y)$ , dunque  $f = 0$  su  $Y$ ). In particolare abbiamo una relazione di dipendenza algebrica di  $x_1, \dots, x_n$  su  $Y$ .  $\square$

## 1.20 Lezione 20 (11 Dic 2015)

**Definizione 1.20.1.** Sia  $X$  una varietà quasi-proiettiva, sia  $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$  la sua decomposizione irriducibile minimale. Definiamo la *dimensione* di  $X$  come  $\dim(X) = \max_{1 \leq i \leq k} \dim(X_i)$ . Se  $\forall i \ \dim(X_i) = n$ , diremo che  $X$  ha *dimensione pura*  $n$ .

*Osservazione 1.20.2.* Sia  $F = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n+1}]_d$ , sia  $X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ : allora  $F$  ha dimensione pura  $n$ . Infatti basta considerare la sua fattorizzazione in irriducibili  $F = \prod F_i^{\alpha_i}$  e osservare che  $X = V(F) = \bigcup V(F_i)$  è la sua decomposizione in irriducibili minimale. Lo stesso risultato vale nel caso affine.

**Proposizione 1.20.3.** Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$  (risp.  $\mathbb{A}^{n+1}$ ) un chiuso con dimensione pura  $n$ . Allora  $X$  è un'ipersuperficie.

*Dimostrazione.* Se  $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$  è la decomposizione in irriducibili minimale, basta dimostrare il risultato per gli  $X_i$ , quindi possiamo supporre wlog che  $X$  sia irriducibile. Ci limitiamo a considerare il caso  $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ ; il caso  $\mathbb{A}^{n+1}$  è analogo.

Dato che  $\dim X = n < n + 1$ , si avrà  $X \subsetneq \mathbb{P}^{n+1}$  e quindi  $I(X) \neq 0$ . Possiamo dedurre che  $\exists F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n+1}] \setminus \{0\}$  omogeneo tale che  $X \subseteq V(F)$ . Decomponendo in irriducibili  $V(F) = \bigcup V(F_i)$ , osserviamo che  $X = \bigcup (X \cap V(F_i))$  è una decomposizione in chiusi. Dato che  $X$  è irriducibile,  $\exists i$  tale che  $X = X \cap V(F_i)$ , da cui  $X \subseteq V(F_i)$ . Per l'osservazione precedente  $\dim(V(F_i)) = n$ , ma anche  $\dim X = n$ , sono entrambi irriducibili e quindi si deve avere  $X = V(F_i)$  (vedi Proposizione 1.19.15).  $\square$

**Esempio 1.20.4.**  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sono birazionali (contengono entrambi un aperto isomorfo a  $\mathbb{A}^2$ ), ma non sono isomorfi. Si considerino per esempio  $D_1 = \{[1, 0]\} \times \mathbb{P}^1$  e  $D_2 = \{[0, 1]\} \times \mathbb{P}^1$  in  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ : sono due chiusi isomorfi a  $\mathbb{P}^1$ , quindi curve irriducibili, inoltre  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ . Tuttavia, se si avesse  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^2$ , allora si dovrebbe avere  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$  per Bézout.

**Proposizione 1.20.5.** Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  un chiuso irriducibile con  $\dim X = n$ , sia  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$  omogeneo tale che  $V(F) \not\subseteq X$ . Allora  $X \cap V(F)$  ha dimensione pura  $n - 1$ .

*Dimostrazione omessa.*

**Corollario 1.20.6.** Siano  $F_1, \dots, F_k$  polinomi omogenei in  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$  con  $k \leq N$ , sia  $X = \bigcap V(F_i)$ . Allora  $X \neq \emptyset$  e ogni componente irriducibile di  $X$  ha codimensione  $\leq k$ .

*Dimostrazione.* Per induzione, applicando la proposizione precedente alle singole componenti irriducibili: ad ogni passo la dimensione cala di 1 o resta uguale.  $\square$

**Corollario 1.20.7.** Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  un chiuso irriducibile. Allora  $\dim X = n$  se e solo se valgono le seguenti:

- (a)  $\forall H_1, \dots, H_n \subseteq \mathbb{P}^N$  iperpiani si ha  $X \cap \bigcap H_i \neq \emptyset$ ;
- (b)  $\exists K_1, \dots, K_{n+1} \subseteq \mathbb{P}^N$  iperpiani tali che  $X \cap \bigcap K_i = \emptyset$ .

*Dimostrazione.*

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo  $\dim X = n$ . Applicando la Proposizione 1.20.5 in modo simile al corollario precedente, otteniamo che  $\forall H_1, \dots, H_n \dim(X \cap \bigcap H_i) \geq 0$  e quindi (a).

Sia  $K_1$  un iperpiano che non contiene  $X$  (basta fissare un punto di  $X$  e prendere un iperpiano che non ci passa): per la Proposizione 1.20.5  $X \cap K_1 = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$  con  $\forall i \dim(Y_i) = n - 1$ . Sia  $\forall i y_i \in Y_i$  e scegliamo un iperpiano  $K_2$  che non passa per alcun  $y_i$ : in particolare  $\forall i$  le componenti irriducibili di  $Y_i \cap K_2$  hanno dimensione  $n - 2$ , quindi le componenti irriducibili di  $X \cap K_1 \cap K_2$  hanno dimensione  $n - 2$ . Iterando, otteniamo che le componenti irriducibili di  $X \cap \bigcap K_i$  hanno dimensione  $-1$ , cioè sono vuote, e abbiamo (b).

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo per assurdo che  $\dim X < n$ : in tal caso, in modo simile al punto precedente, possiamo prendere  $n$  iperpiani  $H_1, \dots, H_n$  tali che  $X \cap \bigcap H_i = \emptyset$ , che è in contraddizione con (a). D'altra parte, se  $\dim X > n$ , per qualunque scelta di  $K_1, \dots, K_{n+1}$  la dimensione dell'intersezione  $X \cap \bigcap K_i$  non potrebbe calare sotto lo 0, in contraddizione con (b).  $\square$

**Corollario 1.20.8.** Sia  $X \subseteq \mathbb{A}^N$  un chiuso irriducibile di dimensione  $n$ , sia  $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ . Supponiamo  $V(f) \not\subseteq X$ <sup>38</sup>: allora  $X \cap V(f)$  ha dimensione pura  $n - 1$ , oppure  $X \cap V(f) = \emptyset$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\overline{X}$  (risp.  $V(F)$ ) la chiusura proiettiva di  $X$  (risp.  $V(f)$ ), dove  $F = H(f)$ . Osserviamo che  $\overline{X}, V(F)$  soddisfa le ipotesi della Proposizione 1.20.5<sup>39</sup>, quindi  $\overline{X} \cap V(F)$  ha dimensione pura  $n - 1$ . Dato che  $X \cap V(f) = \overline{X} \cap V(F) \cap \mathbb{A}^N$ , le componenti irriducibili di  $X \cap V(f)$  sono quelle di  $\overline{X} \cap V(F)$  non contenute interamente nell'iperpiano all'infinito, e avranno dimensione  $n - 1$ . Se ce n'è almeno una, siamo nel caso in cui  $X \cap V(f)$  ha dimensione pura  $n - 1$ , altrimenti sarà vuoto.  $\square$

**Definizione 1.20.9.** Sia  $X$  uno spazio topologico Noetheriano irriducibile. Una *catena finita di chiusi irriducibili* di lunghezza  $n$  è  $\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$ , dove gli  $Z_i$  sono chiusi irriducibili. Diremo che  $X$  ha *dimensione topologica* (denotata con  $\text{topdim}$ ) pari al sup delle lunghezze delle sue catene finite di chiusi irriducibili.

**Esempio 1.20.10.** Consideriamo  $X = \mathbb{A}^1$ : i suoi chiusi irriducibili sono soltanto i punti e  $\mathbb{A}^1$  stesso, quindi  $\text{topdim } \mathbb{A}^1 = 1$ .

*Osservazione 1.20.11.* Sia  $X \subseteq \mathbb{A}^n$  un chiuso affine irriducibile. C'è una bigezione tra le catene di chiusi irriducibili di  $X$  e le catene di ideali primi di  $\mathbb{A}^n$ , che lascia invariata la lunghezza. In particolare  $\text{topdim } X = \dim_{\mathbb{K}\text{-null}} X$ .

**Teorema 1.20.12.** Sia  $X$  una varietà quasi-proiettiva irriducibile: allora  $\dim X = \text{topdim } X$ .

*Dimostrazione.* Sia  $n := \dim X$  e  $m := \text{topdim } X$ .

( $n \geq m$ ) Sia  $Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_r$  una catena di chiusi irriducibili: per la Proposizione 1.19.15 abbiamo

$$0 \leq \dim Z_0 < \dim Z_1 < \dots < \dim Z_r \leq n,$$

dunque  $r \leq n$ . Per arbitrarietà nella scelta della catena, passiamo al sup e deduciamo  $m \leq n$ .

( $n \leq m$ ) È sufficiente esibire una catena di chiusi irriducibili di lunghezza  $n$ . Se  $X$  è un chiuso affine, possiamo applicare il Corollario 1.20.8 iterativamente per ottenere una catena di chiusi irriducibili di lunghezza  $n$  (scegliendo ad ogni passo un iperpiano opportuno e una componente irriducibile dell'intersezione).

In generale, sia  $\emptyset = U \subseteq X$  un aperto affine (quindi denso in  $X$ ): possiamo<sup>40</sup> considerare una catena di chiusi irriducibili  $Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$  di  $U$  e passare alla chiusura in  $X$ , ottenendo una catena di chiusi irriducibili di lunghezza  $n$ .  $\square$

In realtà valgono fatti un po' più generali di questo, ma ci accontenteremo.

**Teorema 1.20.13** (dimensione delle fibre). Siano  $X, Y$  varietà proiettive irriducibili, sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo surgettivo. Allora la funzione  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R} \mid y \mapsto \dim(f^{-1}(y))$  è semicontinua superiormente (cioè gli insiemi della forma  $\{\varphi(y) \leq n\}$  sono aperti), e ha minimo  $\dim X - \dim Y$ . In particolare,  $\exists U \subseteq Y$  aperto denso tale che  $\dim(f^{-1}(y)) = \dim X - \dim Y$  su  $U$ .

*Dimostrazione omissa.* Anche in questo caso valgono risultati più generali, che non considereremo.

<sup>38</sup>Questa ipotesi a lezione non è stata detta, ma dovrebbe essere necessaria.

<sup>39</sup>Qui servirebbero alcune verifiche che sono state ignorate: si dimostra che passando alla chiusura proiettiva la dimensione non cambia (ragionare su  $\mathbb{K}(X)$ ).

<sup>40</sup>Non è del tutto chiaro il perché, ma pare che abbia senso passando a  $\overline{U}^{\mathbb{A}^N}$  per poi restringere di nuovo a  $U$ .

**Esempio 1.20.14.** Sia  $\widehat{\mathbb{A}^2} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{A}^2$  lo scoppimento con la solita mappa di proiezione. Abbiamo visto che  $\widehat{\mathbb{A}^2} \sim_{\text{bir}} \mathbb{A}^2$ , da cui  $\dim(\widehat{\mathbb{A}^2}) = \dim(\mathbb{A}^2) = 2$ . Osserviamo che  $\forall (x, y) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$   $\varepsilon^{-1}(x, y) = \{\text{pt}\}$ , dunque  $\dim(\varepsilon^{-1}(x, y)) = 0$ ; d'altra parte  $\varepsilon^{-1}(0, 0) = E$  (la curva eccezionale), per cui  $\dim(\varepsilon^{-1}(0, 0)) = 1$ .

Tutto funziona come ci si aspetta nonostante  $\widehat{\mathbb{A}^2}$  e  $\mathbb{A}^2$  non siano varietà proiettive: questo perché (come avevamo accennato), il risultato precedente è più generale di quello enunciato.

Possiamo osservare che  $X = \widehat{\mathbb{A}^2}$  non è neanche una varietà affine: se lo fosse, in particolare le funzioni regolari separerebbero i punti<sup>41</sup>; tuttavia i punti della curva eccezionale non possono essere separati.

**Corollario 1.20.15.** Siano  $X, Y$  varietà proiettive con  $Y$  irriducibile, sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo surgettivo. Supponiamo che  $\exists k \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall y \in Y$   $f^{-1}(y)$  è una varietà irriducibile di dimensione  $k$ . Allora  $X$  è una varietà irriducibile di dimensione  $\dim Y + k$ .

*Dimostrazione.* Sia  $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$  la decomposizione in irriducibili minimale di  $X$ , siano  $f_i : X_i \rightarrow Y$  le restrizioni della mappa  $f$ . Per ciascun  $1 \leq i \leq r$ , separiamo due casi:

1. Se  $f_i$  è surgettiva, sia  $U_i$  un aperto denso di  $Y$  tale che  $\dim(f_i^{-1}(y)) = \dim X_i - \dim Y$  su  $U_i$  (esiste per il teorema precedente). In questo caso diciamo che “ $i$  è di tipo 1”.
2. Se  $f_i$  non è surgettiva, sia  $U_i := Y \setminus f(X_i)$ : per il Corollario 1.15.11 la mappa  $f$  è chiusa, quindi  $U_i$  è un aperto denso di  $Y$ . In questo caso diciamo che “ $i$  è di tipo 2”.

Sia  $U = \bigcap U_i$ : è un aperto denso di  $Y$ . Sia  $\bar{y} \in U$  fissato: si ha  $f^{-1}(\bar{y}) = \bigcup f_i^{-1}(\bar{y})$ . Osserviamo che se  $i$  è di tipo 2, allora  $f_i^{-1}(\bar{y}) = \emptyset$ . Dato che  $f^{-1}(\bar{y})$  è un chiuso irriducibile non vuoto, si deve necessariamente avere  $f_{\bar{i}}^{-1}(\bar{y}) = f^{-1}(\bar{y})$  per qualche indice  $\bar{i}$  di tipo 1, e avremo  $\dim X_{\bar{i}} = \dim Y + k$ .

Sia ora  $y \in Y$  qualunque: si ha  $f_{\bar{i}}^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$ . Osserviamo che  $f_{\bar{i}}^{-1}(y)$  è un chiuso di dimensione  $\geq k$  (infatti  $k = \dim X_{\bar{i}} - \dim Y$  è la dimensione minima delle fibre di  $f_{\bar{i}} : X_{\bar{i}} \rightarrow Y$ ), e  $f^{-1}(y)$  è un chiuso irriducibile di dimensione  $k$ : in particolare avremo  $f_{\bar{i}}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ . Per arbitrarietà di  $y \in Y$ , possiamo concludere  $X_{\bar{i}} = X$ .  $\square$

**Proposizione 1.20.16.** Sia  $d > 1$  un intero, sia  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d)$ , sia  $\Delta = \{[F] \mid F \text{ è singolare}\} \subseteq \mathbb{P}^N$ . Allora  $\Delta$  è un'ipersuperficie irriducibile.

*Dimostrazione.* Ci basta dimostrare che  $\Delta$  è una varietà proiettiva irriducibile di dimensione  $N - 1$ , e applicare la Proposizione 1.20.3. Sia  $I = \{(P, [F]) \mid P \text{ è singolare per } F\} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$ : chiaramente  $p_2 : I \rightarrow \Delta$ . Abbiamo già dimostrato (vedi Lezione 16) che  $I$  è una varietà proiettiva, inoltre  $p_2$  è una mappa chiusa: in particolare  $\Delta$  è un chiuso proiettivo, e sarà irriducibile se lo è  $I$ .

Sia  $f = p_1|_I : I \rightarrow \mathbb{P}^n$ , sia  $\bar{P} = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{P}^n$ : ci chiediamo cosa sia  $f^{-1}(\bar{P})$ . Sicuramente  $f^{-1}(\bar{P})$  è isomorfo alla varietà delle ipersuperfici di grado  $d$  singolari in  $\bar{P}$ : passando alla carta affine  $x_0 \neq 0$ , queste sono determinate dal porre nulli i coefficienti dei monomi di grado  $\leq 1$ , che sono  $n + 1$ , quindi  $f^{-1}(\bar{P}) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ .

Sia ora  $P \in \mathbb{P}^n$  generico: si osserva che  $\mathbb{P}\text{GL}(n + 1)$  agisce algebricamente su  $\mathbb{P}^n$ , su  $\mathbb{P}^N$  e su  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$  (quest'ultima si intende come azione diagonale  $g(P, [F]) := (gP, [gF])$ ). L'azione su  $\mathbb{P}^n$  è transitiva (sono proiettività): in particolare  $\exists g : g\bar{P} = P$ . Si verifica che  $g$  preserva  $I$ <sup>42</sup>: in particolare si verifica che  $f^{-1}(P) \cong f^{-1}(\bar{P}) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ .

<sup>41</sup>Cioè  $\forall x, y \in X$   $\exists \varphi \in \mathbb{K}[X] : \varphi(x) \neq \varphi(y)$ . Vedere la definizione per convincersi che vale.

<sup>42</sup>Nel senso che  $g(P, [F]) \in I \iff (P, [F]) \in I$ , se non ho capito male.

Dato che  $\mathbb{P}^{N-n-1}$  è irriducibile di dimensione  $N - n - 1$ , possiamo applicare il corollario precedente a  $f : I \rightarrow \mathbb{P}^n$  e dedurre che  $I$  è una varietà irriducibile di dimensione  $n + (N - n - 1) = N - 1$ . In particolare,  $\Delta = p_2(I)$  è una varietà irriducibile di dimensione  $\leq N - 1$ .

Resta solo da dimostrare che  $\dim \Delta$  è proprio  $N - 1$ . Vogliamo applicare il Teorema di dimensione delle fibre al morfismo surgettivo  $p_2 : I \rightarrow \Delta$ : è sufficiente esibire  $G \in \Delta$  tale che  $\dim(p_2^{-1}(G)) = 0$ , cioè che abbia un numero finito di punti singolari. Sia  $G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}]_d$  un'ipersuperficie liscia, e considero  $F$  come  $G$  interpretata in  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ : si verifica facilmente che  $[0, \dots, 0, 1]$  è l'unico punto singolare di  $F$ .  $\square$

## 1.21 Lezione 21 (16 Dic 2015)

Ricordiamo che, preso  $X = V(f)$  chiuso di  $\mathbb{A}^n$  ed un punto  $P \in X$ , abbiamo definito lo *spazio tangente a  $X$  in  $P$*  come

$$T_{X,P} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)v_i = 0\}$$

Generalizziamo questo concetto ai chiusi di  $\mathbb{A}^n$

**Definizione 1.21.1.** Dato  $X$  chiuso di  $\mathbb{A}^n$ , ed un punto  $P \in X$ , si definisce lo *spazio tangente a  $X$  in  $P$*  come

$$T_{X,P} = \bigcap_{f \in I(X)} T_{V(f),P}$$

Le due definizioni sopra NON coincidono nel caso in cui  $X$  sia un'ipersuperficie.

**Esempio 1.21.2.**  $X = V(x^2)$  in  $\mathbb{A}^2$  è singolare in ogni punto, dunque il suo spazio tangente è tutto  $\mathbb{A}^2$ , ma  $I(X) = (x)$ , dunque preso  $P = (0, 0)$  l'origine,

$$T_{X,P} \subseteq T_{V(x),P} = \{x = 0\} \neq \mathbb{A}^2$$

In un certo senso, lo spazio tangente non tiene conto delle molteplicità dei fattori, ma solo del luogo di zeri. Infatti, come vedremo con la Proposizione 1.21.3, le due definizioni coincidono nel caso  $f$  sia square-free.

**Proposizione 1.21.3.** Dato  $X$  chiuso di  $\mathbb{A}^n$ , ed un punto  $P \in X$ , siano  $g_1, \dots, g_n$  generatori di  $I(X)$ . Allora

$$T_{X,P} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P)v_i = 0 \quad \forall j\}$$

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $S$  l'insieme

$$S = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P)v_i = 0 \quad \forall j\}$$

Avremo che

$$S = \bigcap_j T_{V(g_j),P} \supseteq T_{X,P}$$

Dato  $f \in I(X)$  questo è una combinazione dei generatori  $f = \sum_j h_j g_j$ , dunque preso un  $v$  in  $S$ ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)v_i = g_j(P) \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(P)v_i + h_j(P) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P)v_i = 0$$

$$\implies S \subseteq T_{V(f),P} \quad \forall f \in I(X) \implies S \subseteq T_{X,P}$$

□

Fissato  $X$  come sopra, studiamo ora la mappa  $\psi : X \rightarrow \mathbb{N}$  definita da

$$P \mapsto \dim T_{X,P}$$

**Proposizione 1.21.4.** La mappa

$$P \mapsto \dim T_{X,P}$$

é semicontinua superiore

*Dimostrazione.* Ricordiamo che una funzione é *semicontinua superiore* se la controimmagine delle semirette chiuse  $[r, +\infty]$  é chiusa.

Notiamo che  $T_{X,P}$  é intersezione di iperpiani ortogonali ai gradienti delle  $g_i$ , dunque la sua codimensione é il massimo numero di gradienti linearmente indipendenti. In altre parole, chiamata  $A$  la matrice che ha per righe i gradienti dei  $g_i$ , allora

$$\dim T_{X,P} = n - rk(A)$$

da ciò possiamo descrivere la controimmagine di  $[r, +\infty]$  come

$$\dim T_{X,P} \geq r \iff n - r \geq rk(A)$$

ossia tramite le condizione che ogni minore di stazza maggiore di  $n - r$  sia zero<sup>43</sup>, che é una condizione chiusa. □

**Corollario 1.21.5.** Sia  $m = \min_{P \in X} \psi(P)$ . Allora  $U = \{P \in X | \psi(P) = m\}$  é aperto.

*Dimostrazione.*

$$U = \psi^{-1}(-\infty, m] = (\psi^{-1}[m + 1, +\infty))^C$$

□

**Definizione 1.21.6.** Dato  $X$  chiuso di  $\mathbb{A}^n$ , con  $m = \min_{P \in X} \psi(P)$ , allora  $P$  é un punto liscio se  $\psi(P) = m$ , e si indicano con

$$X_{sm} = \{P \in X | \psi(P) = m\}$$

Nel caso di un'ipersuperficie  $X = V(f)$ , con  $f$  square-free non costante, allora chiaramente  $rk(A)$  può essere solo 1 o 0 in quanto  $A$  ha una sola riga, ed é zero solo quando il gradiente é nullo, ossia quando la curva é singolare nel punto. Se escludiamo il caso in cui tutti i punti sono singolari, otteniamo che le nostre definizioni di punti lisci coincidono, e  $\min_{P \in X} \psi(P) = n - 1$ . Però questo caso é impossibile da ottenere per il seguente risultato

**Proposizione 1.21.7.** Se In un'ipersuperficie affine  $X = V(f)$  tutti i punti sono singolari, allora  $f$  non é square-free oppure é una costante.

---

<sup>43</sup>Dove con "minore" intendiamo il determinante della sottomatrice quadrata

*Dimostrazione.* Poniamo che  $f$  sia square-free. Abbiamo che, per Nulstellensatz

$$V(f) \subseteq V\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \implies f \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i$$

ma le derivate parziali hanno tutte grado minore di  $f$  in almeno una coordinata, dunque sono identicamente zero. Se la caratteristica del campo  $\mathbb{K}$  è zero, allora  $f$  è una costante. Se la caratteristica è positiva, e  $f$  non è una costante, allora

$$f(x) = g(x_1^p, \dots, x_n^p) = \sum a_I x^{pI} = \sum b_I^p x^{pI} = \left(\sum b_I x^I\right)^p$$

e pertanto non è square-free. □

**Definizione 1.21.8.** Dato  $X$  chiuso di  $\mathbb{A}^n$ , ed un punto  $P \in X$ , una *derivazione di  $\mathbb{K}[X]$  in  $P$*  è una funzione  $\mathbb{K}$ -lineare  $\delta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$  per cui vale la *regola di Leibnitz*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(P) + f(P)\delta(g)$$

Indichiamo tali derivazioni con  $D_{X,P}$

*Osservazione 1.21.9.*  $D_{X,P}$  è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale. Inoltre

$$\delta(1) = 2\delta(1) \implies \delta(1) = 0 \implies \delta(\mathbb{K}) = 0 \quad \forall \delta \in D_{X,P}$$

*Osservazione 1.21.10.* Le derivazioni parziali nel punto  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_P$  sono ovviamente delle derivazioni.

**Teorema 1.21.11.**

$$T_{\mathbb{A}^n, P} \cong D_{\mathbb{A}^n, P}$$

*Dimostrazione.* Prendiamo la funzione

$$\varphi : T_{\mathbb{A}^n, P} \rightarrow D_{\mathbb{A}^n, P} \mid v \mapsto \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P$$

Questo è un omomorfismo di  $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali, dove le immagini sono derivazioni poiché combinazioni lineari di derivate parziali nel punto. È iniettivo poiché

$$\varphi(v) = 0 \implies \varphi(v)(x_i) = v_i = 0 \quad \forall i \implies v = 0$$

Se chiamiamo  $M = (\{x_i - a_i\}_i)$ , dove  $P = (a_i)_i$ , allora una qualsiasi derivazione in  $P$  soddisfa  $\delta(M^2) = 0$ , in quanto

$$\delta((x_i - a_i)(x_j - a_j)) = \delta((x_i - a_i))(a_j - a_j) + (a_i - a_i)\delta((x_j - a_j)) = 0$$

Se chiamiamo  $w_i = \delta(x_i - a_i)$ , allora

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{K}[x] \implies f(x) &= f(P) + \sum_i (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) + z \quad z \in M^2 \\ \implies \delta(f) &= \sum_i w_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \varphi(w)(f) \end{aligned}$$

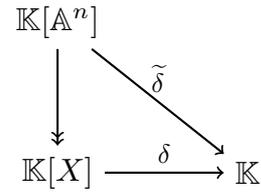
e dato che<sup>44</sup>  $T_{\mathbb{A}^n, P} = T_{V(0), P} = \mathbb{K}^n$ , allora  $\varphi$  è anche suriettiva. □

---

<sup>44</sup>sotto l'ipotesi di campo algebricamente chiuso - è bene ricordarlo qualche volta

Prendiamo ora un chiuso affine  $X$  e  $\delta$  una derivazione di  $\mathbb{K}[X]$  in  $P$ . La mappa suriettiva da  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$  a  $\mathbb{K}[X]$  produce una derivazione  $\tilde{\delta}$  di  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$  in  $P$ , dunque del tipo

$$\tilde{\delta} = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P$$



Da questo ricaviamo che

**Teorema 1.21.12.**

$$T_{X,P} \cong D_{X,P}$$

*Dimostrazione.* Dal diagramma sopra abbiamo che  $D_{X,P}$  sono le derivazioni di  $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$  che si annullano su  $I(X)$ , il che é equivalente ad imporre che  $\delta$  si annulli su  $g_i$  generatori di  $I(X)$ , in quanto

$$f \in I(X) \implies f = \sum_i h_i g_i \implies \delta(f) = \sum_i \delta(h_i) g_i(P) + \sum_i h_i(P) \delta(g_i) = 0$$

dunque avremo

$$\begin{aligned} D_{X,P} &= \{ \delta \in D_{\mathbb{A}^n,P} \mid \delta(I(X)) = 0 \} = \{ v \in T_{\mathbb{A}^n,P} \mid \varphi(v)(g_j) = 0 \ \forall j \} = \\ &= \{ v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(P) v_i = 0 \ \forall j \} = T_{X,P} \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.21.13.** Dato  $P \in X$  chiuso affine, e  $M = I(\{P\})$  l'ideale massimale relativo al punto  $P$  in  $\mathbb{K}[X]$ , allora

$$T_{X,P} \cong \left( \frac{M}{M^2} \right)^*$$

*Dimostrazione.* Usiamo che  $T_{X,P} \cong D_{X,P}$ . Abbiamo già visto che le derivazioni in  $P$  si annullano su  $M^2$ , e che sono univocamente determinate dalle immagini su  $(x_i - a_i)$ . Dato che  $M/M^2$  é uno spazio vettoriale generato dalle classi di  $x_i - a_i$  su  $K[X]$ , allora possiamo restringere le derivazioni su questo spazio tramite  $h$ , che le manda in funzioni  $\mathbb{K}$ -lineari, ossia nel duale di  $M/M^2$ .

$$h : D_{X,P} \rightarrow \left( \frac{M}{M^2} \right)^*$$

Questa é iniettiva poiché

$$\begin{aligned} h(\delta)[x_i - a_i] = 0 \ \forall i &\implies \delta[x_i - a_i] = 0 \ \forall i \\ \implies \delta[f(x)] &= \delta \left[ f(P) + \sum_i (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) + z \right] = 0 \ \forall f(x) \end{aligned}$$

É anche suriettiva perché possiamo scrivere la mappa inversa

$$h^{-1} : \left( \frac{M}{M^2} \right)^* \rightarrow D_{X,P} \mid \phi \mapsto \sum_i \phi[x_i - a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P$$

dove l'immagine é una derivazione su  $X$  poiché preso  $f \in I(X)$ , avremo

$$\begin{aligned} h^{-1}(\phi)(f(x)) &= \sum_i \phi[x_i - a_i] \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \\ &= \phi \left[ f(P) + \sum_i (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) + z \right] = \phi[f(x)] = \phi(0) = 0 \end{aligned}$$

□

Per semplicitá, d'ora in poi poniamo  $X$  irriducibile.

**Definizione 1.21.14.** Preso  $P \in X$ , allora indichiamo le funzionali razionali di  $X$  definite su  $P$  come

$$\mathcal{O}_{X,P} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{K}[X] \quad g(P) \neq 0 \right\}$$

*Osservazione 1.21.15.*  $\mathcal{O}_{X,P}$  é locale con ideale massimale

$$\mathcal{M} = \{h(x) \in \mathcal{O}_{X,P} \mid h(P) = 0\}$$

Infatti tutti gli altri elementi sono invertibili. In realtà vale anche che

$$M = \{h(x) \in \mathbb{K}[X] \mid h(P) = 0\} \implies \mathcal{O}_{X,P} = \mathbb{K}[X]_M, \quad \mathcal{M} = M\mathcal{O}_{X,P}$$

**Proposizione 1.21.16.** Con le notazioni sopra,

$$\frac{M}{M^2} \cong \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}$$

*Dimostrazione.* ovviamente, avremo  $M \subseteq \mathcal{M}$ , dunque possiamo definire la mappa tra spazi vettoriali

$$\psi : M \rightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}$$

il suo kernel é

$$\ker \psi = \{f(x) \in M \mid f(x) \in \mathcal{M}^2\} = \mathcal{M}^2 \cap \mathbb{K}[X] = M^2$$

dove l'ultima eguaglianza é vera poiché

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathcal{M}^2 \cap \mathbb{K}[X] &\implies p(x)q(x) = \sum_i a_i(x)b_i(x) \quad a_i(x), b_i(x) \in M \quad q(x) \notin M \\ &\implies p(x) = \frac{p(x)q(x) - p(x)[q(x) - q(P)]}{q(P)} \in M^2 \end{aligned}$$

preso ora un elemento  $f/g \in \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ , avremo

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[ \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{(g(x) - g(P))f(x)}{g(P)g(x)} \right] = [f(x)]$$

dove  $(g(x) - g(P))f(x) \in \mathcal{M}^2$ . Quindi  $\psi$  é suriettiva, e questo dimostra la tesi. □

Estendendo tutte le definizioni a varietà  $X$  quasi-proiettive, e definendo

$$T_{X,P} \cong \left( \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2} \right)^*$$

allora scopriamo che

### Proposizione 1.21.17.

1. Se  $P \in U \subseteq X$  é un aperto affine, allora  $T_{U,P} \cong T_{X,P}$
2.  $\psi : P \mapsto \dim T_{X,P}$  é semicontinua superiore

Dunque possiamo estendere la definizione di punti lisci come

$$X_{sm} = \{P \in X \mid \psi(P) = \min_{Q \in X} \psi(Q)\}$$

e risulterà come prima che  $X_{sm}$  é aperto. Se però  $X$  non é irriducibile (come abbiamo supposto finora) c'è bisogno di qualcosa di più preciso.

Prese  $X, Y$  varietà q.p., e  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo, questo induce il pullback  $f^* : \mathbb{K}(Y) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ . Se  $P \in X$  e  $Q = f(P)$ , allora  $f^*$  ristretta a  $\mathcal{M}_Q \subseteq \mathbb{K}(Y)$  ha immagine in  $\mathcal{M}_P \subseteq \mathbb{K}(X)$ .

**Definizione 1.21.18.** passando ai quozienti, il pullback induce una mappa che chiamiamo *codifferenziale*

$$(df)_P^t : \frac{\mathcal{M}_Q}{\mathcal{M}_Q^2} \rightarrow \frac{\mathcal{M}_P}{\mathcal{M}_P^2}$$

Questa mappa gode delle proprietà functoriali, quali

- $(d(Id))_P^t = Id$
- Data  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ , e  $P \in X$ ,  $Q = f(P)$ ,  $R = g(Q)$ , allora

$$(d(g \circ f))_P^t = (df)_P^t \circ (dg)_Q^t$$

- Se  $f$  é un isomorfismo, allora lo é anche  $(df)_P^t$

**Teorema 1.21.19.** Se  $X$  é una varietà q.p. irriducibile, allora

$$\dim T_{X,P} = \dim X \iff P \in X_{sm}$$

*Dimostrazione.* É equivalente a chiedere che

$$\dim X = \min_{P \in X} \psi(P)$$

Se  $n = \dim X$ , allora esiste un aperto  $U$  di  $X$  isomorfo ad un aperto di un'ipersuperficie affine in  $\mathbb{A}^{n+1}$ , ed in particolare, dato che gli spazi tangenti si corrispondono, la dimensione minima di questi sarà  $n$  su  $U$ . Dato che  $X_{sm}$  é aperto e  $X$  irriducibile, allora  $U$  contiene almeno un punto liscio, il che conclude.  $\square$

## 1.22 Lezione 22 (17 Dic 2015)

**Esercizio 1.22.1.** Provare che tutti i punti di  $\mathbb{A}^n$  sono lisci

Fatto questo, è facile vedere che anche tutti i punti di  $\mathbb{P}^n$  sono lisci, in quanto è una proprietà locale, e dunque basta testarlo sulle carte. Allo stesso modo si trattano  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  e  $Gr(k, n)$ . Tutti questi sono esempi di

**Definizione 1.22.2.** Se esiste  $G$  gruppo algebrico che agisce su  $X$  varietà, allora si dice che  $X$  è uno *spazio omogeneo*.

In un tale spazio, abbiamo che ogni  $g \in G$  elemento del gruppo algebrico è un isomorfismo dello spazio, ed essendo un isomorfismo tra gli spazi tangenti, manda punti lisci in punti lisci.

**Fatto 1.22.3.** Per ogni coppia di punti lisci  $(P, Q)$  in  $X$  spazio omogeneo, esiste  $g \in G$  tale che  $g(P) = Q$ <sup>45</sup>

Mettiamoci a caratteristica zero. Se  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  è un chiuso, una maniera per testare se i punti sono lisci è passare agli affini e calcolare  $\dim T_{X,P}$  su di essi. In realtà questo si può fare direttamente sul proiettivo, poiché, se per esempio  $Y = X \cap U_0$ , allora

$$T_{Y,P} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)v_i = 0 \quad \forall f \in I(Y)\}$$

$$T_{X,P} = \{v \in \mathbb{P}^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)v_i = 0 \quad \forall F \in I(X)_{\mathbb{P}^n}\}$$

dove  $I(X)_{\mathbb{P}^n}$  è il generato dei polinomi omogeneizzati di  $I(Y)$ , dunque i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione.

Cambiamo discorso, e incominciamo a studiare il numero di rette distinte dentro un'ipersuperficie  $X$  di grado  $d$  in  $\mathbb{P}^3$ , ponendoci a caratteristica zero.

- se  $d = 1$ , l'ipersuperficie è un iperpiano, e contiene infinite(al quadrato) rette distinte.
- se  $d = 2$  abbiamo una quadrica, che si può rappresentare come una matrice 4 per 4.
  - se  $X$  ha rango massimo, allora si può ridurre nella forma  $x_0x_3 - x_1x_2$ , che sappiamo essere isomorfo, tramite la mappa di Segre, a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , e contiene due famiglie infinite di rette
  - Se  $X$  ha rango 3, allora si riduce nella forma  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ . Preso un punto  $P$  su  $x_3 = 0$ , la quadrica contiene la retta che passa per  $P$  e il punto  $[0, 0, 0, 1]$ , dunque contiene infinite rette.
  - Se  $X$  ha rango 2, si riduce a  $x_0x_1$ , che contiene tutti i punti della forma  $[0, a, b, c]$ , dunque un intero  $\mathbb{P}^2$  con infinite rette
  - Se  $X$  ha rango 1, si riduce a  $x_0^2$  che coincide con l'iperpiano  $x_0 = 0$ , e si ritorna al caso  $d = 1$

Se  $d \geq 3$ , la questione diventa più interessante. Prendiamo

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]_d) \quad N = \binom{d+3}{3} - 1$$

e consideriamo

$$I = \{(l, [F]) \mid l \subseteq V(F)\} \subseteq Gr(2, 4) \times \mathbb{P}^N$$

ossia le coppie retta-ipersuperficie con la retta inclusa nell'ipersuperficie. La sua proiezione sul proiettivo dà le ipersuperfici di grado  $d$  che contengono almeno una retta.

**Proposizione 1.22.4.**  $I$  è chiuso

---

<sup>45</sup>non so se sia vero..

*Dimostrazione.* sia  $U = \{p_{01} \neq 0\} \subseteq Gr(2, 4)$  una carta, e mostriamo che  $I \cap (U \times \mathbb{P}^N)$  è chiuso. presa  $l \in Gr(2, 4)$  retta generata da  $v_1, v_2 \in \mathbb{P}^3$ , allora

$$l \subseteq V(F) \iff G(s, t) = F(sv_1 + tv_2) = 0 \quad \forall s, t \in \mathbb{K}$$

Sappiamo che  $G(s, t)$  è omogeneo in  $s, t$  di grado  $d$ , ma deve essere identicamente nulla, dunque tutti i coefficienti devono essere zero, e questi sono polinomiali nelle variabili  $v_1 = [1, 0, a, b]$ ,  $v_2 = [0, 1, c, d]$  e nei coefficienti di  $F$ , dunque impongono condizioni chiuse.  $\square$

**Corollario 1.22.5.**  $p_2 : I \rightarrow \mathbb{P}^N$  è chiusa

Studiamo l'altra proiezione  $p_1 : I \rightarrow Gr(2, 4)$ .  
Se  $l_0 = \{x_2 = x_3 = 0\}$  allora

$$p_1^{-1}(l_0) \cong \{[F] \in \mathbb{P}^N \mid l_0 \subseteq V(F)\} = \{[F] \in \mathbb{P}^N \mid F(x_0, x_1, 0, 0) \equiv 0\}$$

che è definito dall'annullarsi dei coefficienti del tipo  $x_0^k x_1^{d-k}$  ossia da  $d + 1$  condizioni lineari indipendenti, pertanto  $p_1^{-1}(l_0) \cong \mathbb{P}^{N-d-1}$ .

Il gruppo  $\mathbb{P}GL(4)$  agisce su  $Gr(2, 4) \times \mathbb{P}^N$ , o meglio, agisce sulle variabili  $x_0, \dots, x_3$ , preservando  $I$ , e le proiezioni commutano con l'azione. Dato che  $p_1 \circ g = g$ , allora l'azione porta fibre in fibre, ed in particolare, dato che è transitiva su  $Gr(2, 4)$ , allora per tutte le rette  $l$  si ha  $p_1^{-1}(l) \cong \mathbb{P}^{N-d-1}$ . Abbiamo concluso che tutte le fibre sono irriducibili, hanno la stessa dimensione, e anche  $Gr(2, 4)$  è irriducibile, pertanto anche  $I$  è irriducibile di dimensione

$$\dim Gr(2, 4) + N - d - 1 = N - d + 3$$

e di conseguenza, anche  $p_2(I)$  è irriducibile, di dimensione  $\leq N - d + 3$ . Se  $d \geq 4$ , allora  $\dim p_2(I) < N$ , e pertanto è un chiuso proprio, dunque c'è un aperto denso di polinomi di grado  $d \geq 4$  che non contiene rette.

Poniamoci dunque nel caso  $d = 3$ , e dimostriamo che

**Proposizione 1.22.6.**  $p_2(I)$  è suriettiva

*Dimostrazione.* Sappiamo dal teorema della fibra<sup>46</sup> che esiste  $V \subseteq p_2(I)$  aperto tale che tutte le fibre su di esso hanno la stessa dimensione, pari a  $N - \dim p_2(I)$ , e questa è la minima dimensione di una fibra. Se troviamo dunque  $[F] \in p_2(I)$  con fibra di dimensione zero, allora  $N = \dim p_2(I) = \dim \mathbb{P}^N$ , e pertanto  $p_2$  è suriettiva.

La cubica in questione è  $F = x_1 x_2 x_3 - x_0^3$ , infatti nella carta affine  $x_0 = 1$  diviene  $f = x_1 x_2 x_3 - 1$ , e intersecato con un qualsiasi piano  $x_1 - ax_2 - bx_3$  si ottiene la cubica piana  $(ax_2 + bx_3)x_2 x_3 - 1$  irriducibile per ogni scelta di  $a, b$ , e dunque non contiene nessuna retta affine. Nell'iperpiano  $x_0 = 0$  invece contiene esattamente le 3 rette  $\{x_0 = x_i = 0\} \quad i = 1, 2, 3$ .  $\square$

Ciò ci dice che ogni cubica in  $\mathbb{P}^3$  contiene almeno una retta. In realtà in seguito vedremo un teorema che ci dirà esattamente il numero di rette contenuto in una cubica liscia. Prima di arrivarci, abbiamo bisogno ancora di un paio di lemmi

**Proposizione 1.22.7.** Date tre rette concorrenti in una cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$ , allora queste sono complanari.

*Dimostrazione.* Dato che le tre rette sono contenute nella cubica, allora appartengono tutte al tangente alla cubica nel punto di concorrenza, e questo è un iperpiano poiché la cubica è liscia.  $\square$

<sup>46</sup>perché  $I$  è una varietà proiettiva? perché è chiuso in  $Gr(2, 4) \times \mathbb{P}^N$ ?

**Proposizione 1.22.8.** Dato  $H$  un iperpiano, e  $F$  l'equazione di una cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$ , allora  $F|_H$  non contiene una retta doppia.

*Dimostrazione.* Poniamo con un cambio di coordinate che  $H = \{t = 0\}$ , dove stiamo prendendo le coordinate omogenee  $x, y, z, t$ . Avremo che  $F|_H = F(x, y, z, 0)$  sarà una cubica piana, a meno che  $t|F$ , ma in questo caso  $F$  non sarebbe irriducibile né liscia. Se supponiamo per assurdo che contenga una retta doppia, allora, a meno di cambio di coordinate, possiamo imporre la retta  $\{x = 0\}$ , e dunque  $F|_H = x^2L(x, y, z)$  dove  $L$  è lineare. Espandendo  $F$  otteniamo

$$F = x^2L(x, y, z) + tQ_2(x, y, z) + t^2(\dots)$$

dove  $Q_2$  è zero o una quadrica. Avremo in ogni caso che  $Q_2|_H \cap \{x = 0\}|_H$  è non vuoto per Bezout, dunque esiste  $P = [0, a, b, 0]$  su cui  $Q_2$  si annulla. Avremo

$$\partial_x F(P) = \partial_y F(P) = \partial_z F(P) = 0 \quad \partial_t F(P) = Q_2(P) = 0$$

dunque  $P$  è un punto non liscio di  $F$ , assurdo. □

**Proposizione 1.22.9.** Presa  $X$  una cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$ , e  $l_0$  una retta contenuta in  $X$ , allora esistono esattamente cinque iperpiani  $H_i$  che passano per  $l_0$  e per cui  $F|_{H_i}$  sia l'unione di tre rette distinte

*Dimostrazione.* Rimandata alla lezione dopo □

Con questi risultati, siamo pronti a dimostrare

**Teorema 1.22.10** (delle 27 rette). Una cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$  contiene esattamente 27 rette, e sono tutte distinte

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $F$  l'equazione della cubica. Dalla proposizione 1.22.8 sappiamo che non può contenere rette doppie. Inoltre, data  $l_0$  retta appartenente alla cubica, che esiste per proposizione 1.22.6, e un qualsiasi iperpiano  $H$  passante per essa, avremo che  $F|_H$  è una cubica piana contenente una retta, dunque può essere solo

- 3 rette non concorrenti
- 3 rette concorrenti
- una retta e una conica irriducibile

Dalla proposizione 1.22.9, sappiamo che i primi due casi si realizzano esattamente con 5 iperpiani, dunque  $l_0$  interseca esattamente altre 10 rette distinte contenute nella cubica. Fissato  $H$  uno dei 5 iperpiani, con  $F|_H = l_0 + l_1 + l_2$ , e  $r$  una qualsiasi retta contenuta nella conica diversa da  $l_0, l_1, l_2$ , abbiamo che

$$r \cap H \neq \emptyset \quad r \not\subseteq H \implies r \cap H = \{P\} \in F|_H = l_0 + l_1 + l_2$$

dunque  $r$  interseca una delle tre rette  $l_0, l_1, l_2$ , e ne interseca solo una, poiché altrimenti, per proposizione 1.22.7,  $r$  sarebbe complanare alle  $l_i$ , ossia sarebbe contenuta in  $H$ .

Dato che ognuna delle  $l_i$  interseca 8 rette distinte tra loro e diverse dalle altre due, allora in tutto ci sono  $3 + 8 \cdot 3 = 27$  rette contenute nella cubica. □

## 1.23 Lezione 23 (18 Dic 2015)

Dimostriamo la proposizione della volta scorsa

**Proposizione 1.23.1.** Presa  $X$  una cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$ , e  $l_0$  una retta contenuta in  $X$ , allora esistono esattamente cinque iperpiani  $H_i$  che passano per  $l_0$  e per cui  $F|_{H_i}$  sia l'unione di tre rette distinte

*Dimostrazione.* Fissiamo  $l_0 = \{x_2 = x_3 = 0\}$ , così, presa  $F$  l'equazione della cubica, ogni suo monomio deve contenere  $x_2$  o  $x_3$ , ossia possiamo riscriverla come

$$F = A(x_2, x_3)x_0^2 + B(x_2, x_3)x_1^2 + 2C(x_2, x_3)x_0x_1 + \\ + 2D(x_2, x_3)x_0 + 2E(x_2, x_3)x_1 + H(x_2, x_3)$$

Un iperpiano passante per  $l_0$  ha come equazione  $H = ax_2 - bx_3$ , con  $[a, b] \in \mathbb{P}^1$ , e la funzione  $F(x_0, x_1, b, a)$  è esattamente uguale a  $F|_H - l_0$ , ed è una conica irriducibile o due rette distinte. Se identifichiamo  $H - l_0$  con  $\mathbb{A}^2$ , allora otteniamo una conica affine, e vogliamo trovare  $a, b$  per cui la conica è riducibile, ma questo è vero se e solo se la matrice della conica è singolare, ossia

$$\det \begin{pmatrix} A(x_2, x_3) & C(x_2, x_3) & E(x_2, x_3) \\ C(x_2, x_3) & B(x_2, x_3) & D(x_2, x_3) \\ E(x_2, x_3) & D(x_2, x_3) & G(x_2, x_3) \end{pmatrix} = R(x_2, x_3) = 0$$

$R$  è zero oppure un polinomio omogeneo di grado 5, ma se fosse zero, allora  $F$  sarebbe riducibile, assurdo. Dunque esistono cinque radici, ma possono essere ripetute. Riparametizziamo in modo che  $[1, 0]$  sia una radice di  $R$ , ossia  $x_3 | R$ . Ricordando che una conica di rango 1 è una retta doppia, e che una cubica non contiene rette doppie, ricaviamo che la conica in  $[1, 0]$  ha rango 2, dunque si può mettere in forma  $x_0^2 + x_1^2$ , ossia in modo che

$$\begin{pmatrix} A(1, 0) & C(1, 0) & E(1, 0) \\ C(1, 0) & B(1, 0) & D(1, 0) \\ E(1, 0) & D(1, 0) & G(1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo implica che  $P = [0, 0, 1, 0] \in X$  e  $X$  è liscia in  $P$  se e solo se  $\Delta G(1, 0) \neq 0$ . Dato che inoltre  $G(1, 0) = 0$  otteniamo che  $G = x_2^2 x_3 + x_3^2 (\dots)$ , e unendo con le altre relazioni abbiamo

$$x_3 \nmid A, B \quad x_3 | C, D, E, G \quad x_3^2 \nmid G$$

$$R = ABG + 2CDE - BE^2 - AD^2 - GC^2 \equiv ABG \neq 0 \pmod{x_3^2}$$

dunque  $[1, 0]$  è una radice semplice di  $R$ , e di conseguenza tutte le radici sono semplici.

Con questo si conclude che esistono 5 iperpiani distinti che passano per  $l_0$  sui quali  $F$  si scompone in 3 rette.  $\square$

**Corollario 1.23.2.** Data  $X$  cubica liscia di  $\mathbb{P}^3$ , esistono  $r, s$  rette sghembe che appartengono a  $X$

Date due rette sghembe  $r, s$  di  $\mathbb{P}^3$ , possiamo definire una proiezione di  $\mathbb{P}^3$  su  $s$  di centro  $r$

$$\pi_r : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow s$$

definita su  $\mathbb{P}^3 - r$ . Infatti, preso un punto  $P \in \mathbb{P}^3 - (r + s)$ , esiste un unico iperpiano  $H$  che contenga  $P$  e  $s$ , e  $r$  interseca  $H$  in esattamente un punto  $Q$ . L'immagine della proiezione sarà

dunque  $L(Q, P) \cap s$ . Se invece  $P \in s$ , allora l'immagine é se stesso.

Con un cambio di coordinate, possiamo porre  $r = \{x_0 = x_1 = 0\}$  e  $s = \{x_2 = x_3 = 0\}$ , cosí se  $P = [a, b, c, d]$ , allora  $Q = [0, 0, c, d]$  e  $\pi_r(P) = [a, b, 0, 0]$ .

Questa proiezione non si può estendere ai punti di  $r$ , ma se prendiamo  $X$  una cubica liscia che contiene  $r$ , ossia del tipo

$$F = x_0A(x) + x_1B(x)$$

con  $A, B$  coniche, allora definiamo la mappa

$$f : X \rightarrow s : [x, y, z, t] \mapsto \begin{cases} [x, y, 0, 0] & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ [B(x, y, z, t), -A(x, y, z, t), 0, 0] & \text{se } (A, B) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Notiamo che  $x = y = A = B = 0$  vorrebbe dire che  $X$  non é liscia, dunque le due carte ricoprono tutto  $X$  e si incollano bene sull'intersezione. Inoltre, sulla prima carta  $f$  coincide con la proiezione, dunque  $\pi_r$  si estende a  $r$  su tutte le cubiche lisce che la contengono.

Prendiamo ora  $X$  cubica liscia che contiene sia  $r$  che  $s$ , e chiamiamo ora  $g : X \rightarrow r$  il morfismo indotto dalla proiezione di centro  $s$  su  $r$ . Inoltre definiamo

$$\psi : X \rightarrow r \times s \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 : P \mapsto (f(P), g(P))$$

Questo é un morfismo birazionale che contrae tutte le rette che intersecano  $r$  ed  $s$ . Cerchiamone l'inversa.

Dato  $P \in X$  e  $\psi(P) = (A, B)$ , allora

$$P, A, B \in L(A, B) \cap X = \psi^{-1}(A, B)$$

dunque la fibra di un punto può essere solo una retta o tre punti. Le rette contenute in  $X$  sono finite, dunque possiamo definire l'inversa di  $\psi$  come

$$\psi^{-1} : r \times s \dashrightarrow X : (A, B) \mapsto P$$

**Esercizio 1.23.3.**  $\psi^{-1}$  é razionale

**Definizione 1.23.4.** Una varietà irriducibile  $X$  di dimensione  $n$  é *razionale* se  $X \sim_{bir} \mathbb{P}^n$  ( $\sim_{bir} \mathbb{A}^n$ )

*Osservazione 1.23.5.* É equivalente a dire che  $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$

**Definizione 1.23.6.** Una varietà irriducibile  $X$  di dimensione  $n$  é *unirazionale* se esiste una mappa razionale dominante  $\mathbb{P}^n \dashrightarrow X$

*Osservazione 1.23.7.* É equivalente a dire che  $\mathbb{K}(X) \hookrightarrow \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$

Ovviamente una varietà razionale é anche unirazionale, ma la maggior parte delle varietà non sono unirazionali, infatti un'ipersuperficie liscia in  $\mathbb{P}^n$  di grado  $d > n$  non é unirazionale.

**Teorema 1.23.8** (Luroth). Dati  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{F}$  campi per cui  $\mathbb{K} \subsetneq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}(t)$ , allora esiste un elemento  $u \in \mathbb{K}(t) - \mathbb{K}$  per cui  $\mathbb{F} = \mathbb{K}(u) \cong \mathbb{K}(t)$

**Corollario 1.23.9.** Una curva unirazionale é razionale

Questo vale in dimensione 1, e se il campo é algebricamente chiuso di caratteristica zero, vale anche in dimensione 2. In dimensioni piú alte, invece, non é vero.

**Fatto 1.23.10** (Fano). Ogni una cubica liscia in  $\mathbb{P}^4$  é unirazionale, ma non é razionale

Se  $X$  é una cubica liscia in  $\mathbb{A}^4$ , con coordinate  $x, y, z, t$ , poniamo  $0 \in X$ , e che  $T_{X,0} = \{t = 0\}$ , cosí, chiamata  $f$  l'equazione della cubica,

$$f = t + Q_2(x, y, z, t) + C_3(x, y, z, t)$$

$Q_2$  e  $C_3$  sono omogenee, dunque si possono vedere in  $\mathbb{P}^3$ , e intersecando con  $\{t = 0\}$ , otteniamo che si intersecano in almeno un punto per Bezout. Chiamiamolo  $P = (a, b, c, 0)$ , e sappiamo che  $f$  si annulla sulla retta  $\lambda P$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Bezout ci dice che in generale ci sono 6 di tali punti  $P$  distinti, dunque in generale  $X$  contiene 6 rette distinte passanti per  $P$ .

Nota: questo é un abbozzo della dimostrazione dell'unirazionalit . Sistemarla e provare la non razionalit  é un delirio.

**Fatto 1.23.11** (Problema Aperto). Le cubiche generiche lisce di  $\mathbb{P}^5$  sono unirazionali. Quali di queste sono razionali?