Appunti di Gruppi e Rappresentazioni
Prof. Gaiffi

Giovanni Barbarino

Indice

Capitolo 1

Teoria delle Rappresentazioni

In questo corso, diamo per noto la definizione di gruppo, e, a meno che non sia specificato, prenderemo sempre i nostri gruppi con la notazione moltiplicativa. Ricordiamo la definizione di modulo su un anello (non necessariamente commutativo)

Definizione 1.1. Dato Λ anello con identità, e M un gruppo abeliano, si dice che M é un Λ-*modulo sinistro* se ho una mappa

$$f : \Lambda \times M \to M$$

che soddisfi

- $f(1, m) = m \quad \forall m \in M$
- $f(\lambda_1\lambda_2, m) = f(\lambda_1, f(\lambda_2, m)) \quad \forall m \in M \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$
- $f(\lambda_1 + \lambda_2, m) = f(\lambda_1, m) + f(\lambda_2, m) \quad \forall m \in M \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$
- $f(\lambda, m_1 + m_2) = f(\lambda, m_1) + f(\lambda, m_2) \quad \forall m_1, m_2 \in M \quad \forall \lambda \in \Lambda$

1.1 Rappresentazioni

Dato un gruppo G, definiamo una sua rappresentazione come

Definizione 1.2. Dato un campo K, una K-*rappresentazione* di un gruppo G é una coppia composta da un K spazio vettoriale V, e da un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \to GL(V)$$

Spesso si omette l'omomorfismo, e si dice che lo spazio V é la rappresentazione di G, sottintendendo l'azione di G su di esso. V viene inoltre anche chiamato G-*modulo*. Quando invece sarà opportuno specificarlo, scriveremo (V, ρ).

Una delle notazioni che useremo costantemente sarà omettere l'omomorfismo nell'azione del gruppo, ossia scrivere

$$gv := \rho(g)(v) \qquad \forall g \in G,\ v \in V$$

Definizione 1.3. Una K-rappresentazione di un gruppo G si dice *finita* se lo spazio vettoriale V é finitamente generato.

Durante tutto il corso studieremo solo le rappresentazioni finite dei gruppi, e per la prima parte, considereremo solo gruppi finiti. Inoltre, siamo interessati principalmente alle rappresentazioni complesse, ossia quando $K = \mathbb{C}$. Prendiamo dunque un gruppo G (anche non finito), e definiamo la sua algebra di gruppo

Definizione 1.4. Dato un gruppo G e un campo K, allora la sua *algebra di gruppo* KG é il K spazio vettoriale generato dalla base $\{ e_g \}_{g\in G}$ con l'operazione di moltiplicazione data da

$$e_g \cdot e_h = e_{gh}$$

Esempio 1. Preso $G = S_3$ il gruppo delle permutazioni di tre elementi, allora la sua algebra di gruppo sarà

$$KG = \left\{ a_1 e_{Id} + a_2 e_{(1,2)} + a_3 e_{(2,3)} + a_4 e_{(3,1)} + a_5 e_{(1,2,3)} + a_6 e_{(1,3,2)} \;\middle|\; a_i \in K \right\}$$

In particolare $e_{(1,2)}$ e $e_{(1,2)} + 2e_{(2,3)}$ sono elementi, e il loro prodotto sarà

$$e_{(1,2)} \cdot (e_{(1,2)} + 2e_{(2,3)}) = e_{Id} + 2e_{(1,2,3)}$$

Osservazione 1.5. Nell'esempio sopra, $e_{(1,2)} \cdot e_{(2,3)} = e_{(1,2,3)}$, ma $e_{(2,3)} \cdot e_{(1,2)} = e_{(1,3,2)}$, dunque l'algebra non é commutativa. In generale é facile dimostrare che

$$G \text{ abeliano} \iff KG \text{ commutativo}$$

D'ora in poi, denoteremo $g := e_g$ nell'algebra di gruppo, dunque un qualsiasi elemento sarà denotato come

$$\sum_{g\in G} a_g g := \sum_{g\in G} a_g e_g$$

Notiamo che, presa una qualsiasi K-rappresentazione V del gruppo G, allora V diviene un KG modulo sinistro. In realtà vale che

Lemma 1.6. V é una G rappresentazione se e solo se é un KG modulo sinistro

Dimostrazione. tramite la rappresentazione, é immediato indurre su V una struttura di KG modulo come

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) v = \sum_{g\in G} a_g(gv)$$

Viceversa, se V é un KG modulo sinistro, allora ogni elemento $g \in G$ é un endomorfismo K-lineare $g : V \to V$, poiché, chiamato e l'elemento neutro del gruppo,

$$g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2 \qquad g(\lambda v) = g(\lambda e)v = (\lambda e)gv = \lambda(gv)$$

Dato che però $gg^{-1} = e$, allora g é invertibile, e pertanto definisce un omomorfismo di G su $GL(V)$. $\square$

1.1.1 Irriducibilità

Data una rappresentazione V, e un sottoinsieme $S \subseteq V$, diciamo che S é *G-invariante* se l'azione porta S in sé, ossia

$$gS \subseteq S \qquad \forall g \in G$$

possiamo dunque definire

Definizione 1.7. Data V rappresentazione di G, allora un sottospazio W di V é detto *sottorappresentazione* di V se é G-invariante

Osservazione 1.8. Dato che gli elementi di G sono automorfismi di V, allora, dato un sottospazio W, avremo che, per dimensioni

$$gW \subseteq W \iff gW = W$$

Definizione 1.9. Data V rappresentazione di G diversa da $\{ 0 \}$, essa si dice *irriducibile* se le uniche sue sottorappresentazioni sono 0 e V. In altre parole, se non contiene sottospazi propri che siano sottorappresentazioni.

Esempio 2. Dato S_3, possiamo farlo agire su $\mathbb{C}^3$ per permutazione di indici, ossia

$$\sigma \in S_3 \implies \sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

Per esempio, la permutazione $\sigma = (1, 2, 3)$ agisce sul vettore $v = (1, 0, i)$ come $\sigma v = (0, i, 1)$. Possiamo notare che c'é un sottospazio di $\mathbb{C}^3$ invariante, dato da

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 = x_3 \right\} =< (1, 1, 1) >$$

infatti, ogni elemento di S_3 manda $(1, 1, 1)$ e i suoi multipli in sé stesso. Possiamo prendere anche

$$U = V^{\perp} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} =< (1, -1, 0), (0, 1, -1) >_{\mathbb{C}}$$

e notare che anche questo é invariante, poiché

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \iff x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + x_{\sigma(3)} = 0$$

Dunque abbiamo scomposto $\mathbb{C}^3 = V \oplus U$ in due sottorappresentazioni. Inoltre, visto che V ha dimensione 1, é naturalmente una rappresentazione irriducibile.

Esercizio 1. Anche U é una rappresentazione irriducibile.

Osservazione 1.10. In generale, essere G-invariante é diverso dall'essere fissato da G. Nell'esempio precedente, V é fissato da G, mentre U non lo é, poiché, per esempio, la trasposizione $(1, 3)$ manda $(1, -1, 0)$ in $(0, -1, 1)$.

Nell'esempio, abbiamo scomposto la rappresentazione in somma diretta di rappresentazioni irriducibili. In realtà, su $\mathbb{C}$, questo é sempre vero, ma abbiamo bisogno di un lemma preliminare per dimostrarlo

Lemma 1.11. Data V rappresentazione di G finito su $\mathbb{C}$, allora esiste un prodotto hermitiano G-invariante, ossia una funzione bilineare e hermitiana $H : V \times V \to \mathbb{C}$ per cui

$$H(u, v) = H(gu, gv) \qquad \forall u, v \in V \ \forall g \in G$$

Dimostrazione. Prendiamo un qualsiasi prodotto hermitiano H_0 su V. Allora definiamo

$$H(u, v) = \sum_{g \in G} H_0(gu, gv)$$

Questo é ancora un prodotto hermitiano, ed é G-invariante perché, preso $h \in G$

$$H(hu, hv) = \sum_{g \in G} H_0(ghu, ghv) = \sum_{g \in G} H_0(gu, gv) = H(u, v)$$

□

Grazie a questo, possiamo dimostrare che

Teorema 1.12. Ogni rappresentazione di G su $\mathbb{C}$ si decompone come somma diretta di irriducibili

Dimostrazione. Dato che stiamo parlando di rappresentazioni finite, possiamo andare per induzione sulla dimensione della rappresentazione V. Se V ha dimensione 1, allora é banalmente irriducibile. Per il passo induttivo, poniamo di averlo dimostrato per ogni rappresentazione di dimensione $< n$. Prendiamo dunque V di dimensione n; se V é irriducibile, abbiamo finito, altrimenti contiene una sottorappresentazione propria W. Consideriamo dunque un prodotto hermitiano H G-invariante su V, che esiste per lemma precedente, e chiamiamo $Z = W^{\perp}$. Notiamo che

$$z \in Z,\ g \in G \implies H(gz, W) = H(z, g^{-1}W) = H(z, W) = 0 \implies gz \in Z$$

dunque anche Z é invariante, e possiamo scrivere $V = W \oplus Z$, ma per induzione, W e Z avranno una decomposizione in irriducibili, dunque anche V ne possiede una. □

Se il campo che stiamo considerando non é $\mathbb{C}$, oppure se il gruppo é infinito, potremmo avere dei problemi.

Esempio 3. Se prendiamo come gruppo $G = (\mathbb{R}, +)$, e come rappresentazione

$$\rho : G \to GL(2, \mathbb{C}) \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad t+s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t+s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$ é fissato da G, dunque $U = \langle (1, 0) \rangle$ é una sottorapresentazione, ma se esistesse V complementare di U, ossia $\mathbb{C}^2 = U \oplus V$, allora V avrebbe dimensione 1, e chiamato $v \in V$ un suo vettore non nullo, questo dovrebbe essere un autovettore per ogni elemento del gruppo, poiché

$$gv \in V \implies gv = \lambda v$$

Dunque avremo che $\{ (1, 0), v \}$ é una base di autovettori di ogni elemento $g \in G$, e pertanto tutti gli elementi di G sono diagonalizzabili. Ma, per esempio, $\rho(1)$ é un blocco di Jordan di stazza 2 relativo all'autovalore 1, dunque non diagonalizzabile.

Richiedendo qualche proprietà in più, riusciamo ad ottenere risultati simili. Per esempio, prendendo G un gruppo di Lie compatto, (come $SU(n)$), vale ancora lo stesso teorema, ma la costruzione del prodotto hermitiano invariante passa dalla misura di Haar del gruppo. Nei casi a caratteristica positiva, invece, abbiamo il teorema 2.22

1.1.2 Schur

Definizione 1.13. Date V, W rappresentazioni di G, un *omomorfismo di rappresentazioni* é una mappa $\varphi : V \to W$ lineare per cui

$$\varphi(gv) = g\varphi(v) \qquad \forall g \in G\ \forall v \in V$$

e li indichiamo come

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) := \{ \varphi : V \to W \mid \varphi \text{ omomorfismo di } G \text{ rappresentazioni} \}$$

Diremo inoltre che φ é un *isomorfismo di rappresentazioni* se é anche biettivo.

Esercizio 2. Data $\varphi : V \to W$ un omomorfismo di rappresentazioni, allora $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ sono sottorappresentazioni di V, W, e possiamo indurre una struttura di rappresentazione su $\mathrm{Coker}(\varphi)$

Possiamo classificare gli omomorfismi tra rappresentazioni irriducibili tramite il seguente teorema

Teorema 1.14 (Schur)**.** Dato $\varphi : V \to W$ un omomorfismo di rappresentazioni irriducibili di G, allora

1. $\varphi = 0$ oppure φ é un isomorfismo

2. Se $K = \mathbb{C}$, e $V = W$ (ossia φ é un endomorfismo), allora esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui $\varphi \equiv \lambda I$

Dimostrazione.

1. Dato che $\mathrm{Ker}(\varphi)$ é una sottorappresentazione di V irriducibile, allora può essere solo V o $\{0\}$. Nel primo caso, $\varphi \equiv 0$, mentre nel secondo caso é iniettiva. Dunque $\mathrm{Im}(\varphi)$ é una sottorappresentazione di W isomorfa a V, ma dato che anche W é irriducibile, e V é non vuota, allora $W = \mathrm{Im}(\varphi)$, e pertanto φ é un isomorfismo

2. Un endomorfismo su $\mathbb{C}$ ha sempre un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$, dunque possiamo considerare l'omomorfismo di rappresentazioni $\varphi - \lambda I : V \to V$. Questo non é iniettivo, e per quanto dimostrato al punto prima, deve essere identicamente nullo, e dunque $\varphi \equiv \lambda I$

□

Grazie a questo teorema, possiamo dimostrare che

Teorema 1.15. Tutte le rappresentazioni irriducibili di gruppi abeliani finiti su $\mathbb{C}$ hanno dimensione 1

Dimostrazione. Prendiamo G un gruppo abeliano finito, e V una sua rappresentazione irriducibile. Dato $h \in G$, chiamiamo

$$L_h : V \to V \qquad L_h(v) = hv$$

Notiamo che questo é un omomorfismo di rappresentazioni grazie alla commutatività: $L_h(gv) = hgv = gL_h(v)$. Per il teorema di Schur, allora $L_h = \lambda_h I$ per ogni elemento del gruppo, ma allora, chiamato $v \in V$ un qualsiasi vettore non nullo, il sottospazio $< v >$ é invariante, pertanto $V =< v >$ in quanto V é irriducibile. □

Esempio 4. Preso $G = C_4$ (ossia ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{4\mathbb{Z}}$), chiamiamo x il suo generatore. Presa V rappresentazione irriducibile su $\mathbb{C}$, sappiamo che ha dimensione 1, dunque manda $x \mapsto \lambda \in \mathbb{C}^*$, ma dato che $x^4 = e$, allora $\lambda^4 = 1$, pertanto esistono solo quattro rappresentazioni irriducibili di C_4, ossia $\lambda = \pm 1, \pm i$

Esempio 5. Su $\mathbb{R}$ il teorema 1.15 non vale: preso sempre $G = C_4$, prendiamo la sua rappresentazione $\mathbb{R}^2$ che manda

$$G =< x > \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa é irriducibile, poiché se avesse un sottospazio di dimensione 1 invariante, allora x avrebbe un autovettore, e questo non é vero.

1.1.3 Operazioni

Prendiamo ora due G-rappresentazioni V e W. Possiamo produrre un po' di nuove rappresentazioni.

Definizione 1.16 (Operazioni)**.**

Somma $\boldsymbol{V \oplus W}$ é la somma diretta dei due sottospazi, ed é una rappresentazione con l'azione di G indotta da

$$g(v, w) = (gv, gw) \qquad \forall g \in G,\ v \in V,\ w \in W$$

Tensore $\boldsymbol{V \otimes W}$ é il prodotto tensore dei due sottospazi, ed é una rappresentazione con l'azione di G indotta da

$$g\,(v \otimes w) = (gv \otimes gw) \qquad \forall g \in G,\ v \in V,\ w \in W$$

ed estesa linearmente su tutti gli altri elementi.

Duale $\boldsymbol{V^*}$ é lo spazio duale di V, ed é una rappresentazione con l'azione di G indotta da

$$(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v) \qquad \forall g \in G,\ v \in V,\ \varphi \in V^*$$

Alternante $\boldsymbol{\Lambda^k V}$ é il prodotto alternante per k volte di V con sé stesso, ed é una rappresentazione con l'azione di G indotta da

$$g(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) = gv_1 \wedge gv_2 \wedge \cdots \wedge gv_k \qquad \forall g \in G,\ v_i \in V$$

ed estesa linearmente su tutti gli altri elementi.

Simmetrico $\mathbf{Sym}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{(V)}$ é il prodotto simmetrico per k volte di V con sé stesso, ed é una rappresentazione con l'azione di G indotta da

$$g(v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_k) = gv_1 \cdot gv_2 \cdot \cdots \cdot gv_k \qquad \forall g \in G,\ v_i \in V$$

ed estesa linearmente su tutti gli altri elementi.

Omomorfismi $\mathrm{Hom}(V,W)$ é lo spazio degli omomorfismi di K spazi vettoriali tra V e W, ed é una rappresentazione con l'azione di G indotta da

$$(gf)(v) = g(f(g^{-1}v)) \qquad \forall g \in G,\ v \in V,\ f \in \mathrm{Hom}(V,W)$$

Notiamo un po' di fatti interessanti:

- In generale, se V, W sono irriducibili, allora non é vero che $V \otimes W$ é irriducibile
- Anche se V e V^* sono isomorfi a livello di spazi vettoriali, questo non vuol dire che le due rappresentazioni siamo isomorfe. (Lo vedremo meglio in seguito, con la teoria dei caratteri)
- L'azione sul duale é fatta in modo che il *pairing* col duale sia G-invariante, ossia l'operazione bilineare

  $$< \cdot, \cdot >: V^* \times V \to K \qquad < \varphi, v > = \varphi(v)$$

  abbia la proprietà

  $$< g\varphi, gv > = (g\varphi)(gv) = \varphi(v) = < \varphi, v > \quad \forall g \in G,\ v \in V,\ \varphi \in V^*$$

- Ricordiamo che abbiamo l'isomorfismo

  $$f : V^* \otimes W \cong Hom(V,W) \qquad \varphi \otimes w \mapsto (v \mapsto \varphi(v)w)$$

  e notiamo che le azioni che abbiamo definito sui due spazi fanno sí che f sia un isomorfismo di G-rappresentazioni (basta farlo vedere sui generatori)

  $$g(f(\varphi \otimes w)) = g(v \mapsto \varphi(v)w) = (v \mapsto \varphi(g^{-1}v)gw)$$

  $$f(g(\varphi \otimes w)) = f(g\varphi \otimes gw) = (v \mapsto (g\varphi)(v)gw) = (v \mapsto \varphi(g^{-1}v)gw)$$

Esercizio 3. Data la scomposizione $\mathbb{C}^3 = V \oplus U$ sul gruppo S_3 dell'Esempio 2, mostrare che

$$U \otimes U \cong banale \oplus segno \oplus U$$

dove la rappresentazione banale manda tutti gli elementi di S_3 nell'identità, mentre la rappresentazione *segno* é una rappresentazione di dimensione 1, e manda ogni permutazione di S_3 nella moltiplicazione per il segno della permutazione

$$\sigma v = (-1)^{sgn(\sigma)} v$$

D'ora in poi, quando parliamo di rappresentazioni di S_3, indicheremo la rappresentazione banale con il simbolo $\square\square\square$, la rappresentazione segno con $\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$, e la rappresentazione U con $\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}$. Il perché di questi simboli sarà chiaro più in là nel corso

Esercizio 4. Le uniche rappresentazioni di dimensione 1 di S_3 sono $\ydiagram{3}$ e $\ydiagram{1,1,1}$.

D'ora in poi, a meno che non sia espressamente detto, indicheremo con la stessa lettera le rappresentazioni isomorfe. Facciamo un esempio

Esempio 6. Facciamo agire S_3 su $\mathbb{C}^3$ con la rappresentazione banale, ossia quella che manda tutti gli elementi di S_3 nella funzione identità. Allora, presa v_1, v_2, v_3 base di $\mathbb{C}^3$, possiamo scrivere

$$\mathbb{C}^3 =< v_1 > \oplus < v_2 > \oplus < v_3 >$$

e questa sarà una decomposizione di $\mathbb{C}^3$ in rappresentazioni irriducibili. Notiamo, inoltre, che le tre rappresentazioni sono isomorfe mediante le mappe che mandano v_i in v_j, quindi se chiamiamo $V = < v_1 >$, indicheremo questa decomposizione come

$$\mathbb{C}^3 = V \oplus V \oplus V = V^{\oplus 3}$$

Dall'esempio, possiamo notare che cambiando la base scelta, i sottospazi irriducibili cambiano, ma comunque le rappresentazioni rimangono isomorfe. Questo é vero in generale grazie al seguente teorema.

Teorema 1.17. Data V una G-rappresentazione, poniamo che si spezzi nella decomposizione irriducibile

$$V = V_1^{\oplus k_1} \oplus V_2^{\oplus k_2} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus k_r}$$

dove le V_i sono rappresentazioni irriducibili non isomorfe tra loro, e $k_i > 0$. Allora le classi di isomorfismo delle V_i, le molteplicità k_i, il numero r, e i sottospazi vettoriali dati dalle *componenti isotipiche* $V_i^{\oplus k_i}$ sono determinate univocamente dalla rappresentazione V.

Dimostrazione. Poniamo ora di avere un'altra decomposizione irriducibile oltre a quella data

$$V = W_1^{\oplus t_1} \oplus W_2^{\oplus t_2} \oplus \cdots \oplus W_s^{\oplus t_s}$$

chiamiamo f la funzione identità da V in sé, e la vediamo

$$f : \bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{\oplus k_i} = V \to V = \bigoplus_{j=1}^{s} W_j^{\oplus t_j}$$

Scelto un V_i e un W_j, chiamiamo f_{ij} la composizione di f con l'immersione di V_i e la proiezione su W_j

$$f_{i,j} : V_i \hookrightarrow V \xrightarrow{f} V \twoheadrightarrow W_j$$

Questo é ancora un omomorfismo di rappresentazioni, poiché l'immersione e la proiezione lo sono, ed inoltre va da uno spazio irriducibile ad uno spazio irriducibile, dunque per Schur f_{ij} é un isomorfismo oppure zero. Notiamo inoltre che al variare di j e W_j (dobbiamo anche variare la copia di W_j), f_{ij} non può essere sempre zero, poiché altrimenti f ristretta a V_i non sarebbe iniettiva. Dunque esiste un f_{ij} isomorfismo, e pertanto $V_i \cong W_j$, da cui segue che questo indice j in questione deve essere unico, altrimenti $W_{j'} \cong V_i \cong W_j$, che é un assurdo. Ciò vuol dire in particolare che $s \geq r$, poiché i W_j diversi devono essere almeno quanti i V_i diversi, ma dato che possiamo fare lo stesso ragionamento per f^{-1}, allora $s = r$.

Se ora chiamiamo f_i la funzione i ristretta alla componente isotipica $V_i^{\oplus k_i}$, otteniamo che la sua immagine é contenuta in $W_i^{\oplus t_i}$, ed essendo f_i iniettiva, allora

$$t_i \dim(W_i) = \dim(W_i^{\oplus t_i}) \geq \dim(V_i^{\oplus k_i}) = k_i \dim(V_i) = k_i \dim(W_i)$$

da cui $t_i \geq k_i$, ma come prima possiamo ripetere il ragionamento con f^{-1} ed ottenere $t_i = k_i$. Dato che f + l'identità, risulta che i sottospazi vettoriali delle componenti isotipiche $V_i^{\oplus k_i}$ e $W_i^{\oplus t_i}$ coincidono. $\square$

1.2 Caratteri

Uno strumento potente per lo studio delle rappresentazioni di un gruppo finito G é la teoria dei caratteri. Infatti, come vedremo, il carattere di una rappresentazione identificherà univocamente la rappresentazione stessa, sotto opportune ipotesi.

Definizione 1.18. Data (V, ρ) una G-rappresentazione, il suo carattere é una funzione dal gruppo al campo che calcoli la traccia degli elementi del gruppo

$$\chi_V : G \to K \qquad \chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

Diamo un paio di proprietà facilmente verificabili

Esercizio 5.

- Date $V \cong W$ due rappresentazioni isomorfe, queste hanno lo stesso carattere $\chi_V = \chi_W$
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
- $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$

Lemma 1.19. Su $\mathbb{C}$, avremo che $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione di *applicazione trasposta*: data $A : V \to V$ applicazione lineare, allora $A^t : V^* \to V^*$ é l'unica applicazione lineare per cui

$$< \varphi, Av > = < A^t\varphi, v > \qquad \forall v \in V,\ \varphi \in V^*$$

ed inoltre, sappiamo che la traccia é invariante per trasposizione.

Prese (V, ρ) e (V^*, ρ^*) sappiamo che il pairing é G-invariante, dunque

$$< \varphi, v > = < \rho^*(g)\varphi, \rho(g)v > = < \rho(g)^t \rho^*(g)\varphi, v >$$

e visto che vale per ogni $v \in V$, allora

$$\rho(g)^t \rho^*(g) = \mathrm{Id} \implies \rho(g)^t = \rho^*(g^{-1}) \implies \rho(g^{-1})^t = \rho^*(g)$$

Dato che G é finito, allora g^n é l'identità, da cui, se prendiamo λ un autovalore di g (in una qualsiasi rappresentazione), avremo che $\lambda^n = 1$, ossia tutti gli autovalori sono radici dell'unità, e la traccia di g sarà la somma di queste. Dunque, chiamando λ_i gli autovalori di $\rho(g)$,

$$\chi_{V^*} = \mathrm{Tr}(\rho^*(g)) = \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})^t) = \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})) = \sum \lambda_i^{-1} = \overline{\sum \lambda_i} = \overline{\chi_V}$$

$\square$

In particolare questo dimostra che V non é in generale isomorfo al suo duale V^*. In seguito vedremo che su $\mathbb{C}$ il carattere é un invariante completo per le rappresentazioni, e dunque V é isomorfo al suo duale se e solo se ha carattere reale, ossia $\chi_V = \overline{\chi_V}$.

Esercizio 6.

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right)$$

Notiamo che la traccia é invariante per coniugio, quindi in particolare, presi $g, h \in G$, e V una rappresentazione, avremo che

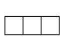
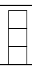
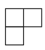
$$\chi_V(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(ghg^{-1})) = \mathrm{Tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})) = \mathrm{Tr}(\rho(h)) = \chi_V(h)$$

e ciò vuol dire che χ_V é costante sulle classi di coniugio di G.

Detto questo, possiamo definire

Definizione 1.20. Dato G gruppo finito, la sua *Tabella dei Caratteri* é una tabella in cui sono raccolti per riga tutti i caratteri delle rappresentazioni irriducibili di quel gruppo, ed in cui le colonne rappresentano le classi di coniugio di G.

Esempio 7. Diamo la tabella dei caratteri di S_3. Riferendoci alle notazioni dell'esercizio svolto,

S_3	e	(1 2)	(1 2 3)
	1	1	1
	1	-1	1
	2	0	-1

L'ultimo carattere si può calcolare dalla rappresentazione di S_3 su $\mathbb{C}^3$ che permuta gli indici. Abbiamo infatti visto che $\mathbb{C}^3 = \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{2,1}$, e dunque il carattere della rappresentazione sarà la somma dei due caratteri. Ma é facile calcolare questa rappresentazione:

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(1\ 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathbb{C}^3}(e) = 3 \qquad \chi_{\mathbb{C}^3}(1\ 2) = 1 \qquad \chi_{\mathbb{C}^3}(1\ 2\ 3) = 0$$

dunque il carattere di $\ydiagram{2,1}$ lo otterremo sottraendo 1 a questo carattere.

Esercizio 7. S_3 ha come rappresentazioni irriducibili solo $\ydiagram{3}$, $\ydiagram{1,1,1}$ e $\ydiagram{2,1}$. Per fare questo esercizio, può essere utile considerare il generato di $(1\ 2\ 3)$ in S_3 e restringere le rappresentazioni di S_3 a rappresentazioni di C_3.

Presa la rappresentazione irriducibile $\ydiagram{2,1}$, abbiamo già mostrato che

$$\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1} \cong \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{1,1,1} \oplus \ydiagram{2,1}$$

Sapendo che però queste tre sono le uniche rappresentazioni irriducibili di S_3, allora possiamo tentare un approccio piú generale. Presa infatti una qualsiasi rappresentazione V, allora sappiamo che

$$V \cong \ydiagram{3}^{\oplus k_1} \oplus \ydiagram{1,1,1}^{\oplus k_2} \oplus \ydiagram{2,1}^{\oplus k_3}$$

ed in particolare

$$\chi_V = k_1 \chi_{\ydiagram{3}} + k_2 \chi_{\ydiagram{1,1,1}} + k_3 \chi_{\ydiagram{2,1}}$$

ma dalla tabella dei caratteri, ci accorgiamo che i tre caratteri sono linearmente indipendenti, dunque possiamo calcolare k_1, k_2, k_3 tramite un sistema lineare, oppure sfruttare il fatto che k_i sono numeri naturali, e cercare di farlo a mano.

Teorema 1.21 (Prima Formula di Proiezione)**.** Poniamo che il campo sia a caratteristica zero. Data V una rappresentazione di G, definiamo la mappa di rappresentazioni

$$\varphi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g : V \to V$$

Questa é una proiezione sul sottospazio

$$V^G := \mathrm{Fix}(G) = \{\, v \in V \mid gv = v \quad \forall g \in G \,\}$$

Dimostrazione. notiamo che, preso $h \in G$, abbiamo

$$h\varphi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gh(v) = \varphi(hv) = \varphi(v)$$

da cui φ é un omomorfismo di rappresentazioni con immagine in V^G. Inoltre, preso $v \in V^G$, avremo

$$\varphi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} v = v$$

dunque φ agisce come l'identità su V^G, ed in particolare é una proiezione su esso. □

Lemma 1.22. Prese V, W due rappresentazioni, allora

$$\mathrm{Hom}(V,W)^G = \mathrm{Hom}_G(V,W)$$

Dimostrazione. Preso $\varphi \in Hom(V,W)$, allora

$$\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)^G \iff g\varphi = \varphi \quad \forall g \in G$$

$$\iff \varphi(v) = (g\varphi)(v) = g(\varphi(g^{-1}v)) \quad \forall g \in G,\ v \in V$$

$$\iff g^{-1}\varphi(v) = \varphi(g^{-1}v) \quad \forall g \in G,\ v \in V$$

$$\iff \varphi \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$$

□

Corollario 1.23. Data V una rappresentazione di G, allora

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)$$

Dimostrazione. Data φ del teorema, visto che é una proiezione su V^G, allora $\mathrm{Tr}(\varphi) = \dim V^G$, da cui

$$\dim V^G = \mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)$$

□

Consideriamo adesso due G rappresentazioni V, W. Avremo dunque che

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V,W) = \dim \mathrm{Hom}(V,W)^G =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{\mathrm{Hom}}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{V^*}(g)\chi_W(g)$$

Dato che d'ora in poi faremo uso massiccio dei prodotti hermitiani, poniamo che il campo sia sempre $\mathbb{C}$. In particolare, avremo che

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*}(g)\chi_W(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \frac{1}{|G|} < \chi_V, \chi_W >$$

ma se V e W sono irriducibili, per Schur, tutti gli omomorfismi di rappresentazioni sono multipli (anche nulle) dell'identità, da cui

Lemma 1.24. Date due rappresentazioni irriducibili V, W di G , allora

$$\frac{1}{|G|} < \chi_V, \chi_W > = \begin{cases} 1 & \text{se } V \cong W \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1.2.1 Funzioni Classe

Definizione 1.25. Dato un gruppo G, la sua algebra delle *funzioni classe* é

$$\mathbb{C}_{classe}(G) = \{\, f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ costante su classi di coniugio} \,\}$$

Abbiamo già fatto vedere che i caratteri delle rappresentazioni sono funzioni classe. Inoltre, possiamo mettere un prodotto hermitiano su quest'algebra, definito da

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\beta(g)$$

che coincide con il prodotto hermitiano usato sopra, pertanto

Corollario 1.26. Date due G rappresentazioni V, W, allora

$$(\chi_V, \chi_W) = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$$

ed avremo che i caratteri delle rappresentazioni irriducibili sono un insieme ortonormale rispetto a questo prodotto, poiché

$$(\chi_V, \chi_V) = 1 \qquad (\chi_V, \chi_W) = 0 \text{ se } V \ncong W$$

da cui

Corollario 1.27. I caratteri delle rappresentazioni irriducibili di G sono linearmente indipendenti come funzioni classe, e il loro numero é al massimo il numero delle classi di coniugio del gruppo G

Dimostrazione. Essendo ortonormali rispetto ad un prodotto hermitiano, allora i caratteri delle rappresentazioni irriducibili devono essere necessariamente linearmente indipendenti. Inoltre

$$\dim \mathbb{C}_{classe}(G) = |\,\{\, \text{classi di coniugio di } G \,\}\,|$$

dunque il numero di rappresentazioni irriducibili é minore o uguale al numero delle classi di coniugio. □

Corollario 1.28. Data V una G rappresentazione, questa é irriducibile se e solo se
$$(\chi_V, \chi_V) = 1$$

Dimostrazione. Se prendiamo la decomposizione in irriducibili di V
$$V = V_1^{\oplus k_1} \oplus V_2^{\oplus k_2} \oplus \cdots \oplus V_s^{\oplus k_s}$$
Avremo, per ortonormalità dei caratteri, che
$$(\chi_V, \chi_V) = \sum_i k_i^2 (V_i, V_i) = \sum_i k_i^2$$
e questo é 1 se e solo se V é irriducibile. □

Corollario 1.29. Ogni rappresentazione di G é determinata univocamente dal suo carattere

Dimostrazione. Prese V, W due G rappresentazioni con lo stesso carattere χ, e prendiamo le loro decomposizione in irriducibili
$$V = V_1^{\oplus k_1} \oplus V_2^{\oplus k_2} \oplus \cdots \oplus V_s^{\oplus k_s}$$
$$W = W_1^{\oplus t_1} \oplus W_2^{\oplus t_2} \oplus \cdots \oplus W_r^{\oplus t_r}$$
allora
$$\chi = \sum_i k_i \chi_{V_i} = \sum_j t_j \chi_{W_j}$$
ma dato che i caratteri delle rappresentazioni irriducibili sono linearmente indipendenti, allora necessariamente le due decomposizioni devono coincidere, ossia $V \cong W$. □

Notiamo una cosa importante: data una qualsiasi rappresentazione V, con
$$V = V_1^{\oplus k_1} \oplus V_2^{\oplus k_2} \oplus \cdots \oplus V_s^{\oplus k_s}$$
allora, per ortonormalità,
$$(\chi_V, \chi_{V_i}) = k_i$$
ossia, dato il carattere di una rappresentazione, sappiamo scomporlo in irriducibili se sappiamo i caratteri di tutte le rappresentazioni irriducibili, e questo é il motivo per cui le tabelle di caratteri sono importanti.

Definizione 1.30. Dato G un gruppo, la sua *rappresentazione regolare* é $\mathbb{C}G$ visto come G modulo sinistro. In particolare, l'azione sarà
$$m = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}G \quad h \in G \implies hm = \sum_{g \in G} a_g hg$$

Questa é una rappresentazione importante, in quanto

Teorema 1.31. Dato G un gruppo, e $V_1, V_2, \dots, V_k$ le sue rappresentazioni irriducibili, si ha che

1. $$\chi_{\mathbb{C}G}(h) = \begin{cases} |G| & \text{se } h = e \\ 0 & \text{se } h \neq e \end{cases}$$

2. $$(\chi_{\mathbb{C}G}, \chi_{V_i}) = \dim V_i$$

3. $$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i} \qquad \chi_{\mathbb{C}G} = \sum_i \dim V_i \cdot \chi_{V_i}$$

Dimostrazione.

1. Sappiamo che gli elementi di G sono una base di $\mathbb{C}G$, e la moltiplicazione a sinistra per un elemento $h \in G$ diverso dall'identità manda g in hg, ossia un elemento della base in un altro elemento della base diverso. Ciò vuol dire che $\rho(h)$ sarà simile ad una matrice di permutazione con zero sulla diagonale, da cui la traccia é nulla. Nel caso invece che $h = e$, allora viene mandato nell'identità, che ha traccia $|G|$.

2. $$(\chi_{\mathbb{C}G}, \chi_{V_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\chi}_{\mathbb{C}G}(h) \chi_{V_i}(h) = \frac{1}{|G|} |G| \cdot \chi_{V_i}(e) = \dim V_i$$

3. Dall'osservazione sopra, il risultato é ovvio.

□

Corollario 1.32. Date V_i le rappresentazioni irriducibili di un gruppo G, allora
$$|G| = \sum_i (\dim V_i)^2$$

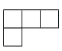
Dimostrazione.
$$|G| = \chi_{\mathbb{C}G}(e) = \sum_i \dim V_i \cdot \chi_{V_i}(e) = \sum_i (\dim V_i)^2$$

□

Concentriamoci adesso su delle rappresentazioni di S_n. In particolare, abbiamo visto già che, come rappresentazione di S_3,
$$\mathbb{C}^3 \cong \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{2,1}$$
ma più in generale, avremo che

Lemma 1.33. Data $\mathbb{C}^n$ rappresentazione di S_n per permutazione degli indici, allora
$$C^n \cong banale \oplus U$$
con U rappresentazione irriducibile.

Dimostrazione. il vettore $v = (1, 1, \ldots, 1)$ genera sempre un sottospazio fissato da S_n, dunque $\mathbb{C}^n$ si spezza come rappresentazione banale e il suo ortogonale
$$U = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_i a_i = 0 \right\}$$
preso ora un qualsiasi vettore non zero $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$, avremo che esistono due indici distinti i e j per cui $u_i \neq u_j$, altrimenti
$$u = \lambda v \implies \sum u_i = n\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies u = 0$$
dunque, a meno di permutazione degli indici, poniamo $i = 1$, $j = 2$. Calcoliamo quindi
$$u - (1\ 2) \cdot u = (u_1 - u_2) \cdot (1, -1, 0, \ldots, 0) \qquad u_1 - u_2 \neq 0$$
dunque, facendo agire $\mathbb{C}G$ su u, otteniamo i vettori $e_i - e_{i+1}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n-1$, che sono una base di U, poiché sono linearmente indipendenti, e la dimensione di U é $n-1$. Se prendiamo dunque un sottospazio invariante $W \subseteq U$ non zero, e $u \in W$, avremo che $U = \mathbb{C}G(u) \subseteq W$ e pertanto $W = U$, da cui U é irriducibile. $\square$

In generale, la rappresentazione irriducibile U di S_n verrà indicata da ... con $n - 1$ quadratini nella parte superiore.

Lemma 1.34. Data V rappresentazione irriducibile di S_n, e sgn la sua rappresentazione segno, avremo che $V \otimes sgn$ é ancora irriducibile.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\chi_{sgn}(g) = \pm 1$, e che $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$. Dunque avremo che
$$(\chi_{V\otimes sgn}, \chi_{V\otimes sgn}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi}_{V\otimes sgn}(g) \chi_{V\otimes sgn}(g)$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi}_V(g) \chi_V(g) \overline{\chi}_{sgn}(g) \chi_{sgn}(g)$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi}_V(g) \chi_V(g) = (\chi_V, \chi_V) = 1$$
$\square$

Esercizio 8. Data V rappresentazione irriducibile di G, allora $\dim V||G|$

Date V, W due G rappresentazioni, e $\varphi : V \to W$ un'applicazione lineare, allora

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\varphi : V \to W$$

é un omomorfismo di rappresentazioni, e in particolare, se $V = W$ e $\varphi = Id$, allora é la proiezione sul fissato V^G.

Presa invece una funzione qualsiasi $\alpha : G \to \mathbb{C}$, e l'applicazione lineare

$$\varphi_{\alpha,V} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \alpha(g)g : V \to V$$

ci possiamo chiedere quando é un omomorfismo di rappresentazioni.

Teorema 1.35. $\varphi_{\alpha,V}$ é un omomorfismo di rappresentazioni per ogni V se e solo se $\alpha \in \mathbb{C}_{classe}(G)$

Dimostrazione. Notiamo dapprima che vale la catena di coimplicazioni

$$\varphi_{\alpha,V}(hv) = h\varphi_{\alpha,V}(v) \quad \forall\, h \in G,\ v \in V \iff$$

$$h^{-1}\varphi_{\alpha,V}(hv) = \varphi_{\alpha,V}(v) \quad \forall\, h \in G,\ v \in V \iff$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)(h^{-1}gh)v = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)gv \quad \forall\, h \in G,\ v \in V \iff$$

$$\sum_{g\in G}\alpha(h^{-1}gh)gv = \sum_{g\in G}\alpha(g)gv \quad \forall\, h \in G,\ v \in V$$

Da cui, se α é una funzione classe, allora $\alpha(h^{-1}gh) = \alpha(g)$, e pertanto $\varphi_{\alpha,V}$ é un omomorfismo di rappresentazioni.

Viceversa, poniamo che $\varphi_{\alpha,V}$ sia un omomorfismo di rappresentazioni per ogni V, ma $\alpha \notin \mathbb{C}_{classe}(G)$, ossia esistono $\bar{g}, \bar{h} \in G$ per cui $\alpha(\bar{h}^{-1}\bar{g}\bar{h}) \neq \alpha(\bar{g})$. Scegliamo $V = \mathbb{C}G$ la rappresentazione regolare, e valutiamo $\varphi_\alpha := \varphi_{\alpha,\mathbb{C}G}$ su $e \in \mathbb{C}G$, ossia l'elemento di $\mathbb{C}G$ corrispondente all'elemento identità del gruppo. Otteniamo

$$\bar{h}^{-1}\varphi_\alpha(\bar{h}e) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(\bar{h}^{-1}g\bar{h})ge = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(\bar{h}^{-1}g\bar{h})g$$

$$\varphi_\alpha(e) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)ge = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)g$$

dato che φ_α é un omomorfismo di rappresentazioni, le due espressioni devono essere uguali, ma gli elementi $g \in \mathbb{C}G$ formano una base dello spazio vettoriale, dunque sono uguali se e solo se lo sono coefficiente per coefficiente, il che é assurdo, dato che $\alpha(\bar{h}^{-1}\bar{g}\bar{h}) \neq \alpha(\bar{g})$. $\square$

Teorema 1.36. I caratteri χ_{V_i} relativi alle rappresentazioni irriducibili del gruppo G sono una base ortonormale per $\mathbb{C}_{classe}(G)$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che sono ortonormali e linearmente indipendenti, quindi basta dimostrare che generino. Presa una qualsiasi funzione $\beta \in \mathbb{C}_{classe}(G)$, sia

$$\alpha = \beta - \sum_i (\beta, \chi_{V_i})\chi_{V_i}$$

Se dimostriamo che $\alpha = 0$, allora abbiamo concluso. Notiamo che

$$(\alpha, \chi_{V_j}) = (\beta, \chi_{V_j}) - \sum_i (\beta, \chi_{V_j})(\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = (\beta, \chi_{V_j}) - (\beta, \chi_{V_j}) = 0$$

ossia, α é ortogonale a tutte le rappresentazioni irriducibili. Fissata V una rappresentazione irriducibile, avremo che $\varphi_\alpha := \varphi_{\alpha,V} : V \to V$ é un endomorfismo di rappresentazioni irriducibili, e per Schur, $\varphi_\alpha \equiv \lambda \,\mathrm{Id}$. Dunque

$$\lambda \dim V = Tr(\varphi_\alpha) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \alpha(g)\chi_V(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\chi}_{V^*}(g) =< \alpha, \chi_{V^*} >$$

Dato che

$$< \chi_{V^*}, \chi_{V^*} > = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{V^*}(g)\overline{\chi}_{V^*}(g)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi}_V(g)\chi_V(g) = < \chi_V, \chi_V > = 1$$

allora V^* é irriducibile[1], da cui

$$\lambda \dim V = < \alpha, \chi_{V^*} > = 0 \implies \lambda = 0$$

ossia, $\varphi_{\alpha,V} \equiv 0$ su ogni rappresentazione irriducibile, ma dato che ogni rappresentazione W si spezza in irriducibili, e che $\varphi_{\alpha,W}$ si annulla su ogni sottorappresentazione irriducibile, allora si annulla su tutto W. In particolare, presa la rappresentazione regolare, allora $\varphi_{\alpha,\mathbb{C}G} \equiv 0$, e valutandola sull'elemento $e \in \mathbb{C}G$, si ha

$$\varphi_{\alpha,\mathbb{C}G}(e) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \alpha(g)ge = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \alpha(g)g = 0$$

ma gli elementi $g \in G$ sono una base di $\mathbb{C}G$, da cui $\alpha(g) = 0 \;\forall g \in G$, ossia $\alpha \equiv 0$. □

Corollario 1.37. Il numero di rappresentazioni irriducibili di un gruppo G é pari al numero di classi di coniugio di G

[1] Abbiamo appena dimostrato che V irriducibile $\iff V^*$ irriducibile

1.2.2 Rappresentazioni Indotte

D'ora in poi, quando scriviamo $H < G$ intendiamo che G é un gruppo, e H un suo sottogruppo.

Definizione 1.38. Dato un gruppo G, un suo sottogruppo H, e W una H rappresentazione, allora definiamo la *rappresentazione indotta da* W come

$$\operatorname{Ind}_H^G W := \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma W$$

dove g_σ é un elemento di G rappresentante della classe σ. Dato che, preso $g \in G$, avremo

$$gg_\sigma \in \tau \in G/H \implies \exists! h \in H : gg_\sigma = g_\tau h$$

allora possiamo definire l'azione sulle singole componenti come

$$g \in G \quad v \in g_\sigma W \implies v = g_\sigma w \quad gv = gg_\sigma v = g_\tau(hv) \in g_\tau W$$

Notiamo che la definizione dipende dalle scelte dei rappresentanti g_σ, ma in realtà a meno di isomorfismi, questa é unica.

Esercizio 9. La rappresentazione indotta non dipende dai rappresentanti.

Notiamo inoltre che questa operazione commuta con la somma diretta

$$\operatorname{Ind}_H^G(V_1 \oplus V_2) = \operatorname{Ind}_H^G V_1 \oplus \operatorname{Ind}_H^G V_2$$

Esempio 8. Dato $W = < w >$ rappresentazione banale di H, l'azione della rappresentazione indotta su G sarà

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma W$$

$$v \in V \implies v = \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma w_\sigma$$

$$gv = \sum_{\sigma \in G/H} gg_\sigma w_\sigma = \sum g_\tau h_\sigma w_\sigma = \sum g_\tau w_\sigma$$

dove $gg_\sigma = g_\tau h_\sigma$, e l'azione di H é banale su tutte le copie di W. Possiamo notare che l'azione coincide con l'azione da sinistra di G su $\mathbb{C}\, G/H$

Questo tipo di rappresentazione ha un nome particolare.

Definizione 1.39. Dato un gruppo G che agisce su un insieme X, allora la *rappresentazione per permutazione di* G *su* X é dato dallo spazio vettoriale che ha per base gli elementi $\{ v_x \}_{x \in X}$ e come azione

$$g \sum_{x \in X} \alpha_x v_x = \sum_{x \in X} \alpha_x v_{gx}$$

Notiamo che nel caso estremo in cui $H = \{ e \}$, ossia é solo l'elemento neutro, allora

$$\mathrm{Ind}_H^G W = \mathbb{C}G$$

ossia la rappresentazione regolare.

Teorema 1.40 (Frobenius)**.** Sia H un sottogruppo di G, W una H rappresentazione e U una G rappresentazione. Allora un qualsiasi omomorfismo di H rappresentazioni

$$\varphi : W \to \mathrm{Res}_H^G U$$

si estende ad un omomorfismo di G rappresentazioni

$$\widetilde{\varphi} : \mathrm{Ind}_H^G W \to U$$

e quest'operazione é un isomorfismo di spazi vettoriali, ossia

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, U)$$

Dimostrazione. Dato che la definizione non dipende dai rappresentanti, prendiamo come rappresentante della classe neutra di ${}^{G}\!/_{H}$ l'elemento neutro di G, chiamato e. Data $\varphi : W \to \mathrm{Res}_H^G U$, allora $\widetilde{\varphi}$ deve verificare

$$\widetilde{\varphi}(ew) = \varphi(w) \qquad \forall w \in W$$

$$\widetilde{\varphi}(g_\sigma w) = g_\sigma \widetilde{\varphi}(ew) = g_\sigma \varphi(w) \qquad \forall w \in W,\ \sigma \in {}^{G}\!/_{H}$$

Questa estensione non dipende dai rappresentanti, poiché se $g'_\sigma = g_\sigma h$ é un altro rappresentante di σ, allora

$$\widetilde{\varphi}(g'_\sigma w) = \widetilde{\varphi}(g_\sigma h w) = g_\sigma \widetilde{\varphi}(ehw) = g_\sigma \varphi(hw) = g_\sigma h \varphi(w) = g'_\sigma \widetilde{\varphi}(ew)$$

inoltre esiste, ed é unica perché l'abbiamo definita sui generatori

$$\widetilde{\varphi}\left(\sum_{\sigma \in {}^{G}\!/_{H}} g_\sigma w_\sigma \right) = \sum_{\sigma \in {}^{G}\!/_{H}} g_\sigma \varphi(w_\sigma)$$

Viceversa, dato un omomorfismo $\widetilde{\varphi} : \mathrm{Ind}_H^G W \to U$, possiamo restringerlo alla copia di W relativa alla classe banale di ${}^{G}\!/_{H}$, e ottenere un omomorfismo di rappresentazioni $\varphi : W \to \mathrm{Res}_H^G U$, e le due operazioni appena descritte sono una l'opposta dell'altra. □

Corollario 1.41.

$$(\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}, \chi_U)_G = (\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}_H^G U})_H$$

Dimostrazione. Dal corollario 1.26, sappiamo che

$$(\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}, \chi_U)_G = \dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, U)$$

$$(\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}_H^G U})_H = \dim \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U)$$

ed il teorema di Frobenius conclude. $\square$

Esempio 9. Calcoliamo la rappresentazione $\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1}$.
Innanzitutto, $\dim \ydiagram{2,1} = 2$, pertanto

$$\dim \mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} = [S_4 : S_3] \cdot \dim \ydiagram{2,1} = 8$$

Usiamo Frobenius per calcolare il prodotto del suo carattere con le rappresentazioni irriducibili di S_4

$$\left(\chi_{\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{4}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\mathrm{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{4}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{3}}\right) = 0$$

dunque non contiene la rappresentazione banale.

$$\left(\chi_{\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{1,1,1,1}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\mathrm{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{1,1,1,1}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{1,1,1}}\right) = 0$$

e non contiene neanche la segno.
Prima di andare avanti, vediamo cos'è la rappresentazione $\mathrm{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{3,1}$.[2] Ricordiamo che abbiamo definito $\ydiagram{3,1}$ come la rappresentazione di S_4 che agiva per permutazione sul sottospazio $V = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \right\}$ di $\mathbb{C}^4$. La sua ristretta a S_3 permuterà solo le prime tre coordinate, lasciando fissa la quarta, e possiamo spezzarla in sottospazi invarianti

$$V = V_1 \oplus V_2$$

$$V_1 = \left\{ (a_1, a_2, a_3, 0) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\} \qquad V_2 = \left\{ (a, a, a, -3a) \in \mathbb{C}^4 \right\}$$

e riconosciamo in V_1 la rappresentazione $\ydiagram{2,1}$, e in V_2 la rappresentazione banale, dunque

$$\mathrm{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{3,1} = \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{3}$$

da cui

$$\left(\chi_{\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{3,1}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\mathrm{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{3,1}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{2,1}}\right) + \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{3}}\right) = 1$$

[2] ai fini dell'esercizio, non ci serve davvero, in quanto potremmo farci semplicemente il conto a mano

Guardando i caratteri, notiamo che

$$\operatorname{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,2} = \ydiagram{2,1}$$

dunque

$$\left(\chi_{\operatorname{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{2,2}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\operatorname{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,2}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{2,1}}\right) = 1$$

Resta solo la rappresentazione $\ydiagram{2,1,1}$, ma il suo prodotto si potrebbe evitare, facendoci il conto sulle dimensioni

$$8 = \dim \operatorname{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1} = \dim \ydiagram{3,1} + \dim \ydiagram{2,2} + \alpha \cdot \dim \ydiagram{2,1,1} = 5 + 3\alpha$$

$$\Longrightarrow \alpha = 1 \Longrightarrow \operatorname{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1} = \ydiagram{3,1} \oplus \ydiagram{2,2} \oplus \ydiagram{2,1,1}$$

Se però vogliamo sapere chi sia $\operatorname{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1,1}$, usiamo che le restrizioni e il prodotto tensore commutano, dunque

$$\operatorname{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1,1} = \operatorname{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{3,1} \otimes \operatorname{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{1,1,1,1} =$$

$$\left(\ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{3}\right) \otimes \ydiagram{1,1,1} = \left(\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{1,1,1}\right) \oplus \left(\ydiagram{3} \otimes \ydiagram{1,1,1}\right) = \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{1,1,1}$$

dove gli ultimi prodotti tensori si possono dedurre dai caratteri. Dunque

$$\left(\chi_{\operatorname{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{2,1,1}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\operatorname{Res}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1,1}}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{2,1}}\right) + \left(\chi_{\ydiagram{2,1}}, \chi_{\ydiagram{1,1,1}}\right) = 1$$

da cui si ricava nuovamente

$$\operatorname{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1} = \ydiagram{3,1} \oplus \ydiagram{2,2} \oplus \ydiagram{2,1,1}$$

Notiamo una particolare proprietà: i simboli delle rappresentazioni in cui si spezza sono uguali al simbolo della rappresentazione di partenza con l'aggiunta di un quadrato su ogni riga.[3]

Esercizio 10. Dati $H < K < G$, e W una H rappresentazione, allora

$$\operatorname{Ind}_H^G W \cong \operatorname{Ind}_K^G \operatorname{Ind}_H^K W$$

[3] É una proprietà generale, come vedremo in seguito.

Esercizio 11. Dati $H < G$, U un G modulo, W un H modulo, allora

$$U \otimes \mathrm{Ind}_H^G W \cong \mathrm{Ind}_H^G \left(W \otimes \mathrm{Res}_H^G U\right)$$

Hint: usare la mappa $u \otimes g_\sigma w \mapsto g_\sigma(g_\sigma^{-1} u \otimes w)$

Dall'ultimo esercizio, possiamo ricavare, per esempio, che, ponendo W la rappresentazione banale di H,

$$U \otimes \mathrm{Ind}_H^G(\mathit{banale}) \cong \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G U$$

Proviamo ad applicarlo al caso $H = S_{n-1}$, $G = S_n$. Abbiamo bisogno di sapere $\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \ydiagram{3}\ldots$, ma dai caratteri, otteniamo che

$$\left(\chi_{\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}\ydiagram{3}\ldots}, \chi_{\ydiagram{3}\ldots}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{3}\ldots}, \chi_{\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}\ydiagram{3}\ldots}\right) = 1$$

$$\left(\chi_{\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}\ydiagram{3}\ldots}, \chi_{\ydiagram{3,1}\ldots}\right) = \left(\chi_{\ydiagram{3}\ldots}, \chi_{\mathrm{Res}_{S_3}^{S_4}\ydiagram{3,1}\ldots}\right)$$

$$= \left(\chi_{\ydiagram{3}\ldots}, \chi_{\ydiagram{2,1}\ldots}\right) + \left(\chi_{\ydiagram{3}\ldots}, \chi_{\ydiagram{3}\ldots}\right) = 1$$

da cui, per dimensioni

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \ydiagram{3}\cdots = \ydiagram{3}\cdots \oplus \ydiagram{3,1}\ldots$$

Applicando dunque il risultato sopra, otteniamo

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n} U \cong U \otimes \left(\ydiagram{3}\cdots \oplus \ydiagram{3,1}\ldots\right) \cong U \oplus \left(U \otimes \ydiagram{3,1}\ldots\right)$$

In generale, su S_n, se U é irriducibile, allora é difficile che anche $U \otimes \ydiagram{3,1}\ldots$ sia irriducibile.

Esempio 10. Dato $H < G$, e W una H rappresentazione, allora possiamo definire su $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$ una struttura di G rappresentazione per cui

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong \mathrm{Ind}_H^G W$$

isomorfe come G rappresentazioni.

Notiamo che $\mathbb{C}G$ ha struttura di H modulo destro con base g_σ, dove σ varia nelle classi laterali di G su H, e g_σ é un suo rappresentante. Chiamiamo dunque $\{w_1, \ldots, w_s\}$ una base di W, e definiamo l'azione di G su $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$ come

$$g(g_\sigma \otimes w_i) = gg_\sigma \otimes w_i = g_\tau h \otimes w_i = g_\tau \otimes hw_i$$

dove τ é una classe laterale, e $h \in H$ tale che $gg_\sigma = g_\tau h$.
l'indotto di W é la somma di pezzi del tipo $g_\sigma W$, dunque una sua base é data da $g_\sigma w_i$, e l'azione di G su esso é definita da

$$g(g_\sigma w_i) = g_\tau(hw_i)$$

dunque la mappa che manda $g_\sigma \otimes w_i \mapsto g_\sigma w_i$ é un isomorfismo di G rappresentazioni.

Esercizio 12. $\operatorname{Ind}_H^G W$ é l'unico G modulo tale che per ogni G modulo U, e per ogni omomorfismo di H moduli $\varphi : W \to \operatorname{Res}_H^G U$, esiste un unico omomorfismo di G moduli $\widetilde{\varphi} : \operatorname{Ind}_H^G W \to U$ che faccia commutare il diagramma a fianco.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ind}_H^G W \arrow[r, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & U \arrow[d] \\ W \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"] & \operatorname{Res}_H^G U \end{tikzcd}$$

1.2.3 Burnside

Lemma 1.42 (Burnside)**.** Dato G un gruppo che agisce su un insieme finito X, e dato $g \in G$, sia

$$X^g = \{ x \in X \mid gx = x \}$$

Se C é il numero di orbite di X sotto l'azione di G, allora

$$C = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

Dimostrazione. dato $x \in X$, chiamiamo $\mathcal{O}_x$ la sua orbita, mentre chiamiamo $\mathcal{O}$ l'insieme delle orbite, cosicché $C = |\mathcal{O}|$. Avremo

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |\{ (g, x) \in G \times X \mid gx = x \}| = \sum_{x \in X} |Stab(x)|$$

$$= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\mathcal{O}_x|} = |G| \sum_{\mathcal{O}_x \in \mathcal{O}} \sum_{y \in \mathcal{O}_x} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|} = |G| \cdot |\mathcal{O}| = |G| \cdot C$$

□

Esempio 11. Data $\mathbb{C}^n$ la rappresentazione di S_n per permutazione di indici, sappiamo che

$$\mathbb{C}^n = \square\square\square\cdots \oplus \begin{smallmatrix}\square\square\square\cdots \\ \square\end{smallmatrix}$$

e queste due sono irriducibili, pertanto

$$(\chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n}) = 2$$

Questo però potevamo calcolarlo con il lemma di Burnside:

$$(\chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n}) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \chi^2_{\mathbb{C}^n}(g)$$

ma chiamando $X = \{ e_1, \dots, e_n \}$, allora

$$\chi^2_{\mathbb{C}^n}(g) = |\operatorname{Tr}(g)|^2 = |X^g|^2 = |\{ (e_i, e_j) \mid ge_i = e_i \quad ge_j = e_j \}| = |(X \times X)^g|$$

dunque, per Burnside,

$$(\chi_{\mathbb{C}^n}, \chi_{\mathbb{C}^n}) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} |(X \times X)^g| = \frac{1}{|S_n|} |S_n| C = C$$

ma il numero di orbite di $X \times X$ sotto l'azione di G sono 2, poiché se $i \neq j$ e $n \neq m$, allora esiste una permutazione che porta (e_i, e_j) in (e_n, e_m), in particolare $(i, n)(j, m)$, e se $a \neq b$ esiste una permutazione che porta (e_a, e_a) in (e_b, e_b), in particolare (a, b). Dunque le due orbite sono

$$X \times X = \{\, (e_i, e_j) \mid i \neq j \,\} \cup \{\, (e_i, e_i) \,\}$$

Lemma 1.43. Dato G che agisce su un insieme X finito, e V la rappresentazione di permutazione associata, allora V contiene C copie della rappresentazione banale di G, dove C é il numero di orbite di X.

Dimostrazione. Per Burnside

$$(\chi_V, \chi_{banale}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = C$$

$\square$

Ricordiamo che $\operatorname{Sym}^k V$ si può vedere a livello di spazio vettoriale come polinomi omogenei di grado k nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$, con $n = \dim V$.

Esempio 12. Dati $k > 1$ e $n > 2$, allora la rappresentazione $\operatorname{Sym}^k \ydiagram{3,1}\cdots$ non é irriducibile.

Dimostriamolo prima nel caso $k = 2$. Prendiamo la solita rappresentazione di S_n che agisce per permutazione sugli indici di $\mathbb{C}^n$. Sappiamo che

$$\mathbb{C}^n \cong \ydiagram{3,1}\cdots \oplus \ydiagram{3}\cdots$$

dunque

$$\begin{aligned}\operatorname{Sym}^2 \mathbb{C}^n &\cong \operatorname{Sym}^2 \left(\ydiagram{3,1}\ldots\right) \oplus \operatorname{Sym}^2 \left(\ydiagram{3}\ldots\right) \oplus \left(\ydiagram{3}\cdots \otimes \ydiagram{3,1}\ldots\right) \\ &\cong \operatorname{Sym}^2 \left(\ydiagram{3,1}\ldots\right) \oplus \ydiagram{3}\ldots \oplus \ydiagram{3,1}\ldots\end{aligned}$$

ma $\operatorname{Sym}^2 \mathbb{C}^n$ contiene i sottospazi

$$\langle e_1^2 + \cdots + e_n^2 \rangle \qquad \Big\langle \sum_{i \neq j} e_i e_j \Big\rangle$$

che sono distinti, e su entrambi S_n agisce in modo banale, dunque $Sym^2 \mathbb{C}^n$ contiene almeno due copie della rappresentazione banale, e dalla decomposizione sopra, almeno una copia della banale deve essere contenuta in

$\mathrm{Sym}^2 \ydiagram{3,1}\dots$, che nel caso $n > 2$ ha dimensione maggiore di 1, e dunque non é irriducibile.

In generale, possiamo ripetere il ragionamento sopra notando che

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^n \cong \mathrm{Sym}^k \left(\ydiagram{3,1}\dots\right) \oplus \mathrm{Sym}^{k-1} \left(\ydiagram{3,1}\dots\right) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Sym}^1 \left(\ydiagram{3,1}\dots\right) \oplus \ydiagram{3}\dots \\ \cong \mathrm{Sym}^k \left(\ydiagram{3,1}\dots\right) \oplus \mathrm{Sym}^{k-1} \mathbb{C}^n\end{aligned}$$

Notiamo anche che, chiamati X i monomi di grado k in n variabili, allora $\mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^n$ é la rappresentazione per permutazione di S_n su X, di cui sappiamo per Burnside che contiene tante copie della rappresentazione banale quante sono le orbite di X. Ma il numero di orbite di X é anche uguale al numero di modi di scrivere k come somma di n numeri interi, che chiamiamo $p(k, n)$. Dalla scomposizione sopra, dunque,

$$p(k,n) = \left\langle \chi_{\ydiagram{3}\dots}, \chi_{\mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^n} \right\rangle = \left\langle \chi_{\ydiagram{3}\dots}, \chi_{\mathrm{Sym}^k \ydiagram{3,1}\dots} \right\rangle + p(k-1,n)$$

ma $p(k-1, n) < p(k, n)$ poiché data una scrittura di $k-1$ come somma di n interi, che indichiamo come $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ con gli α_i in ordine decrescente, possiamo sommare uno all'intero più grande α_1, ed ottenere una scrittura di k, e questa operazione é iniettiva, ma non suriettiva, poiché non prende le scritture decrescenti $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ di k in cui $\beta_1 = \beta_2$. Da questo concludiamo che $\mathrm{Sym}^k \ydiagram{3,1}\dots$ contiene almeno una copia della rappresentazione banale.

Esercizio 13. Se C é una classe di coniugio di G tale che $C \cap H$ si spezza nelle classi di coniugio $D_1, \dots, D_r$ di H, e W é una H rappresentazione, allora

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}(g) = \frac{[G:H]}{|C|} \sum_{i=1}^{r} |D_i| \chi_W(D_i) \qquad \forall g \in C$$

dove $\chi_W(D_i)$ é il carattere di un qualsiasi elemento della classe D_i.

Finiamo questa sezione con un lemma che useremo in seguito

Lemma 1.44. [4] Dato G gruppo finito che agisce transitivamente sull'insieme finito X, sia $x \in X$ un elemento e V la rappresentazione per permutazione associata. Allora

$$V \cong \mathrm{Ind}_{Stab(x)}^G \langle x \rangle$$

[4] Questo lemma non é stato enunciato nel corso, ma lo useremo implicitamente qualche volta.

Capitolo 2

Rappresentazioni di S_n

2.1 Partizioni e Rappresentazioni

Su S_n possiamo dimostrare che

Lemma 2.1. Tutte le rappresentazioni di S_n hanno caratteri reali

Dimostrazione. Dal Lemma 1.19, sappiamo che, data ρ una rappresentazione e ρ^* la duale,

$$\rho(g^{-1})^t = \rho^*(g)$$

dunque

$$\chi_{\rho^*}(g) = \mathrm{Tr}(\rho^*(g)) = \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})^t) = \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})) = \chi_\rho(g^{-1})$$

ma in S_n gli elementi g e g^{-1} sono coniugati (perché hanno la stessa decomposizione in cicli), dunque

$$\overline{\chi_\rho(g)} = \chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1}) = \chi_\rho(g)$$

$\square$

Osserviamo che se prendiamo una qualsiasi rappresentazione (V, ρ) a traccia reale, allora $\chi_V = \chi_{V^*}$, e pertanto $V \cong V^*$. Dunque su S_n le rappresentazioni sono isomorfe ai loro duali. In realtà vale che

Teorema 2.2. Le rappresentazioni irriducibili di S_n sono a valori nelle matrici reali.

2.1.1 Alcune Tabelle di Caratteri

Esempio 13. Diamo la tabella dei caratteri di S_4, contrassegnando la rappresentazione banale con $\yng(4)$ e quella segno con $\yng(1,1,1,1)$.

S_4	e	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
$\yng(4)$	1	1	1	1	1
$\yng(1,1,1,1)$	1	-1	1	-1	1
$\yng(3,1)$	3	1	0	-1	-1
$\yng(2,1,1)$	3	-1	0	1	-1
$\yng(2,2)$	2	0	-1	0	2
$\mathbb{C}S_4$	24	0	0	0	0

La tabella é stata riempita mettendo prima le rappresentazioni $\yng(4)$, $\yng(1,1,1,1)$ e $\yng(3,1)$, dunque calcolando la rappresentazione irriducibile $\yng(2,1,1) = \yng(3,1) \otimes \yng(1,1,1,1)$, ed infine calcolando l'ultima rappresentazione tramite

$$24 = \dim \mathbb{C}S_4 = (\dim \yng(4))^2 + (\dim \yng(1,1,1,1))^2 + (\dim \yng(3,1))^2 + (\dim \yng(2,1,1))^2 + (\dim \yng(2,2))^2$$

$$4 = 24 - 1 - 1 - 9 - 9 = (\dim \yng(2,2))^2 \implies \dim \yng(2,2) = 2$$

$$\chi_{\mathbb{C}S_4} = \chi_{\yng(4)} + \chi_{\yng(1,1,1,1)} + 3 \cdot \chi_{\yng(3,1)} + 3 \cdot \chi_{\yng(2,1,1)} + 2 \cdot \chi_{\yng(2,2)}$$

Tentiamo di capire che rappresentazione é $\yng(2,2)$. Notiamo che preso g elemento del gruppo di Klein, questo é una doppia trasposizione, dunque $g^2 = e$, e pertanto $\rho(g)$ é una matrice diagonalizzabile che può avere come autovalori solo ± 1. Dato che $\chi_{\yng(2,2)}(g) = 2$, allora l'unica possibilità é che $\rho(g)$ abbia solo l'autovalore 1, e pertanto sia la matrice identità[1]. Dunque ρ manda nell'identità il gruppo di Klein, e pertanto si fattorizza attraverso il quoziente ${}^{S_4}\!/_{K} \cong S_3$ divenendo una rappresentazione irriducibile[2] di S_3, in particolare $\yng(2,1)$.

Proviamo adesso a scrivere una tabella di caratteri per A_4. Per farlo, però, ci serve ricordare le regole per determinare le sue classi di coniugio. Ricordiamo che dato $g \in G$ allora il suo *stabilizzatore* é il sottogruppo $Stab(g) = \{\, h \in G \mid hgh^{-1} = g \,\}$. Se chiamiamo $Orb(g)$ l'orbita di g sotto l'azione per coniugio di G, allora sappiamo che

$$|G| = |Orb(g)| \cdot |Stab(g)|$$

[1] Questo é vero più in generale: data una rappresentazione V e un elemento g per cui $\chi_V(g) = \dim V$, allora $\rho(g) = I$.

[2] Il quoziente di una rappresentazione irriducibile é sempre irriducibile.

Lemma 2.3. Dato $g \in A_n$, C_g la sua classe di coniugio in S_n, $\widetilde{C_g}$ la sua classe di coniugio in A_n, e $Stab(g)$ il gruppo degli stabilizzatori in S_n, avremo che

$$Stab(g) \subseteq A_n \iff C_g \neq \widetilde{C_g}$$

ed in questo caso, la classe di coniugio C_g si spezza in esattamente due classi di coniugio di A_n.

Esercizio 14. Dato $g \in A_n$, e l_i le lunghezze dei cicli con cui é scritto g (compresi quelli di lunghezza 1), allora la classe di coniugio C_g si spezza se e solo se l_i sono dispari e distinti fra loro.

Esempio 14. Diamo la tabella dei caratteri di A_4.

A_4	e	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)
Id	1	1	1	1
$\omega \cdot$ Id	1	ω	ω^2	1
$\omega^2 \cdot$ Id	1	ω^2	ω	1
$\mathrm{Res}^{S_4}_{A_4} \yng(3,1)$	3	0	0	-1
$\mathbb{C}A_4$	12	0	0	0

dall'esercizio precedente, vediamo che la classe di (1 2 3) si spezza, mentre quella di (1 2)(3 4) non si spezza. preso K il gruppo di Klein in A_4, abbiamo che ${A_4}/{K} \cong C_3$, dunque possiamo prendere le rappresentazioni di C_3 (che conosciamo) ed estenderle ad A_4, mandando nell'identità il gruppo di Klein.

C_3	e	(1 2 3)	(1 3 2)
Id	1	1	1
ω	1	ω	ω^2
ω^2	1	ω^2	ω

La rappresentazione $\mathrm{Res}^{S_4}_{A_4} \yng(3,1)$ é infine ottenuta come al solito per differenza con la regolare, ma ci accorgiamo che é anche la restrizione di $\yng(3,1)$ da S_4 in A_4.

In teoria, potevamo provare a restringere tutte le rappresentazioni irriducibili di S_4 ad A_4, ma in generale, la restrizione di un'irriducibile non é irriducibile. Per esempio,

$$\chi_{\mathrm{Res}^{S_4}_{A_4} \yng(2,2)} = (2, -1, -1, 2) = \chi_{\omega \cdot \mathrm{Id}} + \chi_{\omega^2 \cdot \mathrm{Id}}$$

Un altro controesempio é dato per esempio, quando restringiamo una rappresentazione irriducibile V di dimensione maggiore di 1 al centro del gruppo G, infatti il centro é abeliano, quindi le sue uniche rappresentazioni irriducibili sono quelle di dimensione 1.

Esercizio 15. Le rappresentazioni irriducibili del gruppo diedrale sono di dimensione 1 o 2.

Esempio 15. Scriviamo la tabella dei caratteri di S_5

S_5	e	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4 5)	(1 2)(3 4 5)
$\ydiagram{5}$	1	1	1	1	1	1	1
$\ydiagram{1,1,1,1,1}$	1	-1	1	-1	1	1	-1
$\ydiagram{4,1}$	4	2	1	0	0	-1	-1
$\ydiagram{2,1,1,1}$	4	-2	1	0	0	-1	1
$\ydiagram{3,1,1}$	6	0	0	0	-2	1	0
$\ydiagram{3,2}$	5	1	-1	-1	1	0	1
$\ydiagram{2,2,1}$	5	-1	-1	1	1	0	-1
$\mathbb{C}S_5$	120	0	0	0	0	0	0

Scriviamo dapprima le rappresentazioni banale, segno, standard e il prodotto tensore tra la standard e la segno. Dunque, tramite la formula

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right)$$

calcoliamo il prodotto alternante della standard, e ci accorgiamo che é irriducibile.

$$\ydiagram{3,1,1} = \Lambda^2\left(\ydiagram{4,1}\right)$$

inoltre, calcoliamo anche il prodotto simmetrico della standard, tramite

$$\ydiagram{4,1} \otimes \ydiagram{4,1} \simeq \Lambda^2\left(\ydiagram{4,1}\right) \oplus \mathrm{Sym}^2\left(\ydiagram{4,1}\right)$$

e ci accorgiamo che é composto dalla banale, dalla standard e da un'altra rappresentazione irriducibile.

$$\mathrm{Sym}^2\left(\ydiagram{4,1}\right) = \ydiagram{5} \oplus \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{3,2}$$

Infine, possiamo calcolare l'ultima rappresentazione sia per differenza con la regolare, che per prodotto tensore con la segno

$$\ydiagram{2,2,1} = \ydiagram{3,2} \otimes \ydiagram{1,1,1,1,1}$$

Notiamo che potevamo dedurre le dimensioni delle ultime due rappresentazioni per differenza con la regolare, infatti, chiamate x, y queste dimensioni, sappiamo che

$$120 = 1 + 1 + 16 + 16 + 36 + x^2 + y^2 \implies x^2 + y^2 = 50$$

e le uniche due coppie di soluzioni sono $(1, 7)$ e $(5, 5)$, ma le rappresentazioni di dimensione 1 di S_n sono solo banale e segno, o anche non può esistere una rappresentazione irriducibile di dimensione 7 poiché $7 \not| 120$.

Esercizio 16. Se n é il numero di classi di coniugio di G, e M é la matrice data dalla tabella dei caratteri di G, con la colonna relativa alla classe di coniugio C moltiplicata per $\sqrt{{|C|}/{|G|}}$, allora M é unitaria.

Esercizio 17.

$$\sum_{V_i \ irr.} |\chi_{V_i}(g)|^2 = \frac{|G|}{|C|} \qquad \forall g \in C$$

Hint : $M^T \overline{M} = I = \overline{M} M^T$

Esercizio 18. Se $g, h \in G$ sono due elementi che non appartengono alla stessa classe di coniugio,

$$\sum_{V_i \ irr.} \overline{\chi_{V_i}(g)} \chi_{V_i}(h) = 0$$

Esempio 16. Scriviamo la tavola dei caratteri di A_5

A_5	e	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 5 4)
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{5}$	1	1	1	1	1
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{4,1}$	4	1	0	-1	-1
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{2,2,1}$	5	-1	1	0	0
X	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Y	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\mathbb{C}A_5$	60	0	0	0	0

Dopo aver scritto la rappresentazione banale, ed aver testato che $\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{4,1}$ e $\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{2,2,1}$ sono irriducibili, dalla rappresentazione regolare deduciamo che la somma dei quadrati delle dimensioni delle ultime due rappresentazioni (che chiamiamo X e Y) deve essere 18, e l'unica possibilità é che siano entrambe 3.

Inoltre, si nota che $V = \mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{3,1,1}$ ha dimensione 6, non contiene la rappresentazione banale, e $(V, V) = 2$, dunque l'unica possibilità é che sia la somma $X \oplus Y$. Per calcolare X e Y, riscriviamo la tabella con variabili al posto dei loro caratteri

A_5	e	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3 5 4)
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{5}$	1	1	1	1	1
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{4,1}$	4	1	0	-1	-1
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{2,2,1}$	5	-1	1	0	0
X	3	a	c	e	g
Y	3	b	d	f	h
$\mathrm{Res}^{S_5}_{A_5} \ydiagram{3,1,1}$	6	0	-2	1	1

Dall'ultima riga ricaviamo

$$a + b = 0 \implies a = -b$$

dalla ortogonalità della seconda, quarta e quinta colonna, otteniamo

$$ae + bf = a(e - f) = 0 \qquad ag + bh = a(g - h) = 0$$

ma se $a \neq 0$, allora $e = f$ e $g = h$, da cui le ultime due colonne della tabella sono uguali, ma questo é impossibile per ortogonalità delle colonne. Dunque $a = b = 0$.

Imponendo l'ortogonalità di X con la terza e seconda rappresentazione irriducibile, otteniamo

$$12 - 12(e + g) = 0 \implies e + g = 1 \qquad 15 + 15c = 0 \implies c = -1$$

e dalla normalità di X, infine otteniamo

$$9 + 15 + 12(e^2 + g^2) = 60 \implies e^2 + g^2 = 3$$

$$\implies e^2 + (1 - e)^2 = 3 \implies e^2 - e - 1 = 0 \implies e = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dato che per Y valgono le stesse relazioni, riusciamo infine a completare la tabella.

Notiamo che effettivamente A_5 é isomorfo a sé stesso tramite un isomorfismo esterno (coniugio per trasposizione) che scambia le classi di coniugio dei 5-cicli, e questo trasforma X in Y e viceversa.

Notiamo inoltre che A_5 é il gruppo delle rotazioni che lasciano fisso l'icosaedro (o, dualmente, il dodecaedro), dunque A_5 agisce su $\mathbb{C}^3$, e la rappresentazione associata ha dimensione 3, ed ha un'azione non banale, dunque deve essere X o Y. Dato che queste hanno carattere non razionale, ciò dimostra che é impossibile immergere l'icosaedro in $\mathbb{R}^3$ in modo che i vertici abbiano coordinate razionali. (Analogamente si può fare col diedrale D_5 e dimostrare che é impossibile immergere il pentagono in $\mathbb{R}^3$ a coordinate razionali).

2.1.2 Diagrammi e Tableaux

Dato un naturale n, diciamo che $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ é una sua partizione se i λ_i sono naturali e $\sum_i \lambda_i = n$, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$. Scriviamo $\lambda \dashv n$ per dire che é una partizione, e indichiamo con $|\lambda|$ la somma dei λ_i.

Ad una partizione λ é associato un sottogruppo di S_n, definito come

$$S_\lambda = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots S_{\lambda_k} < S_n$$

$$S_{\lambda_i} = \left\{ \sigma \in S_n \;\middle|\; \sigma \text{ permuta gli indici da } (1 + \sum_{j<i} \lambda_j) \text{ a } (\lambda_i + \sum_{j<i} \lambda_j) \right\}$$

dove possiamo non considerare gli S_0 e S_1. Grazie a questo sottogruppo, definiamo delle S_n rappresentazioni come indotte della rappresentazione banale da S_λ a S_n

$$M^\lambda := \mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n} \textit{ banale}$$

Definizione 2.4. Dato $\lambda \dashv n$, il suo *diagramma di Ferrer o Young*, o la sua *forma o shape* é una tabella sulle cui righe, in ordine, ci sono λ_i quadratini.

Esempio 17. Dato $n = 13$ e $\lambda = (5, 3, 2, 2, 1)$ una sua partizione, il suo diagramma di Ferrer é $\begin{array}{lllll} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & & \\ \square & \square & & & \\ \square & \square & & & \\ \square & & & & \end{array}$

Definizione 2.5. Dato $\lambda \dashv n$, un *Tableau di Young* é un riempimento del diagramma di Ferrer con i numeri da 1 a n.

Esempio 18. Dato $n = 9$ e $\lambda = (4, 2, 2, 1)$, un suo tableau é $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 & 8 \\ \hline 9 & 6 \\ \cline{1-2} 3 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array}$

Definizione 2.6. Due λ tableaux sono equivalenti per riga se su ogni riga hanno gli stessi elementi. Se t_1 e t_2 sono i due tableaux equivalenti, allora si indica $t_1 \sim t_2$ e la loro classe di equivalenza viene chiamata λ *tabloid*, e scritta come $\{ t_1 \} = \{ t_2 \}$. Graficamente, il tabloid indica con il tableau senza righe verticali.

Esempio 19. Dato $n = 9$, $\lambda = (4, 2, 2, 1)$, e due tableaux $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 & 8 \\ \hline 9 & 6 \\ \cline{1-2} 3 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array}$ e $t_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 8 & 1 & 4 \\ \hline 6 & 9 \\ \cline{1-2} 3 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array}$, allora sono equivalenti, e la loro classe di equivalenza é

$$\{ t \} = \begin{array}{cccc} \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline 6 & 9 \\ \cline{1-2} 3 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Notiamo che l'ordine degli elementi delle righe del tabloid non é importante.

S_n agisce sull'insieme dei λ tabloid, permutando gli elementi corrispondenti, dunque genera una rappresentazione per permutazione transitiva sull'insieme dei tabloid, che ristretta a S_λ risulta coincidere con la rappresentazione banale. Inoltre, per ogni tabloid $\{\, t \,\}$, il suo stabilizzatore é isomorfo a S_λ, e si può concludere per Lemma 1.44 che la rappresentazione per permutazione generata é l'azione di S_n sulle classe laterali modulo S_λ, ossia é esattamente

$$\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n} \, \textit{banale} = M^\lambda$$

Esempio 20. Se $\lambda = (n)$ é una partizione di n, allora

$$S_\lambda = S_n \implies$$

$$M^\lambda = \mathrm{Ind}_{S_n}^{S_n} \, \textit{Banale} = \textit{Banale} \cong \mathbb{C} \; \overline{\underline{\;1\ \ 2\ \ \dots\ \ n\;}}$$

Se invece $\lambda = (n-1, 1)$, allora

$$S_\lambda = S_{n-1} \times S_1 = S_{n-1} \implies$$

$$M^\lambda = \mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \, \textit{Banale} = \textit{Banale} \oplus \textit{Standard} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} \; \begin{array}{l} \hline 1\ \ 2\ \ \dots\ \ \hat{i}\ \ \dots\ \ n \\ \hline \underline{i} \end{array}$$

Proviamo ora a dare un ordinamento alle partizioni

Definizione 2.7. Date due n partizioni λ e μ, diremo che λ domina μ, e lo scriveremo $\lambda \succeq \mu$, se vale

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i \qquad \forall i$$

Esempio 21. possiamo facilmente verificare che $\ydiagram{3,3} \succeq \ydiagram{2,2,1,1}$. In particolare la partizione (n) domina tutte le altre, mentre la partizione $(1, 1, \dots, 1)$ é dominata da tutte. Osserviamo, inoltre che questo é un *ordine parziale*, poiché, per esempio, $\ydiagram{4,1,1}$ e $\ydiagram{3,3}$ non sono confrontabili.

Teorema 2.8 (Dominanza)**.** Siano t, s un λ tableau ed un μ tableau, con $\lambda, \mu \dashv n$. Se per ogni riga i gli elementi della riga s_i sono su colonne diverse di t, allora $\lambda \succeq \mu$.

Dimostrazione. Presa la prima riga s_1, visto che gli elementi sono su colonne distinte di t, allora esiste una permutazione $\sigma \in S_n$ che li porti sulla prima riga t_1, ed agisca senza scambiare elementi di colonne diverse. Applicandola, otteniamo $\mu_1 = |s_1| \leq |t_1| = \lambda_1$, ed inoltre gli elementi della seconda riga s_2 saranno ancora su colonne distinte, anche se alcuni potranno essere su t_1. Gli elementi di s_2 fuori da t_1 possono essere portati tramite una permutazione su t_2, dunque $\mu_1 + \mu_2 = |s_1| + |s_2| \leq |t_1| + |t_2| = \lambda_1 + \lambda_2$ e così via. $\square$

Un altro ordinamento che possiamo porre sulle partizioni é il lessicografico (Lex), che indichiamo con $\lambda \geq \mu$. Questo é un ordine totale, ed estende la dominanza, in quanto

$$\lambda \succeq \mu \implies \lambda \geq \mu$$

Quello che faremo in seguito sarà ordinare i M^λ per ordine lessicografico di λ e fattorizzare i moduli con quelli associati a partizioni più grandi secondo Lex.

Ritornando ai tableau, prendiamo t e indichiamo con R_i le sue righe e con C_i le colonne. Definiamo

$$R_t := S_{R_1} \times S_{R_2} \times \cdots \times S_{R_l}$$

$$C_t := S_{C_1} \times S_{C_2} \times \cdots \times S_{C_m}$$

dove S_{R_i} e S_{C_i} sono i sottogruppi di S_n che permutano gli indici contenuti nella i-esima riga o colonna di t. Notiamo che $R_t \cong S_\lambda$, dove t é un λ tableau.

Esempio 22. Il tableaux $t = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4 & 8 \\ \hline 9 & 6 \\ \cline{1-2} 3 & 7 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$ ha

$$C_t = S_{\{2,9,3,5\}} \times S_{\{1,6,7\}} \times S_{\{4\}} \times S_{\{8\}} \cong S_4 \times S_3$$

$$R_t = S_{\{2,1,4,8\}} \times S_{\{9,6\}} \times S_{\{3,7\}} \times S_{\{5\}} \cong S_4 \times S_2 \times S_2 \cong S_\lambda$$

Dato H un sottoinsieme di S_n, possiamo definire

$$H^+ := \sum_{\pi \in H} \pi \in \mathbb{C}S^n \qquad H^- := \sum_{\pi \in H} \operatorname{sgn}(\pi)\pi \in \mathbb{C}S^n$$

e dato che, dato un tableau t, C_t e gli S_{C_i} sono sottogruppi di S_n, definiamo

$$k_t := C_t^- = \sum_{g \in C_t} \operatorname{sgn}(g) g \in \mathbb{C}S^n \qquad k_{C_i} := S_{C_i}^- = \sum_{g \in S_{C_i}} \operatorname{sgn}(g) g \in \mathbb{C}S^n$$

e notiamo che in realtà $k_t = k_{C_1} \cdot k_{C_2} \cdot \ldots \cdot k_{C_m}$.

Esempio 23. Dato il tableau $t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$, avremo

$$k_t = k_{C_1} \cdot k_{C_2} \cdot k_{C_3} = (e - (3,4))(e - (2,5)) = e - (3,4) - (2,5) + (3,4)(2,5)$$

Definizione 2.9. Dato t un λ tableau, il *politableau* associato é

$$e_t := k_t \{ t \} \in M^\lambda$$

Esempio 24. Dato il tableau $t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$, avremo

$$e_t = k_t \{ t \} = (e - (3,4) - (2,5) + (3,4)(2,5)) \begin{array}{ccc}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

$$= \begin{array}{ccc}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{ccc}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} - \begin{array}{ccc}\hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array} + \begin{array}{ccc}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Definizione 2.10. dato λ, il *modulo di Specht* S^λ é il sottomodulo di M^λ generato dagli e_t al variare di t tra i λ tableaux. S^λ é anche indicato con il diagramma di Young associato a λ.

Vedremo in seguito che gli S^λ sono esattamente le rappresentazioni irriducibili di S_n. Inoltre vedremo anche due metodi per calcolare la dimensione di S^λ:

- Dato un diagramma di Young, la dimensione di S^λ sono il numero di λ tableaux in modo che i numeri su ogni riga e colonna siano crescenti.
- Dato un diagramma di Young, la dimensione di S^λ é $n!$ diviso il prodotto delle lunghezze degli uncini presenti sul diagramma, dove un uncino con vertice in una casella del diagramma é l'insieme composto da quella casella, quelle che le stanno sotto in verticale, e quelle che le stanno a destra in orizzontale. La lunghezza di un uncino é il numero di caselle da cui é composto.

Esempio 25. Dato $\ydiagram{2,2}$, questo può essere riempito solo in due maniere in modo che i numeri su righe e colonne siano crescenti: $\begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{ytableau}$ e $\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau}$. Dunque la dimensione di S^λ con $\lambda = (2,2)$ é 2.

Contando gli uncini, avremo che l'uncino con vertice la casella in alto a sinistra ha lunghezza 3, quelli con vertici nelle caselle in alto a destra e in basso a sinistra hanno lunghezza 2, mentre quello col vertice in basso a destra ha lunghezza 1, dunque $4!/3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

Lemma 2.11. Dato $\pi \in S_n$, e t un λ tableau con $\lambda \dashv n$, allora

1. $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$
2. $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$
3. $k_{\pi t} = \pi k_t \pi^{-1}$
4. $e_{\pi t} = \pi e_t$

Dimostrazione. proviamo solo il punto 4.

$$e_{\pi t} = k_{\pi t} \{ \pi t \} = \pi k_t \pi^{-1} \{ \pi t \} = \pi k_t \{ t \} = \pi e_t$$

$\square$

Lemma 2.12. Dato t un qualsiasi λ tableau, allora $S^\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot e_t$

Dimostrazione.

$$S^\lambda = \langle e_t \rangle_t = \langle e_{\pi t} \rangle_\pi = \langle \pi e_t \rangle_\pi = \mathbb{C}S^n \cdot e_t$$

$\square$

L'ultimo risultato ci dice che S^λ é generato da un elemento. In questo caso, diciamo che il modulo é *ciclico.* Notiamo che tutte le rappresentazioni irriducibili sono generate da un elemento, o meglio, qualsiasi loro elemento non nullo le genera, dunque sono tutte moduli ciclici; in generale, però, il viceversa non é vero, dunque non possiamo ancora dire se S^λ sia irriducibile.[3]

2.1.3 Teorema del Sottomodulo di James

Poniamo su M^λ un prodotto hermitiano

$$\langle \{\, t \,\} , \{\, s \,\} \rangle = \delta_{\{\, t \,\},\{\, s \,\}}$$

Questo é S^n invariante poiché per ogni $g \in S_n$ e per ogni tableau t, vale $g\,\{\, t \,\} = \{\, gt \,\}$. Avremo

Lemma 2.13 (segno)**.** Dato $H < S_n$,

1. $\pi H^- = H^- \pi = \operatorname{sgn}(\pi) H^- \qquad \forall \pi \in H$
2. $\langle H^- u, v \rangle = \langle u, H^- v \rangle \qquad \forall u, v \in M^\lambda$
3. Se la trasposizione (b, c) appartiene a H, allora esiste $k \in \mathbb{C}H$ per cui
$$H^- = k(e - (b, c))$$
4. Dato t un tableau, e b, c due elementi sulla stessa riga di t, tali che $(b, c) \in H$, allora $H^- \{\, t \,\} = 0$

Dimostrazione. 1. Si verifica con facili conti

2. Dato che il prodotto hermitiano definito sopra é S_n invariante, avremo
$$\left\langle H^- u, v \right\rangle = \sum_{g \in H} \operatorname{sgn}(g) \left\langle gu, v \right\rangle = \sum_{g \in H} \operatorname{sgn}(g) \left\langle u, g^{-1} v \right\rangle$$
ma $\operatorname{sgn}(g) = \operatorname{sgn}(g^{-1})$, dunque
$$\sum_{g \in H} \operatorname{sgn}(g) \left\langle u, g^{-1} v \right\rangle = \sum_{g \in H} \operatorname{sgn}(g^{-1}) \left\langle u, g^{-1} v \right\rangle = \left\langle u, H^- v \right\rangle$$

3. Sappiamo che H é l'unione delle sue classi laterali rispetto al sottogruppo $L = \{\, e, (b, c) \,\}$, dunque, chiamati θ_i i loro rappresentanti,
$$H = \bigcup_i \theta_i L \implies H^- = \left(\sum_i \operatorname{sgn}(\theta_i) \theta_i \right) (e - (b, c))$$

[3]Una rappresentazione é irriducibile se e solo se ogni suo elemento la genera. Una base non basta, come nel caso di $\mathbb{C}^n$ sotto l'azione di S_n per permutazione.

4. Dato che $(b,c)\{t\} = \{t\}$, allora

$$H^-\{t\} = k(e-(b,c))\{t\} = 0$$

$\square$

Corollario 2.14 (A)**.** Dato t un λ tableau, e s un μ tableau, allora

- $k_t\{s\} \neq 0 \implies \lambda \succeq \mu$
- $k_t\{s\} \neq 0 \quad \lambda = \mu \implies k_t\{s\} = \pm e_t \in S^\lambda$

Dimostrazione. Dati b, c nella stessa riga di s, se fossero nella stessa colonna di t avremmo $(b,c) \in C_t$, e dal 4° punto del Lemma 2.13,

$$k_t\{s\} = C_t^-\{s\} = 0$$

che é un assurdo. Dunque elementi della stessa riga di s stanno in colonne diverse di t, e grazie al teorema 2.8, questo ci dice che $\lambda \succeq \mu$. Se inoltre $\mu = \lambda$, esiste un elemento $\pi \in C_t$ per cui $s = \pi t$, e dal primo punto del Lemma 2.13,

$$k_t\{s\} = k_t\pi\{t\} = C_t^-\pi\{t\} = \mathrm{sgn}(\pi)C_t^-\{t\} = \mathrm{sgn}(\pi)e_t$$

$\square$

Corollario 2.15 (B)**.** Dato $u \in M^\mu$ e t un μ tableau, allora esiste $\gamma \in \mathbb{C}$ tale che $k_t u = \gamma e_t$

Dimostrazione. Scritto u come somma dei μ tabloid $\{s_i\}$, otteniamo

$$u = \sum_i c_i\{s_i\} \implies k_t u = \sum_i c_i k_t\{s_i\} = \left(\sum_i c_i\gamma_i\right)e_t$$

dove, usando il quarto punto del lemma 2.13, sappiamo che $\gamma_i \in \{-1, 0, 1\}$. $\square$

Teorema 2.16 (Sottomodulo di James)**.** Dato U un S_n sottomodulo di M^μ, allora $S^\mu \subseteq U$ oppure $U \subseteq (S^\mu)^\perp$.

Dimostrazione. prendiamo $u \in U$ e t un μ tableau. Sappiamo dal Corollario B che $k_t u = \gamma e_t$, dunque ci sono due casi. Se esistono $u \in U$ e t per cui $\gamma \neq 0$, allora, dato che S^μ é ciclico,

$$k_t u = \gamma e_t \in U \implies e_t \in U \implies S^\mu = \mathbb{C}S_n \cdot e_t \subseteq U$$

Se invece per tutti gli $u \in U$ e per tutti i tableaux t si ha $k_t u = 0$, allora

$$\langle u, e_t\rangle = \langle u, k_t\{t\}\rangle = \langle k_t u, \{t\}\rangle = 0$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato il secondo punto del Lemma 2.13. Questo dice in particolare che $U \subseteq (S^\mu)^\perp$. $\square$

Il teorema di James, ci dice in particolare che S^μ non ha sottomoduli propri, e dunque é una rappresentazione irriducibile ed é una sottorappresentazione di M^μ.

Lemma 2.17. Dato $\theta \in \mathrm{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\mu)$ non nullo, allora $\lambda \succeq \mu$, e se $\lambda = \mu$, allora θ é una moltiplicazione per scalare.

Dimostrazione. Dato che $\theta \neq 0$, allora esiste un e_t con immagine non nulla, e visto che $M^\lambda \cong S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$, possiamo estendere $\theta : M^\lambda \to M^\lambda$ ponendo che su $(S^\lambda)^\perp$ vada a zero. Allora

$$0 \neq \theta(e_t) = \theta(k_t \{ t \}) = k_t \theta(\{ t \}) = k_t \sum_i c_i \{ s_i \} \implies \exists i : k_t \{ s_i \} \neq 0$$

e dal corollario A, avremo che $\lambda \succeq \mu$.

Se $\lambda = \mu$, allora preso e_t sopra, ed utilizzando il corollario B,

$$0 \neq \theta(e_t) = \theta(k_t \{ t \}) = k_t \theta(\{ t \}) = \gamma e_t$$

ma dato che e_t genera S^λ come S_n modulo, allora

$$\theta(e_{\pi t}) = \theta(\pi e_t) = \pi \theta(e_t) = \pi \gamma e_t = \gamma \pi e_t \quad \forall \pi \in S_n$$

ci dice che θ agisce come la moltiplicazione per γ su S^λ.

□

Questo vuol dire in particolare che

$$\dim_{\mathbb{C}} \Big(\mathrm{Hom}_{S_n}(S^\lambda, M^\lambda) \Big)$$

ossia che c'è una sola copia di S^λ in M^λ. Inoltre se S^λ é contenuto in M^μ, allora $\lambda \succeq \mu$.

Teorema 2.18. I moduli S^λ descrivono tutte le rappresentazioni irriducibili di S_n al variare di $\lambda \dashv n$

Dimostrazione. Dato che i S^μ sono tanti quante le partizioni di n, e sono anche irriducibili, basta dimostrare che non ce ne siano due isomorfi. Poniamo dunque $S^\lambda \cong S^\mu$, e questo dice che c'è una copia di S^λ dentro M^μ, e dunque esiste un omomorfismo non nullo $\theta : S^\lambda \to M^\mu$, e dal Lemma 2.17, allora $\lambda \succeq \mu$. Facendo il ragionamento inverso, $\mu \succeq \lambda$, dunque $\mu = \lambda$. □

Corollario 2.19.

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} k_{\lambda\mu} S^\lambda \qquad k_{\mu\mu} = 1 \qquad k_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$$

Più avanti, dimostreremo che questi numeri naturali sono entità combinatoriche famose e calcolabili a mano.

Fissato ora t un λ tableau, creiamo una mappa di S_n moduli

$$\widetilde{\phi} : M^\lambda \to \mathbb{C}S_n \ : \ \{\, t \,\} \mapsto R_t^+$$

ed esteso tramite l'azione di $\mathbb{C}S_n$ a tutto M^λ. Chiamando ϕ la sua ristretta su S^λ, scopriamo che ha la proprietà

$$\phi(e_t) = C_t^- R_t^+$$

Dato che S^λ é ciclico, allora la mappa ϕ ristretta a S^λ sarà

$$\phi : S^\lambda \twoheadrightarrow \mathbb{C}S_n \cdot C_t^- R_t^+$$

Esercizio 19. ϕ é un isomorfismo di rappresentazioni, ossia

$$S^\lambda \cong \mathbb{C}S_n \cdot C_t^- R_t^+$$

Chiamato ora

$$V_\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot R_t^+ C_t^-$$

sottomodulo di $\mathbb{C}S_n$, allora

Lemma 2.20.

$$S^\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot C_t^- R_t^+ \cong \mathbb{C}S_n \cdot R_t^+ C_t^- = V_\lambda$$

ed in particolare, V_λ non dipende dal tableau t.

Dimostrazione. Prendiamo l'omomorfismo di S_n moduli

$$\varphi : \mathbb{C}S_n \cdot C_t^- R_t^+ \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}S_n \cdot C_t^- R_t^+ C_t^- \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}S_n \cdot C_t^- R_t^+ C_t^- R_t^+$$

dove φ_1 é la moltiplicazione a destra per C_t^-, mentre φ_2 é la moltiplicazione a destra per R_t^+. Dato che il primo modulo é S^λ e l'ultimo é contenuto in S^λ, allora φ é un endomorfismo di S^λ in sé, e dato che é irriducibile, allora per Schur sappiamo che φ é la moltiplicazione per uno scalare $c \in \mathbb{C}$. Consideriamo la mappa di S_n moduli

$$\psi : \mathbb{C}S_n \xrightarrow{\cdot C_t^- R_t^+} \mathbb{C}S_n$$

che estende φ, ed ha immagine contenuta in S^λ. Sappiamo che

$$C_t^- R_t^+ = \sum_{p \in C_t} \sum_{q \in R_t} \operatorname{sgn}(p) \cdot pq$$

dunque se volessimo calcolare la traccia di ψ attraverso gli elementi della base S_n, dovremmo, per ogni $h \in S_n$, trovare il coefficiente in h di $hC_t^- R_t^+$, ma questo corrisponde al coefficiente dell'elemento neutro e in $C_t^- R_t^+$. Per ottenerlo, bisogna trovare

$$p = q^{-1} \qquad p \in C_t \quad q \in R_t$$

ma $p = q^{-1} \in C_t \cap R_t$, e la sola permutazione che fissa righe e colonne é l'identità, dunque il coefficiente di h in $hC_t^- R_t^+$ sarà sempre 1, da cui $\mathrm{Tr}(\psi) = |S_n| = n!$. D'altro canto, ψ manda tutto in S^λ, e su quest'ultimo coincide con φ, ossia é a moltiplicazione per scalare c; presa dunque una base di S^λ e completata a base di $\mathbb{C}S_n$ con elementi del kernel di ψ, otteniamo che la traccia é

$$\mathrm{Tr}(\psi) = c \cdot \dim S^\lambda = n! \implies c = \frac{n!}{\dim S^\lambda} \neq 0$$

Dunque $c \neq 0$[4] e pertanto φ é un isomorfismo di S^λ in sé. Questo ci dice in particolare che φ_1 é iniettiva, e dato che $\mathbb{C}S_n C_t^- R_t^+ C_t^- \subseteq V_\lambda$, allora otteniamo che $\dim V_\lambda \geq \dim S^\lambda$.

Abbiamo ottenuto, in particolare, che

$$C_t^- R_t^+ \in S^\lambda \implies \varphi(C_t^- R_t^+) = c \cdot C_t^- R_t^+ = C_t^- R_t^+ \cdot C_t^- R_t^+$$

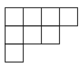
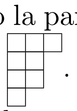
ma immaginando di espandere l'ultima relazione in base S_n, ed applicare l'anti-involuzione $g \mapsto g^{-1}$ a tutti gli elementi della base, otteniamo

$$c \cdot R_t^+ C_t^- = R_t^+ C_t^- \cdot R_t^+ C_t^-$$

da cui possiamo costruire l'isomorfismo analogo

$$\phi : \mathbb{C}S_n \cdot R_t^+ C_t^- \xrightarrow{\phi_1} \mathbb{C}S_n \cdot R_t^+ C_t^- R_t^+ \xrightarrow{\phi_2} \mathbb{C}S_n \cdot R_t^+ C_t^- R_t^+ C_t^-$$

e concludere che, dato che ϕ_1 é iniettiva e va da V_λ in S^λ, allora $\dim V_\lambda \leq \dim S^\lambda$ e pertanto $\dim V_\lambda = \dim S^\lambda$ e ϕ_1 e φ_1 sono entrambi isomorfismi di S_n moduli. □

Lemma 2.21. Data $\lambda \dashv n$, ne prendiamo la partizione *trasposta* o *coniugata* λ'. Per esempio, la trasposta di  é . Dimostrare che, chiamata μ la partizione di n del tipo $(1, 1, \ldots, 1)$, allora

$$S^{\lambda'} \cong S^\lambda \otimes S^\mu$$

In altri termini, tensorizzare per la rappresentazione segno traspone il diagramma.

[4] In realtà, c é un numero intero, grazie all'esercizio 8

Dimostrazione. Per il lemma precedente,

$$V_\lambda \cong \mathbb{C}S_n{\cdot}C_t^+R_t^- = \mathbb{C}S_n \sum_{p\in C_t}\sum_{q\in R_t} \operatorname{sgn}(p){\cdot}pq = \mathbb{C}S_n \sum_{p\in C_t}\sum_{q\in R_t} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(pq){\cdot}pq$$

Preso t' tableau di λ', abbiamo $R_{t'} = C_t$ e $C_{t'} = R_t$, da cui

$$V_{\lambda'} \cong \mathbb{C}S_n \cdot R_t^+C_t^- = \mathbb{C}S_n \sum_{p\in R_t}\sum_{q\in C_t} \operatorname{sgn}(q)\cdot pq$$

Chiamiamo ora f la mappa di moltiplicazione per il segno

$$f : \mathbb{C}S_n \to \mathbb{C}S_n : g \mapsto sgn(g)g$$

Questa é biettiva, e da quanto visto sopra, scopriamo che la ristretta su V_λ ha immagine V_λ'. La rappresentazione S^μ ha dimensione 1, dunque é del tipo $\langle v\rangle$. Componendo f con l'isomorfismo

$$V_\lambda \otimes S^\mu \to V_\lambda : x\otimes tv \mapsto tx$$

otteniamo che V_λ' é isomorfo a $V_\lambda \otimes S^\mu$, e resta da mostrare solo che é una mappa di rappresentazioni, che é una facile verifica. □

Teorema 2.22 (Maschke)**.** Dato K campo di caratteristica $p > 0$, e G un gruppo finito di ordine n, con p che non divide n, allora ogni rappresentazione di G si spezza in somma diretta di irriducibili.

Dimostrazione. Notiamo che per dimostrare il teorema, basta mostrare che, data una rappresentazione V e una sua sottorappresentazione W, esiste sempre la sua rappresentazione complementare U, per cui $V = W \oplus U$. Prendiamo dunque $\pi : V \to W$ una qualsiasi proiezione, e definiamo

$$\varphi = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}(g\pi) \qquad (g\pi)v = g\cdot\pi(g^{-1}v)$$

che si verifica essere un omomorfismo di G moduli, e ristretto s W é l'identità poiché

$$w\in W \implies \varphi(w) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}(g\pi)w = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} gg^{-1}w = w$$

Dunque φ é anche una proiezione, e pertanto

$$V = W \oplus \operatorname{Ker}\varphi$$

□

2.2 Funzioni Simmetriche

Per definire le funzioni simmetriche, abbiamo bisogno prima di dire cosa sono i polinomi simmetrici, e dare un po' di notazione

Definizione 2.23. Un polinomio $p(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ si dice *simmetrico* se é invariante rispetto all'azione di S_n sui polinomi, che agisce scambiando le variabili. Indichiamo l'anello dei polinomi simmetrici di n variabili con Λ_n

Sappiamo che Λ_n é un anello graduato, poiché dato un polinomio simmetrico, i suoi monomi di grado k formano ancora un polinomio simmetrico, poiché l'azione di S_n lascia invariato il grado. Dunque chiamiamo i polinomi in n variabili, omogenei di grado k e simmetrici Λ_n^k, ottenendo

$$\Lambda_n = \Lambda_n^0 \oplus \Lambda_n^1 \oplus \Lambda_n^2 \oplus \dots$$

D'ora in poi usiamo la notazione multinomiale, ossia dato

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \implies x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Inoltre indichiamo il peso e la lunghezza di α con

$$|\alpha| = \sum \alpha_i \qquad l(\alpha) = |\{ i \mid \alpha_i \neq 0 \}|$$

Quando usiamo la lettera λ al posto di α, intendiamo che le componenti sono in ordine decrescente

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \implies \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

Notiamo che preso un polinomio simmetrico $p(x)$ allora contiene x^α se e solo se contiene tutti i suoi permutati, ossia $x^{\rho\alpha}$, dove $\rho \in S_n$ agisce per permutazione su $\mathbb{N}^n$. Da questo, possiamo definire

Definizione 2.24.

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in H_\lambda} x^\alpha \qquad H_\lambda = \{ \rho\lambda \in \mathbb{N}^n \mid \rho \in S_n \}$$

Esempio 26.

$$m_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$m_{(2,0,0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Il seguente lemma di facile dimostrazione ci dice che i m_λ sono una base dei nostri anelli.

Lemma 2.25.
$\{ m_\lambda \mid l(\lambda) \leq n, |\lambda| = k \}$ é una base di Λ_n^k.
$\{ m_\lambda \mid l(\lambda) \leq n \}$ é una base di Λ_n.

Presa ora $m \geq n$ possiamo definire la proiezione di anelli

$$\pi_{m,n} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \to \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

che manda x_i in zero se $i > n$, altrimenti lo manda in sé. Questa si restringe agli anelli dei polinomi simmetrici

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \to \Lambda_n$$

ed é suriettiva poiché

$$\rho_{m,n}(m_\lambda(x_1, \dots, x_m)) = \begin{cases} 0 & l(\lambda) > n \\ m_\lambda(x_1, \dots, x_n) & l(\lambda) \leq n \end{cases}$$

Restringendoci ancora ai polinomi simmetrici di grado k, otteniamo

$$\rho^k_{m,n} : \Lambda^k_m \to \Lambda^k_n$$

che é ancora suriettiva perché preserva il grado, ma

$$k \leq n(\leq m), |\lambda| = k \implies l(\lambda) \leq k \leq n \implies$$

$$\rho^k_{m,n}(m_\lambda(x_1, \dots, x_m)) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

dunque nel caso $k \leq n$, $\rho^k_{m,n}$ é anche un isomorfismo, poiché le immagini degli elementi della base sono distinte.

Esempio 27.

$$\Lambda^2_2 = \left\langle x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2 \right\rangle \cong \Lambda^2_3 = \left\langle x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_1x_2 + x_3x_2 + x_1x_3 \right\rangle \cong \dots$$

Questo ci porta a definire il sistema inverso

$$\Lambda^k_1 \xleftarrow{\rho^k_{2,1}} \Lambda^k_2 \xleftarrow{\rho^k_{3,2}} \Lambda^k_3 \xleftarrow{\rho^k_{4,3}} \Lambda^k_4 \xleftarrow{\rho^k_{5,4}} \dots$$

dove ovviamente $\rho^k_{r,s} \circ \rho^k_{t,r} = \rho^k_{t,s}$. Definiamo dunque il limite inverso come

$$\Lambda^k := \varprojlim \Lambda^k_n = \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots) \;\middle|\; \forall i < j \quad \gamma_i = \rho^k_{j,i} \gamma_j \right\}$$

Considerato che se $n \geq k$, allora $\rho^k_{n,k}$ é un isomorfismo, allora gli elementi di Λ^k sono identificati dalla loro componente k-esima.

Siamo pronti ora a definire le funzioni simmetriche:

Definizione 2.26. L'anello delle funzioni simmetriche é

$$\Lambda := \oplus_k \Lambda^k$$

dove l'operazione é data da

$$(f_n) \in \Lambda^r \quad (g_n) \in \Lambda^s \implies (f_n g_n) \in \Lambda^{r+s}$$

Ci possiamo chiedere se le operazioni che abbiamo fatto commutino, ossia se possiamo ottenere Λ come limite inverso del sistema

$$\Lambda_1 \xleftarrow{\rho_{2,1}} \Lambda_2 \xleftarrow{\rho_{3,2}} \Lambda_3 \xleftarrow{\rho_{4,3}} \Lambda_4 \xleftarrow{\rho_{5,4}} \dots$$

La risposta é negativa, poiché l'elemento

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1+x_i) := (1+x_1,(1+x_1)(1+x_2),(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3),\dots)$$

appartiene al limite inverso del sistema sopra, ma non é ottenibile come somma finita di elementi di grado limitato, ossia non sta nella somma diretta dei Λ^k.

2.2.1 Funzioni Simmetriche Elementari

Preso ora un qualsiasi polinomio $q(x)$ ad una variabile di grado n, con radici γ_i, sappiamo che i suoi coefficienti sono funzioni simmetriche delle radici, e corrispondono a m_λ con λ composti solo da 1 e 0. Chiamiamo S_i^n il polinomio simmetrico *elementare* di grado i, e definiamo

Definizione 2.27. Chiamiamo *funzioni simmetriche elementari*

$$e_k := (S_k^1, S_k^2, S_k^3, \dots) \in \Lambda^k$$

Esempio 28.

$$e_1 = (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3,\dots)$$

$$e_2 = (0, x_1x_2, x_1x_2+x_3x_2+x_1x_3, x_1x_2+x_3x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4,\dots)$$

Definizione 2.28. Chiamiamo *funzione generatrice delle funzioni simmetriche elementari*

$$E(t) = \sum_{r\geq 0} e_r t^t \in \Lambda[[t]]$$

Notiamo che é possibile riscriverla come

$$E(t) = \prod_{i\geq 1}(1+x_i t)$$

Definiamo dunque un oggetto più generale

Definizione 2.29.

$$e_\lambda := e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_r} \in \Lambda^{|\lambda|}$$

Esempio 29.

$$e_{(2,1)} = e_2 e_1 = (0, (x_1+x_2)x_1x_2, (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_3x_2+x_1x_3),\dots)$$

Notiamo che possiamo anche definire i m_λ come elementi di $\Lambda^{|\lambda|}$, più precisamente

Definizione 2.30.

$$m_\lambda := (m_\lambda(x_1), m_\lambda(x_1, x_2), m_\lambda(x_1 x_2, x_3), \dots)$$

e questi saranno ancora una base di Λ^k facendo variare λ tra le partizioni di k. Per dimostare che anche gli e_λ sono una base, ci serve

Teorema 2.31. Data una partizione λ, la sua coniugata λ' soddisfa

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\lambda \succ \mu} a_{\lambda\mu} m_\mu$$

per certi $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Data λ, scriviamo $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k)$, da cui

$$e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} \dots e_{\lambda'_k} = \sum (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{\lambda'_1}}) \cdot \dots \cdot (x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_{\lambda'_k}})$$

dove la somma é fatta su tutte le sequenze di naturali crescenti

$$i_1 < i_2 < \dots < i_{\lambda'_1} \qquad \dots \qquad r_1 < r_2 < \dots < r_{\lambda'_k}$$

Disegnando ora λ, ed inserendo questi indici sopra, otteniamo

$$\begin{array}{ccccc}
i_1 & j_1 & \dots & \dots & r_1 \\
i_2 & j_2 & \dots & \dots & r_2 \\
\vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\
i_{\lambda'_k} & j_{\lambda'_k} & \dots & \dots & r_{\lambda'_k} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
i_{\lambda'_2} & j_{\lambda'_2} & & & \\
\vdots & & & & \\
i_{\lambda'_1} & & & &
\end{array}$$

Notiamo che quelli che abbiamo inserito sono gli indici presenti in un monomio di $e_{\lambda'}$, con le rispettive molteplicità. Scriviamo ora $e_{\lambda'}$ in monomi

$$e_{\lambda'} = \sum_\alpha b_\alpha x^\alpha \qquad b_\alpha \in \mathbb{N} \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

e grazie al fatto che dato un numero naturale s presente nel diagramma, deve necessariamente appartenere ad una delle prime s righe a causa della condizione di crescenza degli indici, otteniamo che

$$b_\alpha \neq 0 \implies \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_s \quad \forall s > 0$$

Ricordando che $e_{\lambda'}$ é simmetrico, otteniamo che x^α e una sua qualsiasi permutazione di indici hanno lo stesso coefficiente b_α, ma raccogliendo questi indici permutati, otteniamo esattamente m_α, e se b_α é nonnullo, sappiamo che λ domina α, da cui otteniamo

$$e_{\lambda'} = \sum_{\lambda \succeq \mu} a_{\lambda\mu} m_\mu \qquad a_{\lambda\mu} = b_\mu$$

ed infine, preso $\mu = \lambda$, c'è un solo modo di mettere gli indici del corrispondente monomio x^λ nel diagramma di λ in modo da rispettare le condizioni di crescenza, dunque c'è un solo modo di ottenere x^λ in $e_{\lambda'}$, dunque $a_{\lambda\lambda} = 1$. □

Esempio 30.

- Se $\lambda = \ydiagram{3}$, allora
  $$e_{\ydiagram{1,1,1}} = m_\lambda + \sum_{\lambda \succ \mu} a_{\lambda\mu} m_\mu$$
  dove tutte le partizioni sono dominate dalla banale.
- Se $\lambda = \ydiagram{1,1,1}$, allora
  $$e_{\ydiagram{3}} = m_\lambda + \sum_{\lambda \succ \mu} a_{\lambda\mu} m_\mu = m_\lambda$$
  poiché la partizione segno é dominato da tutte le partizioni.
- Se $\lambda = \ydiagram{2,1,1}$, allora
  $$e_{\ydiagram{3,1}} = m_\lambda + \sum_{\lambda \succ \mu} a_{\lambda\mu} m_\mu = m_\lambda + a \cdot m_{\ydiagram{1,1,1,1}}$$
  poiché la partizione segno é l'unica dominata strettamente da λ.

Questo teorema ci dice che se scriviamo gli e_λ in relazione agli m_λ con una matrice $e = Am$, invertendo l'ordine degli e_λ, allora A sarà triangolare superiore con uno sulla diagonale, e a coefficienti interi.

Teorema 2.32. Gli e_λ formano una base di Λ come $\mathbb{Z}$ modulo

Dimostrazione. Dato che gli m_λ sono una base di $\Lambda^{|\lambda|}$, allora possiamo invertire la matrice A e ottenere $m = A^{-1}e$, da cui deduciamo che anche gli e_λ sono una base. Dato che poi $\Lambda = \oplus \Lambda^k$, si ottiene la tesi. □

Corollario 2.33. Gli e_i sono algebricamente indipendenti in Λ, e

$$\Lambda \cong \mathbb{Z}[e_1, e_2, e_3, \dots]$$

Corollario 2.34. I polinomi simmetrici in n variabili si scrivono come polinomi in $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Esempio 31. Troviamo le funzioni $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ dalle matrici al campo che siano polinomiali nelle entrate della matrice ed invarianti per coniugio.

Data f una tale funzione, restringiamola alle matrici diagonali $f_D(d_1, \ldots, d_n) = f|_{diag}$. Dato che f é invariante per coniugio, allora permutando i valori di $d_1, \ldots, d_n$, il risultato non cambia, da cui f_D é un polinomio simmetrico in n variabili, e si può scrivere in relazione agli e_i. Avremo $f_D(d_1, \ldots, d_n) = g(e_1(d), \ldots, e_n(d))$. Definiamo adesso un'altra funzione su tutte le matrici $h(A) = g(e_1(A), \ldots, e_n(A))$, dove $e_i(A) = e_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, con i λ_i autovalori di A. Notiamo che f e h coincidono sulle matrici diagonali e sono entrambe invarianti per coniugio, dunque, dato che le matrici diagonalizzabili sono dense nello spazio delle matrici, e f, h sono continue, coincidono.

Dunque f é invariante per coniugio se e solo se si scrive come $g(e_1(A), \ldots, e_n(A))$, ed é polinomiale nelle entrate perché gli e_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A, che a loro volta sono polinomiali nelle entrate.

Esempio 32 (Kroneker)*.* Dato $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio monico per cui tutte le radici hanno modulo minore o uguale ad 1, e tale che $p(0) \neq 0$, allora tutte le radici di $p(x)$ sono radici complesse dell'unità.

Ogni polinomio si può scrivere in relazione ai polinomi simmetrici elementari

$$p(x) = x^n - e_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x^{n-1} + e_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

dove i λ_i sono le radici di $p(x)$. Notiamo che $p(0) \neq 0$ implica che nessuna radice sia zero. Dato che

$$|e_j(\lambda)| = \left| \sum_{\gamma_1 < \cdots < \gamma_j} \lambda_{\gamma_1} \ldots \lambda_{\gamma_j} \right| \leq \binom{n}{j}$$

e che $p(x)$ é a coefficienti interi, allora esistono solo finiti $p(x)$ con questa proprietà, e chiamiamo l'insieme di tali polinomi Ω_n. Prendiamo

$$Q_k(x) = (x - \lambda_1^k)(x - \lambda_2^k) \ldots (x - \lambda_n^k)$$

con k intero, e notiamo che i suoi coefficienti sono $e_j(\lambda^k)$, ma i polinomi $e_j(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ sono ancora simmetrici, dunque si scrivono come polinomi negli $e_j(x)$, e pertanto

$$e_j(\lambda^k) = g(e_1(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)) \in \mathbb{Z}$$

Questo ci dice che $Q_k \in \Omega_n$ per ogni n, ma se, per esempio, λ_1^k assumesse infiniti valori diversi, allora genererebbe infiniti Q_k diversi, il che é un assurdo poiché Ω_n é finito. Questo ci dice che esiste un k_1 per cui $\lambda_1^{k_1} = 1$, da cui é una radice dell'unità, e questo vale per tutte le radici.

2.2.2 Altre Basi

Definiamo ora dei nuovi elementi, che si riveleranno un'altra base delle funzioni simmetriche

Definizione 2.35. Per ogni r naturale, la sua *funzione simmetrica completa* associata é

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda$$

Esempio 33. Gli h_r contengono tutti i monomi di grado r. Per esempio,

$$h_2 = \sum_{i\leq j} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots + x_1^2 + x_2^2 + \ldots$$

Preso $H(t) = \sum_{r\geq 0} h_r t^r$ la funzione generatrice degli h_r, otteniamo che

$$H(t) = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1 - x_i t}$$

Teorema 2.36. Nell'anello delle serie formali $\Lambda[[t]]$ vale

$$H(t)E(-t) = 1$$

Dimostrazione.

$$E(-t) = \prod_{i\geq 1}(1 - x_i t) \qquad H(t) = \prod_{i\geq 1}(1 - x_i t)^{-1}$$

Fissato un grado positivo r e un numero di variabili n, possiamo calcolare il coefficiente in t^r di $H(t)E(-t)$ e scoprire che é nullo, e dunque passa al limite per n. □

Corollario 2.37. Se $n > 0$, allora

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$$

Dato che gli e_i sono algebricamente indipendenti, possiamo definire un omomorfismo

$$\omega : \Lambda \to \Lambda : e_i \mapsto h_i$$

Teorema 2.38. $\omega^2 = \mathrm{Id}$, ossia ω é un isomorfismo.

Dimostrazione. Sappiamo che $e_0 = h_0 = 1$ e $e_1 = h_1$. Presa ora la relazione data dal Corollario 2.37 per $n = 2$ otteniamo

$$e_0 h_2 - e_1 h_1 + e_2 h_0 = 0$$

e applicando ω,

$$h_0 \omega(h_2) - h_1 e_1 + h_2 e_0 = 0 \implies \omega(h_2) = e_2 \implies \omega^2(e_2) = e_2$$

Applicando il corollario come sopra per tutti gli n si ottiene $\omega^2(e_i) = e_i$ per ogni i, da cui la tesi. $\square$

Teorema 2.39. Gli h_i sono algebricamente indipendenti in Λ, e

$$\Lambda \cong \mathbb{Z}[h_1, h_2, h_3, \dots]$$

Notiamo che il risultato sopra non vale se consideriamo solo finite variabili: per esempio, in due variabili,

$$h_1 = x_1 + x_2 \qquad h_2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

$$h_3 = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 = -h_1^3 + 2h_1 h_2$$

In generale, in $n+1$ variabili, h_{n+1} sarà un polinomio in $h_1, \dots, h_n$.

Diamo ora un altro set di elementi di Λ

Definizione 2.40. Per ogni r naturale positivo, definiamo $p_r \in \Lambda^r$ come la serie

$$p_r = \sum_{i \geq 1} x_i^r$$

che corrisponde all'elemento

$$p_r = (x_1^r, x_1^r + x_2^r, x_1^r + x_2^r + x_3^r, \dots)$$

Definiamo la sua funzione generatrice shiftata di uno

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} \in \Lambda[[t]]$$

Per scriverla in maniera migliore, ricordiamo che nell'anello delle serie formali, la derivata, il logaritmo, l'esponenziale e l'integrale sono ben definiti, in particolare

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \implies f'(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} \qquad \int f(t) dt = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$f(0) = 0 \implies \log(1 + f(t)) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{f(t)^n}{n} \qquad \exp(f(t)) = \sum_{n \geq 0} \frac{f(t)^n}{n!}$$

e valgono molte delle proprietà delle derivate

$$(F(t)+G(t))' = F'(t)+G'(t) \qquad (F(t)G(t))' = F'(t)G(t)+F(t)G'(t)$$

$$G(0)=0 \implies (F(G(t)))' = F'(G(t))G'(t)$$

Dunque, proviamo a riscrivere $P(t)$

$$P(t) = \sum_{r\geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_{r\geq 1}\sum_{i\geq 1} x_i^r t^{r-1} = \sum_{i\geq 1} x_i \sum_{r\geq 1} (x_i t)^{r-1} = \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{1-x_i t} =$$

$$= \sum_{i\geq 1} \frac{d}{dt}\log\left(\frac{1}{1-x_i t}\right) = \frac{d}{dt}\log\left(\prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x_i t}\right) = \frac{d}{dt}\log\left(H(t)\right)$$

Utilizzando questa relazione, e $H(t)E(-t)=1$ otteniamo

$$P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)} = \frac{E'(-t)}{E(-t)}$$

da cui nascono le seguenti formule

Lemma 2.41 (Formule di Newton)**.**

$$nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r} \qquad ne_n = \sum_{r=1}^{n} p_r e_{n-r}(-1)^{r-1}$$

Dato che $h_0 = e_0 = 1$, allora dalle formule di Newton possiamo ricavare p_n in relazione ai p_i precedenti e agli h_i o e_i fino all'indice n.

$$p_n = nh_n - \sum_{r=1}^{n-1} p_r h_{n-r} \qquad p_n = ne_n - \sum_{r=1}^{n-1} p_r e_{n-r}(-1)^{r-1}$$

Inoltre $h_1 = e_1 = p_1$, dunque le formule di Newton ci dicono che ogni h_n (e_n) é un polinomio in $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a coefficienti razionali, da cui

$$\mathbb{Q}[h_1, h_2, \ldots, h_n] \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots, p_n] \quad \forall n$$

e visto che i due anelli hanno la stessa dimensione pari a n, per il teorema di Noether, i p_i devono essere algebricamente indipendenti. Un altro modo per vederlo é porre per assurdo che esista $q(T) \in \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_n]$ che annulli i p_i, e poniamo che n sia il minimo possibile; in questo caso, poniamo senza perdita di generalità che T_n sia presente con in $q(T)$, e scriviamolo come

$$q(T) = T_n^k q_k(T_1, \ldots, T_{n-1}) + T_n^{k-1} q_{k-1}(T_1, \ldots, T_{n-1}) + \cdots + q_0(T_1, \ldots, T_{n-1})$$

Adesso possiamo sostituire p_i al posto dei T_i, e a loro volta, sostituirli con gli h_i grazie alle formule di Eulero, fino ad ottenere un'espressione che dipende solo dalle h_i, ma scopriamo che guardando la formula come un polinomio di h_n, il grado é k, e il coefficiente in h_n^k é $nq_k(p_1, \dots, p_{n-1})$, da cui $q_k(\dots) = 0$ perché gli h_i sono algebricamente indipendenti. Abbiamo trovato che

$$q_k(T_1, \dots, T_{n-1})$$

é un polinomio nonnullo che annulla i p_i, con un numero minore di variabili, assurdo.

Notiamo che

$$h_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \dots \implies h_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$$

ma visto che i p_i sono algebricamente indipendenti, se esistesse $h_2 = f(p_i)$, allora $f(p_i) - \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2) = 0$, da cui $f(p_i)$ deve coincidere con la scrittura sopra. Questo ci dice che quella scrittura é unica, ed in particolare non c'é modo di ottenere h_2 come relazione sui p_i a coefficienti interi, ossia i p_i non possono generare il modulo

$$\Lambda \cong \mathbb{Z}[h_1, h_2, h_3, \dots]$$

D'altra parte, se definiamo per ogni $\lambda \dashv n$

Definizione 2.42.

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_k}$$

ci accorgiamo che questa é una base di

$$\mathbb{Q}[h_1, h_2, h_3, \dots] \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$$

Riprendiamo l'isomorfismo $\omega : \Lambda \to \Lambda$ che scambiava e_i e h_i. Applicandola a $P(t)$ otteniamo

$$\omega(P(t)) = \omega\left(\frac{H'(t)}{H(t)}\right) = \frac{E'(t)}{E(t)} = P(-t)$$

che ci da subito l'immagine dei p_i attraverso ω

$$\omega(p_n) = (-1)^{n-1} p_n \qquad \omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_\lambda$$

Data $\lambda \dashv n$, introduciamo un nuovo modo di identificarlo. Scriveremo

$$\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$$

dove m_k é il numero di volte che k é presente tra i λ_i.

Preso ora σ un elemento di S_n con la struttura in cicli di λ, chiamiamo z_λ la cardinalità dello stabilizzatore di σ. Notiamo che

$$z_\lambda = \prod_{k \in \lambda} m_k! k^{m_k}$$

Esempio 34. Dato $\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8)(9,10)(11,12) \in S_{12}$, con $\lambda = (3,3,2,2,2) = (1^0, 2^3, 3^2, 4^0, \dots)$, notiamo che il numero di elementi di S_12 con la struttura λ sono

$$\frac{\binom{12}{3}\frac{3!}{3}\binom{9}{3}\frac{3!}{3}\binom{6}{2}\frac{2!}{2}\binom{4}{2}\frac{2!}{2}\binom{2}{2}\frac{2!}{2}}{2!3!} = \frac{12!}{3^2 2^3 2!3!}$$

Dunque

$$z_\lambda = 3^2 2^3 2!3!$$

Teorema 2.43.

$$H(t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|} \qquad E(t) = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}$$

Dimostrazione. Per passare dall'uno all'altro basta applicare ω, dunque dimostriamo solo la prima. Con passaggi formali, possiamo dire che

$$P(t) = \frac{d}{dt} \log H(t) \implies \int P(t)dt = \log H(t) \implies e^{\int P(t)dt} = H(t)$$

e dunque possiamo calcolare l'esponenziale con la sua serie

$$e^{\int P(t)dt} = e^{\sum_{r\geq 1} p_r t^r/r} = \prod_{r\geq 1} e^{p_r t^r/r} = \prod_{r\geq 1} \sum_{m_r \geq 0} \frac{1}{m_r!} \left(p_r \frac{t^r}{r}\right)^{m_r} =$$

$$= \prod_{r\geq 1} \sum_{m_r\geq 0} \frac{1}{m_r!} \frac{t^{rm_r} p_r^{m_r}}{r^{m_r} m_r!} = \sum_\lambda p_\lambda \frac{t^{|\lambda|}}{\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_k^{m_k} m_1! \dots m_k!} =$$

$$= \sum_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}$$

□

Corollario 2.44.

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda$$

2.2.3 Funzioni di Schur

Vogliamo infine definire un ultimo set di funzioni simmetriche, chiamate *funzioni simmetriche di Schur.* Per costruire queste funzioni simmetriche, per prima cosa definiamo

$$\alpha \in \mathbb{N}^n \implies a_\alpha(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \sigma(x^\alpha)$$

i quali sono polinomi antisimmetrici, ossia

$$\tau a_\alpha = \mathrm{sgn}(\tau) a_\alpha \quad \forall \tau \in S_n$$

Questi si possono anche ottenere come

$$a_\alpha = \det A_\alpha \qquad A_\alpha^T = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \dots & x_1^{\alpha_n} \\ x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & \dots & x_2^{\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{\alpha_1} & x_n^{\alpha_2} & \dots & x_n^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Notiamo che se α ha due o più entrate uguali, allora per antisimmetria $a_\alpha = 0$, ed inoltre permutare l'ordine degli elementi di α al massimo cambia il segno di a_α. Pertanto, possiamo considerare solo gli α con elementi strettamente decrescenti, e notiamo che si possono sempre scrivere come

$$\alpha = \lambda + (n-1, n-2, \dots, 1, 0) = \lambda + \delta$$

dove λ é una partizione, ossia ha gli elementi ordinati in maniera non crescente. Dalla scrittura con il determinante, possiamo vedere che

$$a_\delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

poiché la matrice risultante é una Vandermonde. Inoltre, possiamo anche notare che $x_i - x_j$ divide $a_{\lambda+\delta}$ per ogni i, j, dunque possiamo finalmente definire

Definizione 2.45. Per ogni λ, il polinomio di Schur s_λ é

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

Questi polinomi sono simmetrici e possiamo dimostrare che formano una base.

Teorema 2.46. $\{\, s_\lambda \mid l(\lambda) \leq n \,\}$ é una base di Λ_n

Dimostrazione. Prendiamo la funzione iniettiva

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\cdot a_\delta} \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

e restringiamola i polinomi simmetrici. Dato che la sua immagine va nei polinomi antisimmetrici A_n, otteniamo

$$\varphi : \Lambda_n \xrightarrow{\cdot a_\delta} A_n : \varphi(s_\lambda) = s_\lambda a_\delta = a_{\lambda+\delta}$$

ma i $a_{\lambda+\delta}$ sono una base di A_n, dunque φ é iniettiva e suriettiva, e i s_λ sono una base di Λ_n. $\square$

In realtà gli s_λ sono una base di Λ, ma abbiamo bisogno di vederli come un elemento del limite inverso. Preso dunque un $\alpha \in \mathbb{N}^n$, notiamo che

$$a_\alpha(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \dots & x_1^{\alpha_n} & x_1^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n^{\alpha_1} & x_n^{\alpha_2} & \dots & x_n^{\alpha_n} & x_n^0 \\ x_{n+1}^{\alpha_1} & x_{n+1}^{\alpha_2} & \dots & x_{n+1}^{\alpha_n} & x_{n+1}^0 \end{pmatrix}$$

e se valutiamo in $x_{n+1} = 0$ otteniamo

$$a_\alpha(x_1,\dots,x_n,0) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \dots & x_1^{\alpha_n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n^{\alpha_1} & x_n^{\alpha_2} & \dots & x_n^{\alpha_n} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_\alpha(x_1,\dots,x_n)$$

Dunque, riprendendo le funzioni $\rho^k_{m,n}$ dall'inizio della sezione 2.2, otteniamo che se $l(\lambda) \leq n$, allora

$$\rho^{|\lambda|}_{n+1,n}(s_\lambda(x_1,\dots,x_{n+1})) = \rho^{|\lambda|}_{n+1,n}\left(\frac{a_{\lambda+\delta_{n+1}}(x_1,\dots,x_{n+1})}{a_{\delta_{n+1}}(x_1,\dots,x_{n+1})}\right) =$$

$$= \frac{a_{\lambda+\delta_{n+1}}(x_1,\dots,x_n)}{a_{\delta_{n+1}}(x_1,\dots,x_n)} = \frac{a_{\lambda+\delta_n}(x_1,\dots,x_n)}{a_{\delta_n}(x_1,\dots,x_n)} = s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$$

dove

$$a_{\lambda+\delta_{n+1}}(x_1,\dots,x_n) = x_1x_2\dots x_n a_{\lambda+\delta_n}(x_1,\dots,x_n)$$

$$a_{\delta_{n+1}}(x_1,\dots,x_n) = x_1x_2\dots x_n a_{\delta_n}(x_1,\dots,x_n)$$

Da ciò, possiamo vedere s_λ come elemento di Λ

$$s_\lambda := (s_\lambda(x_1), s_\lambda(x_1,x_2), s_\lambda(x_1,x_2,x_3),\dots)$$

e dal teorema sopra, gli s_λ formano una base di Λ.

2.2.4 Relazioni tra le Basi

Denotiamo ora

$$e_r^{(k)}(x_1,\dots,x_n) := e_r(x_1,\dots,x_{k-1},0,x_{k+1},\dots,x_n) = e_r(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n)$$

ossia la r-esima funzione elementare ottenuta senza considerare la variabile x_k.

Esempio 35.

$$e_3^{(2)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_3x_4$$

Sia ora M la matrice $n \times n$ definita come

$$M_{ij} = (-1)^{n-i} e_{n-i}^{(j)} \qquad M = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} & \dots \\ -e_1^{(1)} & -e_1^{(2)} & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Lemma 2.47. Dato $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definiamo la matrice

$$(H_\alpha)_{ij} = h_{\alpha_i - n + j}$$

Allora vale $A_\alpha = H_\alpha M$, ossia

$$x_j^{\alpha_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} h_{\alpha_i - n + k} e_{n-k}^{(j)} \quad \forall i, j$$

Dimostrazione. Mettiamoci in n variabili, e definiamo

$$E^{(j)}(t) := \sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(j)} t^r = E(t)(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) = \prod_{i \neq j} (1 + x_i t)$$

da cui

$$H(t) E^{(j)}(-t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1} \prod_{i \neq j} (1 - x_i t) = (1 - x_j t)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (x_j t)^s$$

Il coefficiente di grado α_i di quest'espressione é esattamente

$$x_j^{\alpha_i} = \sum_{k=0}^{\alpha_i} (-1)^{\alpha_i - k} h_k e_{\alpha_i - k}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} h_{\alpha_i - n + k} e_{n-k}^{(j)}$$

$\square$

Per dimostrare le prossime formule che collegano le basi h, e, s abbiamo bisogno di un po' di risultati preliminari.

Prima di tutto, ricordiamo una notazione usata per indicare le permutazioni di S_n: data $\sigma = (1, 5, 3)(4, 2) \in S_6$, questa può essere rappresentata da $\sigma = (5, 4, 1, 2, 3, 6)$, che indica ogni elemento con la sua immagine attraverso la permutazione. Scriveremo $\sigma = (s, s')$ per spezzare la stringa di σ in due pezzi, ed indicheremo con $|s|, |s'|$ le loro lunghezze, per esempio $s = (5, 4, 1, 2)$, $s' = (3, 6)$. e $|s| = 4$, $|s'| = 2$. Inoltre, data una matrice A $n \times n$, indichiamo con A_{st} la sottomatrice di A composta solo da elementi nelle righe indicate in s, e nelle colonne indicate in t. Per esempio

$$A = I_5 \implies A_{(1,2,3,4)(1,4,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma 2.48. Siano A, B matrici $r \times r$ tali che $AB = cI$, con c scalare. Prese $w, v \in S_r$ con $w = (s, s')$, $v = (t, t')$, dove $|s| = |t| = k$, $|s'| = |t'| = r - k$, allora

$$c^{r-k} \det(A_{st}) = \operatorname{sgn}(wv) \det(A) \det(B_{t's'})$$

Dimostrazione. Ricordiamo come funzionano le matrici di permutazione. Dato $w \in S_r$, allora chiamiamo Q matrice che ha per colonne i vettori della base canonica permutati secondo w:

$$Q = \begin{pmatrix} e_{w(1)} & e_{w(2)} & \dots & e_{w(r)} \end{pmatrix}$$

Se chiamiamo a_i le colonne di A, allora AQ avrà le colonne permutate secondo w, ossia

$$AQ = \begin{pmatrix} a_{w(1)} & a_{w(2)} & \dots & a_{w(r)} \end{pmatrix}$$

Viceversa, $Q^T A$ avrà le righe permutate secondo w. Ricordiamo inoltre che Q é ortogonale, ossia $QQ^T = I$, e che il suo determinante é parti al segno di w. Detto questo, chiamiamo P la matrice associata a v che permuta le righe. Avremo che

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad A_1 = A_{st} \quad A_2 = A_{s't'}$$

$$Q^T B P^T = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \quad B_1 = B_{ts} \quad B_2 = B_{t's'}$$

Dalla condizione sulle matrici, otteniamo che

$$AB = PAQQ^T BP^T = \begin{pmatrix} \sim & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ \sim & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix} = cI$$

$$A_1 B_2 + A_2 B_4 = 0 \qquad A_3 B_2 + A_4 B_4 = cI$$

dunque

$$PAQ \begin{pmatrix} I & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ A_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & cI \end{pmatrix}$$

Facendo i determinanti di quest'ultima relazione, otteniamo la tesi.

$$\operatorname{sgn}(v) \det(A) \operatorname{sgn}(w) \det(B_{t's'}) = \det(P) \det(A) \det(Q) \det(B_4)$$

$$= c^{r-k} \det(A_1) = c^{r-k} \det(A_{st})$$

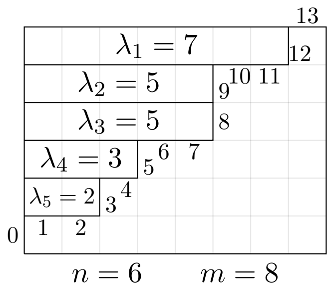
□

Ci serve inoltre un fatto combinatorico:

Lemma 2.49. Data λ una partizione, siamo $m \geq \lambda_1$ e $n \geq \lambda'_1$. Allora

$$\{ \lambda_i + n - i \}_{i=1,\dots,n} \qquad \{ n - 1 + j - \lambda'_j \}_{j=1,\dots,m}$$

é una bipartizione dell'insieme $\{ 0, 1, \dots, m + n - 1 \}$



Dimostrazione. Come mostrato dal disegno, inscatoliamo la nostra partizione in un rettangolo $n \times m$, e facciamo un percorso dall'angolo in basso a sinistra all'angolo in alto a destra del rettangolo, percorrendo il bordo esterno della partizione, e ad ogni segmento che attraversiamo associamo un numero progressivo iniziando da zero. Alla fine avremo scritto tutti i numeri da zero a $n + m - 1$, e questi saranno divisi tra quelli associati a segmenti orizzontali e quelli associati a segmenti verticali. i segmenti verticali hanno gli indici $\lambda_i + n - i$ al variare di i tra $1, \dots, n$, mentre i segmenti orizzontali hanno gli indici $(m+n-1) - (\lambda'_j + m - j) = n - 1 + j - \lambda'_j$ al variare di j tra $1, \dots, m$, come é possibile vedere considerando lo stesso disegno trasposto. $\square$

Teorema 2.50 (Jacobi-Trudi)**.** Dato λ con $l(\lambda) \leq n$, allora

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{ij} \qquad s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{ij}$$

dove λ' é la trasposta di λ.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima. Con le notazioni del lemma precedente, abbiamo che

$$H_\delta = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \\ & h_0 & h_1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

da cui, ricordandoci che $h_0 = 1$, otteniamo

$$a_\delta = \det A_\delta = \det H_\delta \det M = \det M$$

Ma allora,

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\det H_{\lambda+\delta} \det M}{a_\delta} = \det H_{\lambda+\delta}$$

$$\det H_{\lambda+\delta} = \det(h_{(\lambda+\delta)_i - n + j})_{ij} = \det(h_{\lambda_i + n - i - n + j})_{ij} = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{ij}$$

Dimostriamo la seconda. Data λ con $\lambda'_1 = k$ e $\lambda_1 = l$, dal lemma 2.49 sappiamo che la seguente é una permutazione di S_{r+l}:

$$w = (\underbrace{\lambda_1 + k, \lambda_2 + k - 1, \dots, \lambda_k + 1}_{s}, \underbrace{k + 1 - \lambda'_1, k + 2 - \lambda'_2, \dots, k + l - \lambda'_l}_{s'})$$

come banalmente

$$\sigma = (\underbrace{k, k-1, \dots, 1}_{t}, \underbrace{k+1, k+2, \dots, k+l}_{t'})$$

Dal Corollario 2.37, sappiamo che se definiamo le due matrici

$$A = (h_{i-j})_{ij} \qquad B = ((-1)^{i-j} e_{i-j})_{ij}$$

allora $AB = I$, dunque possiamo usare il Lemma 2.48 su A, B, w, σ:

$$\det A_{st} = \det(h_{(\lambda_i + k - i + 1) - (k - j + 1)}) = \det(h_{\lambda_i - i + j})$$

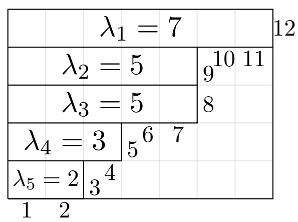
$$\det B_{t's'} = \det((-1)^{(k+i)-(k+j-\lambda'_j)} e_{(k+i)-(k+j-\lambda'_j)})$$

$$= \det((-1)^{i-j+\lambda'_j} e_{i-j+\lambda'_j})$$

$$= (-1)^{|\lambda| + \sum i - \sum j} \det(e_{i-j+\lambda'_j}) = (-1)^{|\lambda|} \det(e_{i-j+\lambda'_j})$$

$$\det(h_{\lambda_i - i + j}) = \operatorname{sgn}(w) \operatorname{sgn}(\sigma) \det(A)(-1)^{|\lambda|} \det(e_{i-j+\lambda'_j})$$

Dato che A é una matrice triangolare superiore con $h_0 = 1$ sulla diagonale, allora $\det(A) = 1$, e visto che dalla prima formula di Jacobi-Trudi sappiamo $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{ij}$, allora basta mostrare che $\operatorname{sgn}(w)\operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{|\lambda|} = 1$, ossia che $\operatorname{sgn}(w\sigma) = (-1)^{|\lambda|}$. Per farlo, riprendiamo il disegno del lemma 2.48.



La permutazione si scrive come

$$w\sigma = (\lambda_k + 1, \lambda_{k-1} + 2, \dots, \lambda_1 + k, k + 1 - \lambda'_1, k + 2 - \lambda'_2, \dots, k + l - \lambda'_l)$$

che manda i numeri da 1 a k nei numeri scritti sui segmenti verticali, dal basso in alto, e i numeri da $k+1$ a $k+l$ nei numeri scritti sui segmenti orizzontali, da sinistra a destra. Sappiamo che il segno di questa permutazione é deciso dalla parità delle inversioni, ossia le coppie di indici $i < j$ tali che $w\sigma(i) > w\sigma(j)$. Notiamo che se $1 \le i \le k$, allora il numero di j per cui (i, j) é un'inversione é esattamente λ_{k-i+1}, mentre tutte le coppie con $i > k$ non sono inversioni perché mantengono l'ordine, infatti

$$k < i < j \implies k + i - \lambda'_i \leq k + j - \lambda'_j$$

da cui $\mathrm{sgn}(w\sigma) = (-1)^{\sum \lambda_i} = (-1)^{|\lambda|}$. □

Esempio 36.

- $$s_{(n,0,\dots,0)} = \det \begin{pmatrix} h_n & h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & \\ & h_0 & h_1 & h_2 & \dots \\ & & h_0 & h_1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = h_n$$

- $$s_{(1,1,\dots,1)} = \det \begin{pmatrix} e_n & e_{n+1} & e_{n+2} & \dots & \\ & e_0 & e_1 & e_2 & \dots \\ & & e_0 & e_1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = e_n$$

- $$s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{a_{(2,1,1)+(2,1,0)}}{a_{(2,1,0)}} = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{pmatrix} e_3 & e_4 & e_5 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} = e_3 e_1$$

2.2.5 Ortogonalità

Consideriamo due set infiniti di variabili $(x_1, x_2, \dots)$ e $(y_1, y_2, \dots)$. Avremo che

Teorema 2.51 (Cauchy)**.**

1. $$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x) p_{\lambda}(y)$$

2. $$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} h_{\lambda}(x) m_{\lambda}(y) = \sum_{\lambda} m_{\lambda}(x) h_{\lambda}(y)$$

3. $$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y)$$

Dimostrazione.

1. Definiamo $z_{ij} := x_i y_j$. Avremo, per il Teorema 2.43 che

$$H(t)(z_{ij}) = \prod_{i,j}(1 - z_{ij}t)^{-1} = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(z_{ij}) t^{|\lambda|}$$

ma dato che

$$p_r(z_{ij}) = \sum_{i,j} z_{ij}^r = \sum_i x_i^r \sum_j y_j^r = p_r(x)p_r(y)$$

allora possiamo riscriverlo come

$$H(t)(z_{ij}) = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x_i) p_{\lambda}(y) t^{|\lambda|}$$

ed infine

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = H(1)(z_{ij}) = \sum_{\lambda} z_{\lambda}^{-1} p_{\lambda}(x_i) p_{\lambda}(y)$$

2.
$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \sum_i h_i(x) y_j^i =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}^{|\alpha| < \infty} h_{\alpha}(x) y^{\alpha} = \sum_{\lambda} h_{\lambda}(x) m_{\lambda}(y)$$

e per simmetria, vale anche l'altra uguaglianza.

3. Mettiamoci in finite variabili $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Calcoliamo

$$a_{\delta}(x)a_{\delta}(y)\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = a_{\delta}(x) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) y^{\sigma(\delta)} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} h_{\alpha}(x) y^{\alpha}$$

$$= a_{\delta}(x) \sum_{\sigma \in S_n}^{\alpha \in \mathbb{N}^n} \operatorname{sgn}(\sigma) h_{\alpha}(x) y^{\alpha + \sigma(\delta)}$$

Sostituiamo $\beta = \alpha + \sigma(\delta)$.

$$a_{\delta}(x)a_{\delta}(y)\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = a_{\delta}(x) \sum_{\sigma \in S_n}^{\beta \in \mathbb{N}^n} \operatorname{sgn}(\sigma) h_{\beta - \sigma(\delta)}(x) y^{\beta}$$

$$= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} y^{\beta} \left(a_{\delta}(x) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) h_{\beta - \sigma(\delta)}(x) \right)$$

Dalla dimostrazione del Teorema di Jacobi-Trudi, otteniamo

$$a_\beta = \det A_\beta = \det M \det H_\beta = a_\delta \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) h_{\beta - \sigma(\delta)}$$

per cui

$$a_\delta(x) a_\delta(y) \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} y^\beta a_\beta(x)$$

Gli unici a_β che non sono zero sono le permutazioni di quelli che si possono esprimere come $\lambda + \delta$, dunque

$$a_\delta(x) a_\delta(y) \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} y^\beta a_\beta(x)$$

$$= \sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x) \sum_{\sigma \in S^n} \operatorname{sgn}(\sigma) y^{\sigma(\lambda+\delta)} = \sum_\lambda a_{\lambda+\delta}(x) a_{\lambda+\delta}(y)$$

da cui, infine

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

□

Adesso, definiamo una forma bilineare sulle funzioni simmetriche, specificando il suo valore su due basi

$$\langle , \rangle : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$$

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

A priori questa forma non é neanche simmetrica, ma vedremo che in realtà é un prodotto scalare definito positivo con base ortonormale s_λ.

Proposizione 2.52. Date due basi $\{ u_i \}$ e $\{ v_i \}$ di $\Lambda_\mathbb{Q}$, parametrizzate sulle partizioni λ, allora

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \iff \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y)$$

Dimostrazione. Scriviamo le due basi in relazione agli h_λ e m_λ, che sono due basi dello stesso spazio

$$u_\lambda = \sum_\rho c_{\lambda\rho} h_\rho \qquad v_\mu = \sum_\xi b_{\mu\xi} m_\xi$$

Se definiamo le matrici $C = (c_{\lambda\rho})_{\lambda\rho}$, e $B = (b_{\mu\xi})_{\mu\xi}$, avremo che

$$\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_{\rho,\xi} \left(\sum_\lambda c_{\lambda\rho} b_{\lambda\xi} \right) h_\rho(x) m_\xi(y) = \sum_{\rho,\xi} (C^T B)_{\rho\xi} h_\rho(x) m_\xi(y)$$

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \sum_\rho c_{\lambda\rho} b_{\mu\rho} = (CB^T)_{\lambda\mu}$$

dunque

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \iff CB^T = I \iff C^T B = I \iff$$
$$\iff \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_\rho h_\rho(x) m_\rho(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

dove l'ultima uguaglianza é data dal teorema di Cauchy. □

Corollario 2.53.

$$\left\langle p_\lambda z_\lambda^{-1}, p_\mu \right\rangle = \delta_{\lambda\mu} \qquad \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

Corollario 2.54. La forma bilineare $\langle , \rangle$ definita sopra é simmetrica e definita positiva, e s_λ é una sua base ortonormale.

Proposizione 2.55. La funzione ω estesa a

$$\omega : \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \Lambda_{\mathbb{Q}} : e_\lambda \mapsto h_\lambda$$

é un'isometria

Dimostrazione. Abbiamo già visto che

$$\omega(p_\lambda) = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda)} p_\lambda$$

da cui

$$\langle \omega(p_\lambda), \omega(p_\mu) \rangle = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda) + |\mu| - l(\mu)} \langle p_\lambda, p_\mu \rangle = (-1)^{|\lambda| - l(\lambda) + |\mu| - l(\mu)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$$
$$= (-1)^{2|\lambda| - 2l(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu} = z_\lambda \delta_{\lambda\mu} = \langle p_\lambda, p_\mu \rangle$$

□

2.3 Caratteri di S_n

Dato ora G un gruppo finito e A una $\mathbb{Q}$ algebra commutativa, definiamo un prodotto scalare sulle funzioni $f : G \to A$. Date due funzioni f, g, avremo

$$\langle f, g \rangle_G := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x^{-1}) g(x)$$

che é una generalizzazione del prodotto su $\mathbb{C}_{classe}$. Inoltre, se $w \in S_n$, indichiamo con $\rho(w)$ la forma della sua decomposizione in cicli

Esempio 37. Se $w = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11) \in S11$, allora $\rho(w) = (4, 4, 3)$

Da questo, possiamo definire la funzione

$$\psi : S_n \to \Lambda^n : w \mapsto p_{\rho(w)}$$

Notiamo che ψ non dipende dalla classe di coniugio di w. Inoltre, se consideriamo l'immersione

$$S_n \times S_m \hookrightarrow S_{n+m} : (u, v) \mapsto u \times v$$

allora scopriamo che

$$\psi(u \times v) = \psi(u)\psi(v)$$

dove stiamo indicando con lo stesso simbolo ψ la funzione definita sopra per ogni n.

Torniamo ora a parlare delle funzioni classe di S_n. Sappiamo che $\mathbb{C}_{classe}(S_n)$ é generato dai caratteri delle rappresentazioni irriducibili χ_{V_λ} con $\lambda \dashv n$, ma dato che queste hanno valori interi[5], in realtà generano anche $\mathbb{Z}_{classe}(S_n)$.

Definizione 2.56. Chiamiamo $R^{(n)}$ lo $\mathbb{Z}$ modulo generato dai caratteri delle rappresentazioni irriducibili di S_n, dove $R^{(0)} = \mathbb{Z}$. Inoltre chiamiamo

$$R := \oplus_n R^{(n)}$$

Su questo abbiamo un'operazione di somma data dalla somma diretta, ma vorremmo anche inserire un'operazione di prodotto affinché diventi un anello graduato. Definiamolo sui caratteri delle rappresentazioni irriducibili:

$$\lambda \dashv n \quad \mu \dashv m \qquad \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} V_\lambda \otimes V_\mu = W$$

$$\chi_{V_\lambda} \cdot \chi_{V_\mu} := \chi_W$$

Mostreremo che con questa operazione $R \cong \Lambda$ come anelli, con l'isomorfismo che manda χ_{V_λ} nelle funzioni simmetriche s_λ.

Esercizio 20. Mostrare che R con questa operazione é un anello graduato commutativo con identità *Hint:* per l'associatività, mostrare che

$$\mathrm{Ind}_{S_k \times S_{n+m}}^{S_{k+n+m}} h \times (\mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} f \times g)$$

$$\cong \mathrm{Ind}_{S_k \times S_n \times S_m}^{S_{k+n+m}} h \times f \times g$$

$$\cong \mathrm{Ind}_{S_{k+n} \times S_m}^{S_{k+n+m}} (\mathrm{Ind}_{S_k \times S_n}^{S_{k+n}} h \times f) \times g$$

[5] non é banale dimostrarlo.

usando Frobenius e le proprietà delle indotte.

Definiamo su R una specie di prodotto scalare(dato che é un modulo e non uno spazio vettoriale). Dati $f = (f_n) \in R$ e $g = (g_n) \in R$, definiamo

$$\langle f, g \rangle_R := \sum_n \langle f_n, g_n \rangle_{S_n}$$

e una mappa

$$ch : R \to \Lambda_{\mathbb{C}} : f \mapsto \sum_n \langle f_n, \psi \rangle_{S_n}$$

dove $\psi : S_n \to \Lambda^n \subseteq \Lambda_{\mathbb{C}}$ e $f_n : S_n \to \mathbb{C} \subseteq \Lambda_{\mathbb{C}}$, dunque possiamo utilizzare il prodotto definito prima riferito al gruppo S_n e all'algebra $\Lambda_{\mathbb{C}}$

Possiamo esprimere meglio questa mappa:

$$\langle f_n, \psi \rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f_n(w)\psi(w^{-1})$$

ma dato che w^{-1} é coniugato a w, allora $\psi(w) = \psi(w^{-1})$. Notiamo che f_n é pure invariante sulle classi di coniugio di S_n, essendo generato da caratteri di rappresentazioni, e che $\psi(w) = p_\rho$ se $\rho(w) = \rho$, dunque se chiamiamo f_ρ la quantità $f(w)$ quando $\rho(w) = \rho$, otteniamo

$$\langle f_n, \psi \rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f_n(w)\psi(w) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} (f_n)_\rho p_\rho$$

In particolare, se f_n é il carattere della rappresentazione banale di S_n, allora, per Corollario 2.44,

$$\langle f_n, \psi \rangle_{S_n} = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} p_\rho = h_n$$

Possiamo dunque ora dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.57. La funzione ch ha immagine in Λ, ed é un'isometria e isomorfismo di anelli graduati con l'immagine.

$$ch : R \to \Lambda$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che é un'isometria. Presi f, g in R, avremo

$$f \in R^{(m)}, g \in R^{(n)} \implies$$

$$\langle ch(f), ch(g) \rangle_{\Lambda_{\mathbb{C}}} = \left\langle \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho p_\rho, \sum_{|\lambda|=m} z_\lambda^{-1} g_\lambda p_\lambda \right\rangle = 0 = \langle f, g \rangle_R$$

$$f \in R^{(n)}, g \in R^{(n)} \implies$$

$$\langle ch(f), ch(g)\rangle_{\Lambda_\mathbb{C}} = \left\langle \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho p_\rho, \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} g_\rho p_\rho \right\rangle = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho g_\rho$$

$$\langle f, g\rangle_R = \langle f, g\rangle_{S_n} = \frac{1}{n!}\sum_{w\in S_n} f(w)g(w^{-1}) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho g_\rho$$

dove l'ultima uguaglianza é data dal fatto che g é invariante sulle classi di coniugio.

É anche un omomorfismo di anelli, in quanto é lineare e

$$f \in R^{(m)}, g \in R^{(n)} \implies$$

$$ch(fg) = \langle fg, \psi\rangle_{S_{n+m}} = \left\langle \mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}} f \times g, \psi \right\rangle_{S_{n+m}}$$

$$= \left\langle f \times g, \mathrm{Res}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}} \psi \right\rangle_{S_n\times S_m}$$

$$= \frac{1}{n!m!}\sum_{w\in S_n, \theta\in S_m} f(w)g(\theta)\psi(w^{-1})\psi(\theta^{-1})$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{w\in S_n} f(w)\psi(w^{-1})\frac{1}{m!}\sum_{\theta\in S_m} g(\theta)\psi(\theta^{-1}) = \langle f, \psi\rangle_{S_n}\langle g, \psi\rangle_{S_m} = ch(f)ch(g)$$

Se adesso chiamiamo per semplicità χ_n il carattere della rappresentazione banale di S_n, abbiamo già visto che

$$ch(\chi_n) = h_n$$

Data $\lambda \dashv n$, definiamo

$$\psi_\lambda = \chi_{\lambda_1}\chi_{\lambda_2}\dots\chi_{\lambda_k} \in R^{(|\lambda|)} \implies ch(\psi_\lambda) = h_\lambda$$

e visto che h_λ generano su $\mathbb{Z}$ il modulo Λ, allora $\Lambda \subseteq \mathrm{Im}\, ch$. Per le formule di Jacobi-Trudi,

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{ij} = \det(ch(\chi_{\lambda_i - i + j}))_{ij} = ch(\det(\chi_{\lambda_i - i + j})_{ij})$$

dunque definiamo

$$\chi^\lambda = \det(\chi_{\lambda_i - i + j})_{ij} \in R^{|\lambda|} \implies ch(\chi^\lambda) = s_\lambda$$

Ma dato che gli s_λ sono ortonormali rispetto al prodotto scalare, allora lo devono essere anche i χ^λ; ciò vuol dire che singolarmente sono caratteri di rappresentazioni irriducibili, e per cardinalità, devono anche generare R. Questo ci fa concludere che ch é un isomorfismo tra R e il generato su $\mathbb{Z}$ degli s_λ, ossia Λ. $\square$

2.3.1 Pieri

Dalla funzione *ch* si possono ricavare importanti proprietà, quali

$$s_\lambda = ch(\chi^\lambda) = \sum_{|\rho|=|\lambda|} z_\rho^{-1}\chi_\rho^\lambda p_\rho \qquad \langle s_\lambda, p_\rho\rangle = \chi_\rho^\lambda = \chi_{S^\lambda}(\rho)$$

che é un modo per calcolare elemento per elemento il carattere di S^λ. Dato che gli s_λ sono una base ortonormale di Λ, allora

$$p_\rho = \sum_\lambda \langle p_\rho, s_\lambda\rangle\, s_\lambda = \sum_\lambda \chi_\rho^\lambda s_\lambda$$

Inoltre,

$$ch(\psi_\lambda) = h_\lambda = \sum_{|\rho|=|\lambda|} z_\rho^{-1} p_\rho(\psi_\lambda)_\rho \qquad \langle h_\lambda, p_\rho\rangle = (\psi_\lambda)_\rho$$

da cui

$$p_\rho = \sum_\lambda \langle p_\rho, h_\lambda\rangle\, m_\lambda = \sum_\lambda (\psi_\lambda)_\rho m_\lambda$$

Con queste formule, possiamo dimostrare

Teorema 2.58 (Regola di Pieri)**.**

$$s_\mu h_r = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_\lambda$$

dove $r \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{P}$ é l'insieme delle partizioni ottenute da μ aggiungendo r quadratini su colonne diverse.

Dimostrazione. Mettiamoci ad n variabili. Riprendiamo la funzione ω definita in precedenza. Sappiamo che $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$ grazie alle formule di Jacobi-Trudi, dunque la tesi é equivalente a

$$s_{\mu'} e_r = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} s_{\lambda'}$$

che si può scrivere come

$$s_\mu e_r = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}'} s_\lambda$$

dove $\mathcal{P}'$ é l'insieme delle partizioni ottenute da μ aggiungendo r quadratini su righe diverse. Sostituendo $s_\lambda = a_{\delta+\lambda}/a_\delta$ e semplificando i denominatori, si trasforma ancora in

$$a_{\mu+\delta} e_r = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}'} a_{\lambda+\delta}$$

ed espandendo il primo si ottiene

$$a_{\mu+\delta}e_r = \left(\sum_{w\in S_n} \operatorname{sgn}(w)x^{w(\mu+\delta)}\right)\left(\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}^{|\alpha|=r} x^\alpha\right)$$

$$= \sum_{w,\alpha} \operatorname{sgn}(w)x^{w(\mu+\delta)}x^{w(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}^{|\alpha|=r} \sum_{w\in S_n} \operatorname{sgn}(w)x^{w(\mu+\delta+\alpha)}$$

$$= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}^{|\alpha|=r} a_{\mu+\delta+\alpha}$$

Dato che μ é ordinato in maniera non crescente, δ in maniera strettamente decrescente e α ha solo zeri o uno, notiamo che $\mu+\delta+\alpha$ é ordinato anch'esso in maniera non crescente, infatti

$$\mu_i + \delta_i + \alpha_i \geq \mu_{i+1} + \delta_{i+1} + 1 + \alpha_{i+1} - 1 = \mu_{i+1} + \delta_{i+1} + \alpha_{i+1}$$

Però, sappiamo che $a_{\mu+\delta+\alpha}$ é diverso da zero solo se $\mu+\delta+\alpha$ é strettamente decrescente, ma questo é vero se e solo se $\mu+\alpha$ é una partizione, e se lo osserviamo bene, notiamo che coincide con le partizioni ottenute da μ aggiungendo r quadratini su righe diverse, ossia $\mathcal{P}'$, il che conclude. $\square$

Esempio 38.

$$s_{\ydiagram{2,2}}h_2 = s_{\ydiagram{3,2,1}} + s_{\ydiagram{4,2}} + s_{\ydiagram{2,2,2}}$$

Nel caso $r = 1$, abbiamo che

$$\chi_{S^\lambda}\chi_1 = \chi_{\operatorname{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S^\lambda} \qquad ch(\chi_{S^\lambda}\chi_1) = s_\lambda h_1$$

dunque sappiamo scomporre una rappresentazione indotta da S_n a S_{n+1}.

Esempio 39.

$$\operatorname{Ind}_{S_4}^{S_5} \ydiagram{2,2} = \ydiagram{3,2} + \ydiagram{2,2,1}$$

Esempio 40. Per la restrizione di una rappresentazione irriducibile da S_{n+1} a S_n possiamo usare la reciprocità di Frobenius per ricavare una regola simile all'indotto.

$$\left(\operatorname{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} \lambda, \mu\right) = \left(\lambda, \operatorname{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} \mu\right)$$

da cui sappiamo che μ appare nella restrizione di λ se e solo se λ appare nell'indotto di μ, ossia se é μ a cui abbiamo aggiunto un quadratino, ed in questo caso ha coefficiente 1. Questo ci dice che il ristretto di λ ha dentro tutte le partizioni ottenibili da lei togliendo un quadratino. Per esempio

$$\operatorname{Res}_{S_5}^{S_6} \ydiagram{3,2,1} = \ydiagram{2,2,1} + \ydiagram{3,1,1} + \ydiagram{3,2}$$

Vediamo ora altri esempi di utilizzo della Regola di Pieri.

Esempio 41. Sappiamo calcolare $\ydiagram{4,1} \otimes \ydiagram{4,1}$?

Ricordiamo una regola citata un po' di tempo fa: dati $H < G$, U un G modulo, W un H modulo, allora

$$U \otimes \operatorname{Ind}_H^G W \cong \operatorname{Ind}_H^G \left(W \otimes \operatorname{Res}_H^G U \right)$$

Nel nostro caso, prendiamo $W = \ydiagram{4}$, $U = \ydiagram{4,1}$ con $G = S_5$ e $H = S_4$. Otteniamo

$$\ydiagram{4,1} \otimes \operatorname{Ind}_{S_4}^{S_5} \ydiagram{4} = \ydiagram{4,1} \otimes \left(\ydiagram{4,1} + \ydiagram{5} \right)$$

$$= \ydiagram{4,1} \otimes \ydiagram{4,1} + \ydiagram{4,1}$$

$$\operatorname{Ind}_{S_4}^{S_5} \left(\ydiagram{4} \otimes \operatorname{Res}_{S_4}^{S_5} \ydiagram{4,1} \right) = \operatorname{Ind}_{S_4}^{S_5} \left(\ydiagram{4} + \ydiagram{3,1} \right)$$

$$= \ydiagram{5} + \ydiagram{4,1} + \ydiagram{3,1,1} + \ydiagram{3,2} + \ydiagram{4,1}$$

$$\ydiagram{4,1} \otimes \ydiagram{4,1} = \ydiagram{5} + \ydiagram{4,1} + \ydiagram{3,1,1} + \ydiagram{3,2}$$

Per controllare l'esattezza della soluzione possiamo per esempio calcolare le dimensioni delle rappresentazioni ottenute. A sinistra abbiamo una rappresentazione di dimensione 16, mentre a destra abbiamo una banale di dimensione 1, una standard di dimensione 4, e altre due. Per calcolare le ultime dimensioni, contiamo il modo di disporre i numeri da 1 a 5 in maniera crescente su colonne e righe.

Nel caso di $\ydiagram{3,1,1}$, dobbiamo mettere l'1 in alto a sinistra. Tutte le configurazioni si possono simmetrizzare rispetto all'1, dunque possiamo disporre il 2 a destra dell'1 $\ytableaushort{12{},{},{}}$ e gli ultimi 3 numeri si possono disporre in 3 modi, dunque in tutto ha dimensione $2{*}3 = 6$.

Nel caso di $\ydiagram{3,2}$, dobbiamo sempre mettere l'1 in alto a sinistra. Se mettiamo il 2 a destra dell'1 $\ytableaushort{12{},{}{}}$, allora abbiamo 3 completamenti possibili, mentre se lo mettiamo sotto all'1 $\ytableaushort{1{}{},2{}}$ allora siamo costretti a mettere il 3 a destra dell'1 e gli altri due numeri a caso, da cui 2 possibilità. In tutto, dunque, ha dimensione 5.

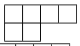
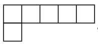
Facendo la somma, otteniamo $6{+}5{+}1{+}4 = 16$, come voluto.

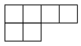
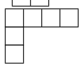
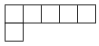
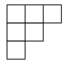
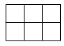
Esempio 42. Che rappresentazione é $\ydiagram{2,2} \otimes \ydiagram{3,1}$?

Prendendo $U = \ydiagram{2,2}$, $W = \ydiagram{3}$, $G = S_4$, $H = S_3$, otteniamo

$$\ydiagram{2,2} \otimes \left(\ydiagram{4} + \ydiagram{3,1} \right) = \operatorname{Ind}_{S_3}^{S_4} \ydiagram{2,1} = \ydiagram{2,2} + \ydiagram{3,1} + \ydiagram{2,1,1}$$

da cui $\ydiagram{2,2} \otimes \ydiagram{3,1} = \ydiagram{3,1} + \ydiagram{2,1,1}$

Esercizio 21. Calcolare  $\otimes$ .

Soluzione:  $\oplus$  $\oplus$  $\oplus$  $\oplus$ 

Esempio 43. Mostriamo che

$$\Lambda^s S^{(n-1,1)} \cong S^{(n-s,1,\dots,1)} \qquad \forall s > 0,\ n > 1$$

Andiamo per induzione su s e n. Per $s = 1$ oppure $n = 2$ va tutto bene. Dato che la restrizione e il prodotto alternante commutano, abbiamo

$$W = \mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} \left(\Lambda^s S^{(n-1,1)}\right) = \Lambda^s \left(S^{(n-1)} \oplus S^{(n-2,1)}\right)$$

Presa una base dello spazio, con $v_1, \dots, v_{n-2} \in S^{(n-2,1)}$ e $v_{n-1} \in S^{(n-1)}$, allora ogni elemento della base del prodotto esterno é un prodotto di elementi di questa base in ordine strettamente crescente. Questo vuol dire che possiamo scomporlo tra i vettori della base che contengono v_{n-1} e quelli che non lo contengono, ossia

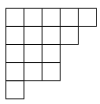
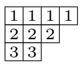
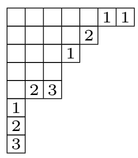
$$W = \Lambda^s \left(S^{(n-1)} \oplus S^{(n-2,1)}\right) = \Lambda^s S^{(n-2,1)} \oplus \Lambda^{s-1} S^{(n-2,1)}$$

e per induzione, sappiamo che

$$W = S^{(n-s-1,1,\dots,1)} \oplus S^{(n-s,1,\dots,1)} = \mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} S^{(n-s,1,\dots,1)}$$

L'unica rappresentazione che ristretta dia il risultato giusto é quella della tesi.

Citiamo una formula un po' più generale di Pieri. Date λ e μ due partizioni, anche di n diversi, riempiamo ogni casella di μ con il numero della riga relativa, e aggiungiamo i quadrati di λ a μ in modo che sulle righe siano nondecrescenti e quelli sulle colonne siano crescenti. Per esempio,

$\lambda =$  $\quad \mu =$  $\quad \rightarrow \quad \nu =$ 

Leggiamo ora i numeri inseriti da destra a sinistra e dall'alto in basso, ottenendo 112132123. Notiamo che ogni sottostringa iniziale di questo numero ha più cifre 1 di cifre 2 e più cifre 2 di cifre 3.

Adesso possiamo enunciare la formula generale

Teorema 2.59 (Formula di Littlewood-Richardson)**.** Chiamato $c_{\lambda\mu\nu}$ il numero di volte che otteniamo il diagramma ν con il procedimento sopra, e tale che soddisfi la regola delle sottostringhe iniziali, allora

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu\nu} s_\nu$$

2.3.2 Kostka Numbers

Ricordiamo che noi sappiamo quali sono le rappresentazioni irriducibili degli S_n: sono gli S^λ. Possiamo concludere che $\pm\psi_\lambda$ sono appunto i caratteri degli S^λ in qualche ordine. Scopriremo in seguito che $\chi^\lambda = \chi_{S^\lambda}$.

Ricordiamo inoltre che noi abbiamo definito gli M^λ come

$$M^\lambda = \mathrm{Ind}_{S_{\lambda_1}\times\cdots\times S_{\lambda_k}}^{S_n} \textit{banale} \implies \psi_\lambda = \chi_{M_\lambda}$$

e che dunque

$$\psi_\lambda = \chi_{S^\lambda} \oplus \bigoplus_{\mu \succ \lambda} k_{\mu\lambda}\chi_{S^\mu}$$

dove i numeri naturali $k_{\mu\lambda}$ si chiamano **Kostka Numbers**, e sono calcolabili combinatoricamente attraverso i diagrammi di Young. Per esempio, preso $\lambda = (3,2)$, sappiamo che M^λ é formato da S^μ con $\mu \succeq \lambda$, dunque sono $\mu = \lambda, (4,1), (5)$. Per trovare $k_{(4,1)\lambda}$, riempiamo il diagramma di λ con numeri, in cui in ogni riga c'è solo il numero della riga stessa: $\young(111,22)$. Adesso si deve contare il numero di modi di mettere questi numeri (ossia tre 1 e due 2) nel diagramma di $(4,1)$ in modo che ogni riga abbia i numeri in ordine non decrescente, e su ogni colonna i numeri siano in ordine strettamente crescente. In particolare $k_{(4,1)\lambda} = 1$, poiché l'unico modo di fare ciò é $\young(1112,2)$. Facendolo anche per (5), si ottiene $k_{(5)\lambda} = 1$, e dunque

$$M^{\ydiagram{3,2}} \cong \ydiagram{3,2} \oplus \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{5}$$

Un altro esempio é con $\mu = \ydiagram{3,2}$ e $\lambda = \ydiagram{2,2,1}$. Riempiendo λ si ottengono $\young(11,22,3)$, che si possono mettere dentro μ in solo due modi:

$$\young(112,23) \qquad \young(113,22)$$

da cui $k_{\mu\lambda} = 2$.

Esercizio 22.

$$k_{\mu\lambda} \neq 0 \iff \mu \succeq \lambda$$

Notiamo che questo vuol dire che $\lambda \succ \mu \implies k_{\mu\lambda} = 0$, ma non implica che $k_{\mu\lambda} = 0 \implies \lambda \succ \mu$. In particolare, se $\mu = \ydiagram{3,3,1}$ e $\lambda = \ydiagram{4,1,1,1}$, allora $k_{\mu\lambda} = 0$, ma i due non sono confrontabili per dominanza.

Esempio 44. Dato $\mu = (4,3)$, cos'è ψ_μ? Gli unici diagrammi che dominano μ sono $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$, $(7,0)$, ed é facile vedere che tutti i Kostka Numbers sono pari ad uno.

$$\psi_\mu = \chi_{\ydiagram{4,3}} + \chi_{\ydiagram{5,2}} + \chi_{\ydiagram{6,1}} + \chi_{\ydiagram{7}}$$

Più in generale, questo succede per ogni μ che ha lunghezza 2.

Cerchiamo ora di dimostrare che quelli che compaiono nella formula di ψ_λ sono proprio i Kostka Numbers.

Teorema 2.60.

$$s_\mu = \sum_\lambda k_{\mu\lambda} m_\lambda$$

dove i $k_{\mu\lambda}$ sono i Kostka Numbers

Dimostrazione. Notiamo che la tesi é equivalente a

$$h_\lambda = \sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\mu\lambda} s_\mu$$

poiché in questo caso

$$s_\mu = \sum_\lambda \langle s_\mu, h_\lambda \rangle m_\lambda = \sum_\lambda k_{\mu\lambda} m_\lambda$$

Dimostriamolo per induzione sulla lunghezza di λ. Se $\lambda = (r, 0, 0, \ldots, 0)$, allora $h_\lambda = h_r = s_\lambda$ ed equivale alla tesi in quanto non ci sono partizioni che dominano λ, a parte λ stessa. Facciamolo anche per $l(\lambda) = 2$, applicando la Regola di Pieri:

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} = s_{\lambda_1} h_{\lambda_2} = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} s_\gamma$$

dove $\mathcal{P}$ sono le partizioni ottenute da λ_1 aggiungendo λ_2 quadratini su colonne distinte. Come abbiamo già visto in un esempio precedente, in questo caso tutti i kostka numbers sono 1, e $\mathcal{P}$ descrivono tutti i diagrammi che dominano λ, dunque abbiamo di nuovo la tesi. Se lo facciamo con lunghezza 3, ci accorgiamo che

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} h_{\lambda_3} = \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{P}} s_\gamma \right) h_{\lambda_3} = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \sum_{\mu \in \mathcal{P}'} s_\mu$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo riapplicato Pieri ad ogni addendo. Otteniamo ancora tutti i diagrammi che dominano λ, e se immaginiamo di riempire con 1 i quadrati di λ_1, ed in generale con i i quadrati di λ_i, allora il numero di volte che un certo diagramma μ compare nella somma sviluppata con Pieri, é esattamente pari al numero di disporre i numeri $1, 2, 3$ dentro μ in modo che le righe siano non decrescenti, e le colonne siano strettamente crescenti(perché non possiamo mettere, per Pieri, due numeri uguali nella stessa colonna), dunque coincide ancora con i kostka numbers. Il passo induttivo generale é uguale. □

Teorema 2.61.

$$\psi_\lambda = \sum_\mu k_{\mu\lambda} \chi^\mu$$

dove i $k_{\mu\lambda}$ sono i Kostka Numbers

Dimostrazione. Dal teorema sopra,

$$p_\rho = \sum_\mu \chi^\mu_\rho s_\mu = \sum_{\mu,\lambda} \chi^\mu_\rho k_{\mu\lambda} m_\lambda = \sum_\lambda \left(\sum_\mu \chi^\mu_\rho k_{\mu\lambda} \right) m_\lambda$$

ma sappiamo anche che

$$\langle p_\rho, h_\lambda \rangle = (\psi_\lambda)_\rho \implies p_\rho = \sum_\lambda (\psi_\lambda)_\rho m_\lambda$$

e dato che m_λ é una base, otteniamo la tesi

$$(\psi_\lambda)_\rho = \sum_\mu k_{\mu\lambda} \chi^\mu_\rho \qquad \forall \rho$$

□

Corollario 2.62.

$$\chi^\lambda = \chi_{S^\lambda}$$

e i coefficienti $k_{\mu\lambda}$ che appaiono in

$$M^\lambda \cong \bigoplus_{\mu \succeq \lambda} k_{\mu\lambda} S^\mu$$

sono proprio i Kostka Numbers.

Dimostrazione. Chiamiamo $K_{\lambda\mu}$ i coefficienti che appaiono in

$$M^\lambda \cong \bigoplus_{\mu \succeq \lambda} K_{\mu\lambda} S^\mu$$

Di loro sappiamo solo che sono numeri naturali, e che $K_{\lambda\lambda} = 1$. Passando ai caratteri, e utilizzando il teorema sopra, otteniamo

$$\psi_\lambda = \sum_{\mu \succeq \lambda} K_{\mu\lambda} \chi_{S^\mu} = \sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\mu\lambda} \chi^\mu$$

Andiamo ora per induzione su λ. Se $\lambda = (n, 0, 0, \dots)$, allora domina tutte le altre partizioni, da cui

$$\psi_\lambda = K_{\lambda\lambda} \chi_{S^\lambda} = k_{\lambda\lambda} \chi^\lambda = \chi_{S^\lambda} = \chi^\lambda$$

Per il passo induttivo, poniamo ora che $\chi_{S^\mu} = \chi^\mu$ per ogni $\mu \succ \lambda$. Otteniamo

$$\psi_\lambda = \chi_{S^\lambda} + \sum_{\mu \succ \lambda} K_{\mu\lambda} \chi_{S^\mu} = \chi^\lambda + \sum_{\mu \succ \lambda} k_{\mu\lambda} \chi^\mu = \chi^\lambda + \sum_{\mu \succ \lambda} k_{\mu\lambda} \chi_{S^\mu}$$

$$\implies \langle \psi_\lambda, \chi_{S^\mu} \rangle = k_{\mu\lambda} = K_{\mu\lambda} \qquad \forall \mu \succ \lambda$$

$$\implies \chi_{S^\lambda} = \chi^\lambda$$

□

Da questo, possiamo riscrivere una formula già citata sopra

Teorema 2.63 (Formula di Frobenius)**.**

$$p_\rho = \sum_{|\lambda|=|\rho|} (\chi_{S^\lambda})_\rho \, s_\lambda$$

Poniamo ora che $\mu = (1, 1, 1, \dots, 1) \dashv n$. Avremo che

$$M^\mu = \mathrm{Ind}_{S_1 \times \cdots \times S_1}^{S_n} \textit{banale} = \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{S_n} \textit{banale} = \mathbb{C}S_n$$

Questo ci dice che ψ_μ é il carattere della rappresentazione regolare di S_n, e pertanto

$$\psi_\mu = \sum_{\lambda \dashv n} \dim(S^\lambda) \chi_{S^\lambda} = \sum_{\lambda \dashv n} k_{\lambda\mu} \chi_{S^\lambda}$$

ossia, dato che sono una base,

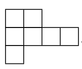
$$\dim(S^\lambda) = k_{\lambda\mu}$$

Da questo é possibile calcolare tutte le dimensioni dei caratteri irriducibili di S_n, semplicemente calcolando i $k_{\lambda\mu}$. Notiamo che questi sono i modi di inserire i numeri da 1 a n dentro λ in maniera che sulle righe e sulle colonne i numeri siano strettamente crescenti. Questi tableaux vengono detti **Standard**, mentre quelli con la condizione di non decrescenza sulle righe vengono detti **Semi-Standard**.

Ricordiamo che il modulo di Specht S^λ contenuto in M^λ é generato dagli $e_t = C_t^- \{ t \}$ al variare di t tra i tableaux di forma λ, mentre M^λ é generato dai tabloid $\{ t \}$.

Definiamo ora dei nuovi oggetti.

Definizione 2.64. Dato n naturale, una sua **Composizione** é una successione di naturali $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ la cui somma faccia n.

Notiamo che i γ_i in una composizione possono essere anche zero. Una composizione, ad esempio $(2, 4, 1)$ si rappresenta ancora con i diagrammi di Young . Notiamo che le partizioni sono, in particolare, delle composizioni.

Definizione 2.65. Date due composizioni dello stesso n, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, si dice che γ **domina** θ se le somme parziali della prima sono maggiori o uguali di quelle della seconda. in formule

$$\gamma \succeq \theta \iff \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \geq \sum_{i=1}^{k} \theta_i \quad \forall \, k$$

Grazie a quest'ordine parziale tra composizioni, possiamo anche dare un ordine sui tabloid. Dato un tabloid $\{\, t \,\}$ di forma $\lambda \dashv n$, definiamo $\{\, t^i \,\}$ il tabloid formato dagli elementi in $\{\, t \,\}$ minori o uguali ad i. Ad ognuno di questi, inoltre, possiamo associare la composizione γ_i che indica quanti numeri ci sono su ogni riga

Esempio 45. Dato il tabloid $\{\, t \,\} = \begin{array}{cc} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$ avremo che

$$\{\, t^1 \,\} = \begin{array}{c} \hline \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \qquad \{\, t^2 \,\} = \begin{array}{c} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \qquad \{\, t^3 \,\} = \begin{array}{cc} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \{\, t^4 \,\} = \{\, t \,\}$$

$$\gamma^1 = (0,1) \qquad \gamma^2 = (1,1) \qquad \gamma^3 = (1,2) \qquad \gamma^4 = (2,2)$$

Dunque definiamo l'ordine di dominanza anche fra tabloid:

Definizione 2.66. Dati $\{\, s \,\}$ e $\{\, t \,\}$ due n-tabloids, con composizioni associate rispettivamente γ^i e θ^i, allora si dice che $\{\, s \,\}$ **domina** $\{\, t \,\}$, se le composizioni γ^i dominano le θ^i. In formule,

$$\{\, s \,\} \succeq \{\, t \,\} \iff \gamma^i \succeq \theta^i \quad \forall\, i$$

Lemma 2.67 (Dominanza per Tabloid)**.** Dato $\{\, t \,\}$ tabloid con due entrate $k < l$ con k che compare in una delle righe sotto a quella di l, allora $(k,l)\{\, t \,\} \succ \{\, t \,\}$.

Dimostrazione. Poniamo che γ^i siano le composizioni associate a $\{\, t \,\}$, mentre θ^i quelle associate a $(k,l)\{\, t \,\}$. Poniamo inoltre che k stia nella riga r, che l stia nella riga q, con $r > q$ per ipotesi. Avremo che

$$\gamma^i = \theta^i \quad \forall\, i < k \wedge i \geq l$$

Se invece $k \leq i < l$, allora γ^i si ottiene da θ^i diminuendo la riga q di uno ed aumentando la riga r di uno, dunque si ottiene che

$$\sum_{j=1}^{s} \gamma^i_j = \sum_{j=1}^{s} \theta^i_j \quad \forall\, s < q \wedge q \geq r \qquad\qquad \sum_{j=1}^{s} \gamma^i_j + 1 = \sum_{j=1}^{s} \theta^i_j \quad \forall\, q \leq s < r$$

da cui $\theta^i \succ \gamma^i \implies \{\, s \,\} \succ \{\, t \,\}$. □

Prendiamo ora un qualsiasi elemento di M^λ, e lo scriviamo in relazione alla base dei tabloid $v = \sum_i c_i \{\, t_i \,\}$. Diremo che $\{\, t_i \,\}$ appare in v se il rispettivo coefficiente c_i é nonnullo.

Corollario 2.68. Dato t un tableau standard, e $\{\, s \,\}$ un tabloid della stessa forma che appare in e_t, allora $\{\, t \,\}$ domina $\{\, s \,\}$.

Dimostrazione. Prendiamo $\sigma \in C_t$, e dimostriamo che $\{t\} \succeq \{\sigma t\}$ per induzione sul numero di *inversioni di colonna* di σt, ossia sul numero di coppie $k < l$ che stanno sulla stessa colonna in σt, ma con k su righe sotto a l. Ricordiamo che t é un tableau standard, dunque non ha inversioni di colonna, e σt non ha tali inversioni se e solo se é uguale a t, dunque il passo base é verificato. Ponendo che invece σt abbia $n > 0$ inversioni, prendiamone una (k, l). Sappiamo che $(k, l)\sigma \in C_t$, e che $(k, l)\sigma t$ ha meno inversioni di σt, dunque per lemma di dominanza ed ipotesi induttiva, otteniamo

$$\{t\} \succeq \{(k, l)\sigma t\} \succeq \{\sigma t\}$$

e con ciò abbiamo mostrato che se $\{s\}$ compare in $e_t = C_t^- \{t\}$, allora deve essere della forma σt, dunque $\{t\} \succeq \{s\}$. □

Questo risultato ci dice in particolare che tra i tabloid che compaiono in e_t, $\{t\}$ domina tutti gli altri.

Lemma 2.69. Dati $v_1, \ldots, v_m$ elementi di M^μ, supponiamo che per ogni v_i esista un tabloid $\{t_i\}$ per cui

1. $\{t_i\}$ appare in v_i e domina tutti i suoi tabloid
2. I $\{t_i\}$ sono distinti

allora gli elementi v_i sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Prendiamo una combinazione lineare $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$, e consideriamo i t_i relativi agli a_i diversi da zero. Tra questi, ce ne sarà uno massimale $\{t\}$, che comparirà pertanto solo nel v_i relativo, rendendo la combinazione non nulla. Questo mostra che i v_i sono linearmente indipendenti. □

Teorema 2.70.

$$\{e_t \mid t \text{ tableau standard}\}$$

é una base di S^λ.

Dimostrazione. Presi i politabloid standard, in ognuno di essi c'è il tabloid standard $\{t\}$. Questi formano un set di tabloid distinti, che dominano i tabloid nei rispettivi e_t, dunque i politabloid e_t sono linearmente indipendenti, e per dimensione generano tutto S^λ, dunque sono una base. □

2.3.3 Regola degli Uncini

Usando la formula di Frobenius $p_\rho = \sum_{|\lambda|=|\rho|} (\chi_{S^\lambda})_\rho s_\lambda$ possiamo ricavare la dimensione di S^λ. Infatti, questa é l'immagine dell'identità tramite il suo carattere, dunque, ponendo $d = |\rho|$,

$$p_{\mathrm{Id}} = p_1^d = \sum_{|\lambda|=d} \dim S^\lambda \cdot s_\lambda$$

$$a_\delta p_1^d = \sum_{|\lambda|=d} \dim S^\lambda \cdot a_{\lambda+\delta}$$

Per concentrarci su λ, calcoliamo il coefficiente del termine $x^{\lambda+\delta}$, che é contenuto nel membro a destra solo da $a_{\delta+\lambda}$.

$$[a_\delta p_1^d]_{\delta+\lambda} = \dim S^\lambda$$

Chiamiamo $k = l(\lambda)$. Otteniamo

$$a_\delta = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) x_k^{\sigma(1)-1} x_{k-1}^{\sigma(2)-1} \dots x_1^{\sigma(k)-1}$$

$$p_1^d = (x_1 + \dots + x_k)^d = \sum_{r\in\mathbb{N}^k, |r|=d} \frac{d!}{r_1! \dots r_k!} x^r$$

$$[a_\delta p_1^d]_{\delta+\lambda} = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{d!}{(\delta_1 + \lambda_1 - \sigma(k) + 1)! \dots (\delta_k + \lambda_k - \sigma(1) + 1)!}$$

dove la somma é fatta sulle permutazioni tali che $\delta_i + \lambda_i - \sigma(k-i+1) + 1 \geq 0$ per ogni i. Raccogliendo, otteniamo

$$\frac{d!}{(\delta_1 + \lambda_1)! \dots (\delta_k + \lambda_k)!} \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^k (\lambda_j + \delta_j) \dots (\lambda_j + \delta_j - \sigma(k-j+1) + 2)$$

dove questa volta la sommatoria é davvero su tutte le permutazioni, perché se la condizione sopra viene violata, nella produttoria compare uno zero. Se ci concentriamo sulla sommatoria, notiamo che é il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_k + \delta_k & (\lambda_k + \delta_k)(\lambda_k + \delta_k - 1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \lambda_1 + \delta_1 & (\lambda_1 + \delta_1)(\lambda_1 + \delta_1 - 1) & \dots \end{pmatrix}$$

che si riesce a trasformare, tramite mosse di Gauss, in

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_k + \delta_k & (\lambda_k + \delta_k)^2 & (\lambda_k + \delta_k)^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & \lambda_1 + \delta_1 & (\lambda_1 + \delta_1)^2 & (\lambda_1 + \delta_1)^3 & \dots \end{pmatrix}$$

che é una matrice di Vandermonde, di cui sappiamo calcolare il determinante. Otteniamo dunque

$$[a_\delta p_1^d]_{\delta+\lambda} = \frac{d!}{(\delta_1 + \lambda_1)! \dots (\delta_k + \lambda_k)!} \prod_{j<i} (\lambda_j + \delta_j - \lambda_i - \delta_i)$$

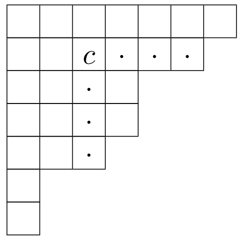
$$\dim S^\lambda = \frac{d!}{(\delta_1 + \lambda_1)! \dots (\delta_k + \lambda_k)!} \prod_{j<i} (\lambda_j - \lambda_i + i - j)$$

Siamo pronti ora a spiegare la regola degli uncini per il calcolo della dimensione di una rappresentazione irriducibile di S_n.

Innanzitutto, diamo una definizione rigorosa di uncino.

Definizione 2.71. Dato un diagramma λ, allora l'uncino u riferito ad una sua casella c é l'insieme delle caselle alla destra o sotto a c. La lunghezza di u é il numero di caselle nell'uncino, che denotiamo con $l(u)$.

Per esempio, nel seguente diagramma, l'uncino relativo alla casella c é la casella stessa e quelle contrassegnate da un punto



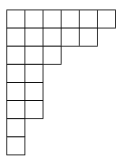
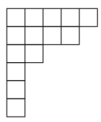
D'ora in poi per dire che u é un uncino di λ scriveremo $u \ulcorner \lambda$. Siamo pronti a dimostrare il teorema

Teorema 2.72. Dato una partizione $\lambda \dashv n$, allora

$$\dim S^\lambda = \frac{n!}{\prod_{u \ulcorner \lambda} l(u)}$$

Dimostrazione. Andiamo per induzione sul numero di colonne di λ, ossia su λ_1. Se $\lambda_1 = 1$, allora abbiamo il diagramma della rappresentazione segno, i cui uncini hanno lunghezza $n, n-1, n-2, \dots, 1$, e la sua dimensione é proprio $n!/n! = 1$.

Sia ora λ una partizione con $r = \lambda_1 > 1$ colonne, e chiamiamo $\overline{\lambda}$ il diagramma ottenuto eliminando la prima colonna di λ

$\lambda =$  $\to \overline{\lambda} =$ 

Poniamo inoltre che la lunghezza della prima colonna di λ sia k e la lunghezza della seconda colonna s, anche detti $\lambda'_1 = l(\lambda) = k$, $\lambda'_2 = l(\overline{\lambda}) = \overline{\lambda}'_1 = s$. Scriviamo la formula degli uncini, separando quelli riferiti alle colonne della prima colonna dal resto, che sono gli uncini di $\overline{\lambda}$, ed usando il passo induttivo.

$$\frac{n!}{\prod_{u \ulcorner \lambda} l(u)} = \frac{n!}{\left(\prod_{u \ulcorner \overline{\lambda}} l(u)\right)(\lambda_1 + k - 1)(\lambda_2 + k - 2)\dots(\lambda_{k-1} + 1)\lambda_k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(\lambda_1 + k - 1)(\lambda_2 + k - 2)\dots(\lambda_{k-1} + 1)\lambda_k} \dim S^{\overline{\lambda}}$$

Usando la formula trovata sopra per la dimensione di $S^{\overline{\lambda}}$, scriviamo

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(\lambda_1+k-1)\dots(\lambda_{k-1}+1)\lambda_k}\frac{(n-k)!}{(\delta_1+\overline{\lambda}_1)!\dots(\delta_s+\overline{\lambda}_s)!}\prod_{i<j\leq s}(\overline{\lambda}_i-\overline{\lambda}_j+j-i)$$

Dato che $\overline{\lambda}_i = \lambda_i - 1$, e $\sigma_i = s-i$, si possono riscrivere come

$$\frac{n!}{(\lambda_1+k-1)\dots\lambda_k(\lambda_1+s-2)!(\lambda_2+s-3)!\dots(\lambda_s-1)!}\prod_{i<j\leq s}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)$$

Calcoliamo i termini che mancano alla produttoria per far variare gli indici fino a k. Notiamo che i λ_{s+t} sono tutti 1, dunque, calcolando i termini relativi alle coppie di indici $(1,s+1),(1,s+2),\dots,(1,k)$, otteniamo $\lambda_1 - \lambda_{s+t}+s+t-1 = \lambda_1+s+t-2$, dunque facendo variare t, otteniamo i termini

$$(\lambda_1+s-1)(\lambda_1+s)\dots(\lambda_1+k-2) = \frac{(\lambda_1+k-1)!}{(\lambda_1+k-1)(\lambda_1+s-2)!}$$

ed in generale, per $1\leq i\leq s$ si ottengono i termini

$$(\lambda_i-i+s)(\lambda_i-i+s+1)\dots(\lambda_i-i+k-1) = \frac{(\lambda_i+k-i)!}{(\lambda_i+k-i)(\lambda_i+s-i-1)!}$$

fino a $i=s$, ossia

$$\frac{(\lambda_s+k-s)!}{(\lambda_s+k-s)(\lambda_s-1)!}$$

mentre per $i>s$ otteniamo $\lambda_i-\lambda_{i+u}+i+u-i=u$ e pertanto abbiamo i termini

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(k-i) = (k-i)! = \frac{(\lambda_i+k-i)!}{\lambda_i+k-i}$$

fino a $i=k$, ossia

$$\frac{(\lambda_k)!}{\lambda_k}$$

Moltiplicando e dividendo per questi termini, otteniamo finalmente

$$\frac{n!}{\prod_{u\ulcorner\lambda}l(u)} = \frac{n!}{(\lambda_1+k-1)!\dots(\lambda_{k-1}+1)!\lambda_k!}\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)$$

$$= \frac{n!}{(\lambda_1+\delta_1)!\dots(\lambda_{k-1}+\delta_{k-1})!(\lambda_k-\delta_k)!}\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j+j-i) = \dim S^\lambda$$

$\square$

Esempio 46. Cerchiamo di calcolare la dimensione della rappresentazione associata a $\lambda=(n-k,n-k,1,1,\dots,1)$, con 1 ripetuto k volte. Calcolandolo con gli uncini per righe, otteniamo

$$\dim S^\lambda = \frac{(2n-k)!}{(n+1)(n-k)!n(n-k-1)!k!}$$

$$= \frac{1}{n-k}\frac{(2n-k)!}{(n-k-1)!(n+1)!}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \frac{1}{n-k}\binom{2n-k}{n+1}\binom{n-1}{k}$$

Questo é un numero che rappresenta anche le dissezioni di un poligono regolare di $2n-k-1$ lati numerati con k diagonali.

Esercizio 23. Mostrare che le rappresentazioni irriducibili di S_n di dimensione minore di n, sono solo la rappresentazione banale, la rappresentazione segno, la rappresentazione standard, la trasposta della standard per ogni $n > 1$, e le 3 rappresentazioni $\ydiagram{2,2}$, $\ydiagram{2,2,2}$, $\ydiagram{3,3}$.

Questo esercizio si fa per induzione sul numero di colonne. Se una rappresentazione ha una sola colonna, allora é la segno, e dunque ha dimensione 1. Altrimenti, chiamiamo come sopra $\overline{\lambda}$ il diagramma meno la prima colonna, e supponiamo non sia una delle rappresentazioni della tesi. Chiamato $k = l(\lambda)$, avremo che

$$\dim S^{\lambda} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(\lambda_1+k-1)(\lambda_2+k-2)\dots(\lambda_{k-1}+1)\lambda_k}\dim S^{\overline{\lambda}}$$

ma per induzione, $\dim S^{\overline{\lambda}} \geq n-k$, dunque

$$\dim S^{\lambda} \geq n\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{(\lambda_1+k-1)(\lambda_2+k-2)\dots(\lambda_{k-1}+1)\lambda_k}$$

ma osserviamo che $n-1 \geq \lambda_1+k-1$ in tutti i casi tranne $\lambda = (\lambda_1, 1, 1, \dots, 1)$, che abbiamo già escluso poiché sarebbe $\overline{\lambda} = (\lambda_1 - 1)$. Inoltre abbiamo anche che per ogni i, $n-i \geq \lambda_1 + k - i \geq \lambda_i + k - i$, dunque otteniamo la tesi $\dim S^{\lambda} \geq n$.

Il resto dei casi é lasciato per esercizio.

2.4 Spazio delle Configurazioni

Introduciamo ora lo *Spazio delle Configurazioni* come

$$C_n(d) = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \;\middle|\; p_i \neq p_j \ \forall\, i \neq j \right\}$$

ossia le n-uple di vettori in $\mathbb{R}^d$ distinti. Su questo spazio, S_n agisce per permutazione di coordinate. La $\mathbb{C}$ algebra associativa graduata generata in coomologia da questo spazio topologico viene chiamata A_n, ed é generata da elementi w_{ij} con $1 \leq i, j \leq n$, che rispettano le proprietà

- $w_{ii} = 0$
- $w_{ij} = (-1)^d w_{ji}$
- $w_{ij}w_{hk} = (-1)^{d-1} w_{hk} w_{ij}$

- $w_{ij}w_{ik} = w_{kj}(w_{ik} - w_{ij})$

Nel caso $d = 2$, A_n é stata calcolata nel '69 da Arnold. Mettiamoci dunque nel caso $d = 2$, e attribuiamo grado 1 ad ogni w_{ij} non nullo.

$$A_2 = A_2^0 \oplus A_2^1 = \mathbb{C} \oplus \langle w_{12} \rangle$$

Infatti, in questo caso, w_{12} é l'unico non nullo, e non ci sono elementi di grado più alto in quanto

$$w_{12}w_{12} = -w_{12}w_{12} \implies w_{12}w_{12} = 0$$

Se poniamo $n = 3$,

$$A_3 = A_3^0 \oplus A_3^1 \oplus A_3^2$$

$$A_3^0 = \mathbb{C} \qquad A_3^1 = \langle w_{12}, w_{23}, w_{13} \rangle \cong \mathbb{C}^3$$

$$A_3^2 = \langle w_{12}w_{13}, w_{12}w_{23}, w_{13}w_{23} \rangle \cong \mathbb{C}^2$$

dove l'ultimo perde una dimensione poiché $w_{13}w_{23} = w_{31}w_{32} = w_{21}w_{32} - w_{21}w_{31}$.

In generale, una base di A_n^k é formata dal prodotto di k elementi w_{ij} tutti con j distinti e $i < j$.

$$A_4^2 = \langle w_{12}w_{13}, w_{12}w_{14}, w_{12}w_{23}, w_{12}w_{24}, w_{12}w_{34}, w_{13}w_{14}, w_{13}w_{24}, w_{13}w_{34}, w_{14}w_{23}, w_{23}w_{24}, w_{23}w_{34} \rangle$$

L'azione di S_n passa agli A_n^k permutando gli indici. Per esempio, su A_3^2,

$$(2,3)w_{12}w_{23} = w_{13}w_{32} = -w_{13}w_{23} = w_{23}w_{12} - w_{12}w_{13}$$

In realtà, su A_n possiamo fare agire in qualche modo anche S_{n+1}, ma NON su $C_n(d)$, e questa azione é compatibile con quella di S_n, in quanto S_{n+1} permuta $\{0, 1, \dots, n\}$, mentre l'azione di S_n é sugli indici $\{1, \dots, n\}$. Si può vedere l'azione di S_n come la ristretta di quella di S_{n+1}. Indichiamo con τ_i le trasposizioni $(i, i+1)$, e notiamo che S_{n+1} é generato da $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, mentre S_n lo vediamo in due modi distinti: o come il generato di $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ (che chiamiamo azione naturale), o come $\tau_0, \dots, \tau_{n-2}$.

Ora vorremmo capire quali rappresentazioni induce l'azione naturale di S_n sugli A_n^k.

Per esempio, se $n = 2$, vediamo subito che la rappresentazione é banale, in quanto fissa $\mathbb{C}$ e anche $w_{12} = w_{21}$. In generale, sappiamo scrivere A_n^k in relazione agli altri precedenti.

$$A_n^k \cong A_{n-1}^k \oplus A_{n-1}^{k-1} \cdot N \qquad N = \langle w_{1n}, w_{2n}, \dots, w_{n-1,n} \rangle$$

Nel caso $k = 1$ questo implica ovviamente che

$$A_n^1 = A_{n-1}^1 \oplus N$$

L'azione di S_n non naturale su A_n^1, generata da $\tau_0, \dots, \tau_{n-2}$ é estensione dell'azione naturale di S_{n-1} su A_{n-1}^1 generata da $\tau_1, \dots, \tau_{n-2}$. Sappiamo però che A_{n-1}^1 é un $\langle \tau_0, \dots, \tau_{n-2} \rangle$ modulo, dunque esiste il suo complementare T come rappresentazione, che é isomorfo a N come $\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-2} \rangle = S_{n-1}$ modulo. L'azione di quest'ultimo su N non fa altro che permutare la prima coordinata, dunque é la rappresentazione per permutazione che sappiamo essere la standard più la banale.

Sappiamo, per Pieri, che la rappresentazione standard di S_n, ristretta a S_{n-1}, mi da la rappresentazione per permutazione, ed é l'unica con questa proprietà, dunque T é la standard.

Più in generale vale

Lemma 2.73.
$$A_n^k \cong A_{n-1}^k \oplus A_{n-1}^{k-1} T$$
come $H = \langle \tau_0, \dots, \tau_{n-2} \rangle$ moduli.

Dimostrazione. Per $k = 1$ é vero. Ponendo $k > 1$, dato che abbiamo definito T come il complementare di A_{n-1}^1, avremo che ogni w_{in} si scrive come $\gamma_i^1 + \gamma_i^2$, con il primo in A_{n-1}^1 e il secondo in T. Sia ora $z \in A_n^k$ un elemento qualsiasi. Dallo spezzamento con N avremo

$$z = z_0 + \sum_{j=1}^{n-1} z_j w_{jn} \qquad z_0 \in A_{n-1}^k \quad z_j \in A_{n-1}^{k-1}$$

$$z = \underbrace{z_0 + \sum_{j=1}^{n-1} z_j \gamma_j^1}_{\in A_{n-1}^k} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} z_j \gamma_j^2}_{\in A_{n-1}^{k-1} T}$$

dunque si spezza in somma, ed é diretta per dimensioni. □

Notiamo che $A_{n-1}^{k-1} T \cong A_{n-1}^{k-1} \otimes T$, dunque

$$A_n^k \cong A_{n-1}^k \oplus (A_{n-1}^{k-1} \otimes T)$$

e questa uguaglianza vale anche come $K = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ moduli, perché i gruppi sono coniugati, e se $gKg^{-1} = H$, allora la mappa $\varphi : A_n^k \to A_n^k$ che agisce con g é un isomorfismo di rappresentazioni tra le due. Chiamiamo l'azione di K sul secondo membro l'azione *estesa*, e riassumiamo in una tabella le varie rappresentazioni, che si ottengono per esclusione usando la decomposizione sopra. su ogni colonna mettiamo la rappresentazione di S_n naturale e quella estesa a S_{n+1}.

	0		1		2		3	
A_2	$\ydiagram{2}$	$\ydiagram{3}$	$\ydiagram{2}$	$\ydiagram{3}$				
A_3	$\ydiagram{3}$	$\ydiagram{4}$	$\ydiagram{3} + \ydiagram{2,1}$	$\ydiagram{4} + \ydiagram{2,2}$	$\ydiagram{2,1}$	$\ydiagram{2,2}$		
A_4	$\ydiagram{4}$	$\ydiagram{5}$	$\ydiagram{4} + \ydiagram{2,2} + \ydiagram{3,1}$	$\ydiagram{3,2} + \ydiagram{5}$	$\ydiagram{2,2} + 2\,\ydiagram{3,1} + \ydiagram{2,1,1}$	$\ydiagram{3,2} + \ydiagram{3,1,1}$	$\ydiagram{3,1} + \ydiagram{2,1,1}$	$\ydiagram{3,1,1}$

Dato che é vero grado per grado, concludiamo che

$$A_n \cong A_{n-1} \oplus (A_{n-1} \otimes \ydiagram{3,1} \dots)$$

Ricordiamo anche che

$$U \otimes \operatorname{Ind}_H^G(\ydiagram{3} \dots) = \operatorname{Ind}_H^G \operatorname{Res}_H^G U$$

Dunque, perso $U = A_{n-1}$, $H = S_{n-1}$ e $G = S_n$, otteniamo

$$A_{n-1} \otimes (\ydiagram{3} \dots + \ydiagram{3,1} \dots) = \operatorname{Ind}_H^G \operatorname{Res}_H^G A_{n-1}$$

ma la ristretta di A_{n-1} é l'azione naturale di S_{n-1}, dunque

$$A_{n-1} + (A_{n-1} \otimes \ydiagram{3,1} \dots) = A_n = \operatorname{Ind}_H^G A_{n-1}$$

come S_n moduli. Da questo possiamo ricavare

$$A_n = \operatorname{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \operatorname{Ind}_{S_{n-2}}^{S_{n-1}} \dots \operatorname{Ind}_{S_2}^{S_3} A_2 \cong \operatorname{Ind}_{S_2}^{S_n} A_2 = 2 \operatorname{Ind}_{S_2}^{S_n} \ydiagram{2}$$

Esercizio 24. Notare che tutte le rappresentazioni compaiono con indice pari, e dedurre che A_3^1 non può essere $\ydiagram{3,1}$.

Trovare una formula generale per calcolare A_n^k é tuttora un problema aperto. Inoltre finora abbiamo lavorato con $d = 2$; con d pari é uguale, mentre con d dispari si può fare.

Capitolo 3

Gruppi Infiniti

3.1 Rappresentazioni di $GL(V)$

Cercheremo le rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$, con $\dim(V) = n$, dentro lo spazio vettoriale $V^{\otimes d}$, munito di due azioni:

- Facciamo agire da sinistra $GL(V)$ su ogni componente.
- Facciamo agire da destra il gruppo S_d, facendo permutare le componenti

Le due azioni sono compatibili, ossia commutano. Ricordiamo che abbiamo mostrato

$$S^\lambda \cong \mathbb{C}S_d \cdot C_t^- R_t^+ \subseteq \mathbb{C}S_d$$

Scegliamo t tra i tableaux di λ e definiamo $c_t := C_t^- R_t^+$. Dato che le due azioni commutano, allora preso $T \in GL(V)$ notiamo che

$$T(V^{\otimes d} c_t) = T(V^{\otimes d}) c_t \subseteq V^{\otimes d} c_t$$

dunque $V^{\otimes d} c_t$ é un $GL(V)$ modulo. Notiamo che questo non dipende dalla scelta del tableau di c_t[1], dunque possiamo scrivere c_λ, e definire

Definizione 3.1. La mappa che dato uno spazio vettoriale V restituisce lo spazio vettoriale $V^{\otimes d} c_\lambda$ é detta Funtore di Schur, ed é indicata con

$$S_\lambda V := V^{\otimes d} c_\lambda$$

Esempio 47. Data λ la rappresentazione banale di S_d, abbiamo che

$$S_\lambda V = V^{\otimes d} \sum_{g \in S_d} g$$

[1] Perché $C_{t'}^- R_{t'}^+ = g C_t^- R_t^+ g^{-1}$, dunque c'è un isomorfismo di $GL(V)$ moduli tra i due.

Vedendolo su un singolo vettore,

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_d) \sum_{g \in S_d} g = \sum_{g \in S_d} v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \cdots \otimes v_{g(d)}$$

dunque possiamo concludere che $S_\lambda V \cong \operatorname{Sym}^d V$

Nel caso in cui λ sia la segno, otteniamo

$$S_\lambda V = V^{\otimes d} \sum_{g \in S_d} \operatorname{sgn}(g) \cong \Lambda^d V$$

Poniamo invece $\lambda = (2,1)$, e scegliamo il tableau $t = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$.

$$c_\lambda = (e - (1,2))(e + (1,3)) = e - (1,2) + (1,3) - (1,2,3)$$

$$\begin{aligned}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)c_t &= (v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1) \otimes v_3 + (v_3 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_3) \otimes v_1 \\ &\sim (v_1 \wedge v_2) \otimes v_3 + (v_3 \wedge v_2) \otimes v_1\end{aligned}$$

e questo ci dice che possiamo vedere $S_\lambda V$ dentro $\Lambda^2 V \otimes V$. Quello che scopriamo é in realtà che

Esercizio 25.

$$S_{(2,1)} V \cong \operatorname{Ker}\left(\Lambda^2 V \otimes V \to \Lambda^3 V\right)$$

dove la mappa manda $(v_1 \wedge v_2) \otimes v_3$ in $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$. Dato che la mappa é suriettiva, le dimensioni degli spazi ci dicono che il kernel ha dimensione

$$\binom{n}{3} - n\binom{n}{2} = \frac{n^3 - n}{3}$$

dove $n = \dim V$. L'esercizio consiste nel trovare una base del kernel contenuta nel $GL(V)$ modulo. Notare che i seguenti elementi sono tutti contenuti nel kernel:

$$(v_1 \wedge v_2) \otimes v_1, (v_1 \wedge v_2) \otimes v_2, (v_1 \wedge v_2) \otimes v_3 - (v_1 \wedge v_3) \otimes v_2, \ldots$$

Si può dimostrare che

$$V^{\otimes 3} \cong \operatorname{Sym}^3 V \oplus \Lambda^3 V \oplus (S_{(2,1)} V)^2$$

e in generale vorremmo mostrare che

$$V^{\otimes d} = \bigoplus_{\lambda \dashv d} (S_\lambda V)^{\dim S^\lambda}$$

Proviamo a calcolare il carattere di $\operatorname{Sym}^d V$ come $GL(V)$ modulo quando λ é il diagramma banale. Prendiamo dapprima $T \in GL(V)$ diagonalizzabile, con $x_1, \dots, x_n$ autovalori e $v_1, \dots, v_n$ base di autovettori associata. Sappiamo che $\mathrm{Sym}^d V$ ha base $v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n}$ con $\sum i_j = d$, e che

$$T(v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n}) = (x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n}$$

dunque la traccia di questa rappresentazione in T sarà

$$\chi_{\mathrm{Sym}^d V}(T) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = d} x^\alpha = h_d(x_1, \dots, x_n) = s_{(d,0,\dots,0)}(x_1, \dots, x_n)$$

Quando T non é diagonalizzabile, non si possono più usare gli autovalori, ma la funzione h_d si può scrivere in relazione agli e_λ, e gli $e_r(x)$ si possono vedere come i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice, permettendoci di estendere la funzione a tutto $GL(V)$.

Esercizio 26. Dimostrare che

$$\chi_{\Lambda^d V}(T) = s_{(1,1,\dots,1)}(x) = e_d(x_1, \dots, x_n)$$

Teorema 3.2 (Wedderburn Debole)**.** Dato G un gruppo finito, e W_i le sue rappresentazioni irriducibili, allora

$$\mathbb{C}G \cong \oplus_i \mathrm{End}(W_i)$$

come $\mathbb{C}$ algebre

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione φ come

$$\varphi : \mathbb{C}G \to \oplus_i \mathrm{End}(W_i) \ : \ a \mapsto (\varphi_{a,1}, \dots, \varphi_{a,M})$$

$$\varphi_{a,i} : W_i \to W_i \ : \ w \mapsto aw$$

φ é un omomorfismo di $\mathbb{C}$ algebre. φ é iniettiva, poiché se un elemento a agisce come zero su tutte le rappresentazioni irriducibili di G, allora agisce come zero anche su $\mathbb{C}G$, in quanto quest'ultimo é una somma diretta di rappresentazioni irriducibili, dunque in particolare manda l'identità dell'anello in zero per moltiplicazione, pertanto $a = 0$. Inoltre φ é suriettiva per dimensioni, infatti $\mathbb{C}G$ e $\oplus_i \mathrm{End}(W_i)$ hanno entrambi dimensione la somma delle dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di G al quadrato. □

Notiamo che possiamo rappresentare gli endomorfismi di spazi vettoriali con matrici, dunque si può riscrivere il risultato: se chiamiamo $m_i = \dim W_i$,

$$\mathbb{C}G \cong \oplus_i \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$$

Lemma 3.3. Dato U un $\mathbb{C}G$ modulo destro di dimensione finita, chiamiamo $B = \mathrm{Hom}_G(U, U)$ e $W_c = \mathbb{C}G \cdot c$ un $\mathbb{C}G$ modulo sinistro, dove $c \in \mathbb{C}G$. Allora valgono

1. $$U \otimes_{\mathbb{C}G} W_c \cong Uc \qquad \forall c \in \mathbb{C}G$$

2. Se W_c é un $\mathbb{C}G$ modulo sinistro irriducibile, allora $U \otimes_{\mathbb{C}G} W_c$ é zero, oppure un B modulo irriducibile.

$$\begin{tikzcd}
U \otimes \mathbb{C}G \arrow[r, "\cdot c"] \arrow[d, "\cong"] & U \otimes W_c \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes i"] \arrow[d, "\varphi"] & U \otimes \mathbb{C}G \arrow[d, "\cong"] \\
U \arrow[r, "\cdot c"] & Uc \arrow[r, "i"] & U
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

1. Definiamo la mappa

$$\varphi : U \otimes \mathbb{C}G \cdot c \to Uc \ : \ u \otimes dc \mapsto (ud)c$$

Possiamo dimostrare che é un isomorfismo tramite il lemma dei 5 applicato al diagramma commutativo scritto sopra.[2]

2. Poniamo che anche U sia un $\mathbb{C}G$ modulo irriducibile. Per Schur, avremo che $B = \mathrm{End}_G(U) = \mathbb{C}$, ma le uniche rappresentazioni irriducibili di $\mathbb{C}$ hanno dimensione 1, dunque basta mostrare che

$$\dim(U \otimes_{\mathbb{C}G} W_c) \leq 1$$

Sappiamo che

$$W_c = \mathbb{C}G \cdot c \subseteq \mathbb{C}G \cong \oplus_i \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$$

dove m_i sono le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili di G. W_c é per ipotesi un $\mathbb{C}G$ modulo irriducibile, dunque é un ideale sinistro minimale di $\mathbb{C}G$ visto come somma di matrici, ma un ideale minimale di una somma diretta é contenuto in uno degli addendi, quindi $W_c \subseteq \mathbb{C}^{m \times m}$. Gli ideali sinistri minimali dell'anello delle matrici sono principali, ossia generati da un solo elemento, ma presa $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$, e chiamato V lo spazio generato dalle sue righe, allora l'azione a sinistra di $C^{m\times m}$ su M genera tutte le matrici le cui righe generano un sottospazio di V, pertanto gli ideali minimali saranno in corrispondenza con spazi vettoriali di dimensione 1. Presa $M \in W_c$, questa avrà righe multiple di uno stesso vettore, oppure é zero, e a meno di cambi di base, possiamo supporre che questo vettore sia il vettore di base e_1, pertanto M sarà totalmente nulla a meno della prima colonna. Dato che anche U é irriducibile, ma come modulo destro, allora anche tutte le sue matrici saranno del tipo vw^T, con v fisso, ossia tutte le sue colonne saranno multipli di v. Scrivendolo, avremo che

$$U \cong \big(0 \times 0 \times \cdots \times (vw^T) \times \cdots \times 0\big)$$

$$W_c \cong \big(0 \times 0 \times \cdots \times (ze_1^T) \times \cdots \times 0\big)$$

Dividiamo in due casi: se i due ideali sono su componenti diverse della somma, allora il prodotto tensore dei due é zero, mentre nell'altro caso, con una matrice invertibile e la sua inversa, è sempre possibile

[2] $\mathrm{Id} \otimes i$ é iniettiva perché U é una $\mathbb{C}G$ rappresentazione.

portare contemporaneamente la matrice della seconda componente ad un E_{11}, ossia la matrice zero con un 1 nella posizione $(1,1)$, e la prima componente ad una matrice γE_{11}, con $\gamma \in \mathbb{C}$

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W_c \cong (0 \times \cdots \times \gamma E_{11} \times \cdots \times 0) \otimes_{\mathbb{C}G} (0 \times \cdots \times E_{11} \times \cdots \times 0)$$

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W_c \cong \mathbb{C}$$

Questo ci dice che il prodotto tensore ha dimensione al massimo 1, e conclude il caso U irriducibile.

Nel caso generale, U si spezza in irriducibili U_i con molteplicità n_i, dunque

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W_c \cong \oplus_i (U_i \otimes W_c)^{n_i}$$

ognuno di questi addendi, come nel caso precedente, é zero oppure $\mathbb{C}$, ma due U_i che sono contenuti nella stessa algebra di matrici sono isomorfi poiché si possono riportare alle matrici $e_1 w^T$, dunque c'è al massimo un addendo diverso da zero. Se ce n'è almeno uno, allora

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W_c \cong (U_i \otimes W_c)^{n_i} \cong \mathbb{C}^{n_i}$$

e questo é un B modulo irriducibile perché

$$B = \mathrm{End}_G(U) = \oplus_i \mathrm{End}_G(U_i^{n_i}) \cong \oplus_i \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$$

e $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ agisce transitivamente su $\mathbb{C}^{n_i}$.

□

Ricordiamo che gli S_n moduli irriducibili sono i moduli di Specht $S^\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot C_t^- R_t^+$. Enunciamo dunque un lemma applicabile a S_n.

Lemma 3.4. Se $W_i = \mathbb{C}G \cdot c_i$ sono tutti i $\mathbb{C}G$ moduli sinistri irriducibili, e B, U sono come sopra, allora

$$U \cong \oplus_i (Uc_i)^{\dim W_i}$$

é un isomorfismo di B moduli sinistri, e Uc_i sono B moduli irriducibili o nulli.

Dimostrazione.

$$U \cong U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \cong U \otimes_{\mathbb{C}G} \left(\oplus_i W_i^{\dim W_i}\right) \cong \oplus_i (U \otimes_{\mathbb{C}G} W_i)^{\dim W_i}$$

$$\cong \oplus_i (U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \cdot c_i)^{\dim W_i} \cong \oplus_i (Uc_i)^{\dim W_i}$$

e sappiamo dal risultato precedente che $U \otimes_{\mathbb{C}G} W_i = Uc_i$ sono B moduli irriducibili o nulli. □

Applichiamo dunque i risultati a $G = S_d$ e $U = V^{\otimes d}$: otteniamo

$$V^{\otimes d} \cong \oplus_\lambda \left(V^{\otimes d} c_\lambda\right)^{\dim S^\lambda} \cong \oplus_\lambda \left(S_\lambda V\right)^{\dim S^\lambda}$$

dove $S_\lambda V$ sono zero o B moduli irriducibili, e

$$B = \mathrm{End}_{S_d}(V^{\otimes d})$$

Per concludere, vorremmo dire che $S_\lambda V$ sono distinti se diversi da zero, e sono rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$.

Teorema 3.5. Se poniamo $k = \dim V$, allora

1. Preso $g \in GL(V)$ e $x_1, \dots, x_k$ i suoi autovalori generalizzati, allora
$$\chi_{S_\lambda V}(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_k)$$
2. Se $l(\lambda) > k$, allora $S_\lambda V = 0$. Altrimenti,
$$\dim(S_\lambda V) = \prod_{i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$
3. Al variare di λ con $l(\lambda) \leq k$, $S_\lambda V$ sono rappresentazioni non zero e distinte tra loro.

Weyl Tutte le rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$ di dimensione finita sono le $S_\lambda V$ e le $S_\lambda V \otimes \Lambda^n V$. Inoltre tutte le rappresentazioni di dimensione finita di $GL(V)$ si spezzano in somma di irriducibili.

Dimostrazione. Dimostriamo solo i primi 3 punti.

1. Ricordiamo che
$$\mathbb{C}S_d \cdot R_t^+ = \mathrm{Ind}_{S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_k}}^{S_d} \textit{banale} = M^\lambda = \oplus_{\mu \succeq \lambda} k_{\mu\lambda} S^\mu$$
Da questo, possiamo calcolare
$$V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} M^\lambda \cong \oplus_{\mu \succeq \lambda} \left(V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} S^\mu\right)^{k_{\mu\lambda}} \cong \oplus_{\mu \succeq \lambda} \left(S_\mu V\right)^{k_{\mu\lambda}}$$
$$V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} M^\lambda \cong V^{\otimes d} R_t^+ \cong V^{\otimes \lambda_1} R_{\lambda_1}^+ \otimes V^{\otimes \lambda_2} R_{\lambda_2}^+ \otimes \dots$$
$$\cong \mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \dots$$
da cui, passando alle tracce, otteniamo
$$\sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\mu\lambda} \chi_{S_\mu V}(g) = \prod_i \chi_{\mathrm{Sym}^{\lambda_i} V}(g) =$$
$$= h_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\mu \succeq \lambda} k_{\mu\lambda} s_\mu(x_1, \dots, x_k)$$
Se ora ragioniamo per induzione su λ, ricaviamo che $s_\mu(x_1, \dots, x_k) = \chi_{S_\mu V}(g)$.

2. Dal punto precedente,

$$\dim(S_\lambda V) = \chi_{S_\lambda V}(\mathrm{Id}) = s_\lambda(1,1,\dots,1)$$

Nel caso $l(\lambda) > k$, per Jacobi-Trudi sappiamo che $s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})$, ma $\lambda'_1 = l(\lambda) > k$ dunque $\lambda'_1 - 1 + j \geq k + j$ e sappiamo che $e_{k+j}(x_1, \dots, x_k) = 0$ per ogni $j > 0$. La matrice ha pertanto la prima riga nulla, e il suo determinante é infine zero.

Mettiamoci nel caso $l(\lambda) \leq k$. Da definizione,

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{a_{\lambda+\delta}(x_1, \dots, x_k)}{a_\delta(x_1, \dots, x_k)} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + k - j})}{\det(x_i^{k-j})}$$

e poniamo che $x_i = x^{i-1}$ per ogni i. Otteniamo

$$s_\lambda(1, x, \dots, x^{k-1}) = \frac{\det(x^{(i-1)(\lambda_j + k - j)})}{\det(x^{(i-1)(k-j)})}$$

Le matrici sono ora di Van der Monde relative agli elementi $x^{\lambda_j + k - j}$ e x^{k-j}, dunque sappiamo calcolarne il determinante

$$s_\lambda(1, x, \dots, x^{k-1}) = \frac{\prod_{i<j}(x^{\lambda_j + k - j} - x^{\lambda_i + k - i})}{\prod_{i<j}(x^{k-j} - x^{k-i})}$$

$$= \prod_{i<j} \frac{x^{k-j}(x^{\lambda_j} - x^{\lambda_i + j - i})}{x^{k-j}(1 - x^{j-i})} = \prod_{i<j} x^{\lambda_j} \frac{1 - x^{\lambda_i - \lambda_j + j - i}}{1 - x^{j-i}}$$

Adesso vorremmo valutare in $x = 1$, ma il denominatore va a zero, dunque facciamo invece un limite per $x \to 1$. Otteniamo una forma indeterminata, che riusciamo a risolvere attraverso De L'Hopital:

$$s_\lambda(1, \dots, 1) = \lim_{x \to 1} \prod_{i<j} x^{\lambda_j} \frac{1 - x^{\lambda_i - \lambda_j + j - i}}{1 - x^{j-i}} = \prod_{i<j\leq k} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$

3. Dai punti sopra, sappiamo che le dimensioni delle rappresentazioni sono diverse da zero, e le loro tracce sono le funzioni di Schur, dunque sono anche distinte tra loro.

□

Dato M un B modulo, possiamo immergere $\mathrm{End}(V) \hookrightarrow B$ mandando φ nell'elemento $\varphi \otimes \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi$, e se N sottospazio di M é B invariante, allora sicuramente é anche $\mathrm{End}(V)$ invariante. Vorremmo dire il contrario, che porterebbe a

$$M \text{ irriducibile per } B \iff M \text{ irriducibile per } \mathrm{End}(V)$$

Inoltre, dato che $GL(V)$ é denso in $\mathrm{End}(V)$, otterremo anche che

$$M \text{ irriducibile per } B \iff M \text{ irriducibile per } GL(V)$$

mostrando che gli $S_\lambda V$ sono irriducibili per $GL(V)$.

Lemma 3.6. Dato W uno spazio vettoriale di dimensione finita, allora $\mathrm{Sym}^d W$ é generato come spazio vettoriale da elementi del tipo w^d con $w \in W$.

Dimostrazione. Prendiamo $\varphi : \mathrm{Sym}^d W \to \mathbb{C}$ lineare che si annulli sui w^d. Siano w_i vettori di base di W, e $v \in W$. Avremo che $v = \sum_i x_i w_i$ e che $\varphi(v^d) = 0$, da cui

$$0 = \varphi(v^d) = \varphi\left(\left(\sum_i x_i w_i\right)^d\right) = \sum_{|\alpha|=d} x^\alpha \varphi(w^\alpha)$$

ma dato che questo deve valere per ogni scelta dei x_i, otteniamo che φ si annulla sui w^α, che sono una base di $\mathrm{Sym}^d W$. Questo implica che i vettori del tipo v^d generano $\mathrm{Sym}^d W$. $\square$

Lemma 3.7. $B = \mathrm{End}_{s_d}(V^{\otimes d})$ é generato da elementi del tipo $\varphi\otimes\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi$ dove $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Dimostrazione.

$$\mathrm{End}(V^{\otimes d}) \cong (V^{\otimes d})^* \otimes (V^{\otimes d}) \cong (V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} \cong (V^* \otimes V)^{\otimes d} \cong \mathrm{End}(V)^{\otimes d}$$

$$B = \mathrm{End}_{s_d}(V^{\otimes d}) \cong \mathrm{End}(V^{\otimes d})^{S_d} \cong (\mathrm{End}(V)^{\otimes d})^{S_d} \cong \mathrm{Sym}^d(\mathrm{End}(V))$$

e quest'ultimo é generato da elementi del tipo $\varphi\otimes\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi$ dove $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ per lemma precedente. $\square$

Lemma 3.8. Vale la seguente congruenza di $GL(V)$ moduli

$$V^{\otimes d} \cong \oplus_{\lambda \dashv d} (S_\lambda V)^{\dim S^\lambda}$$

ed inoltre $S_\lambda V$ sono $GL(V)$ moduli irriducibili.

Dimostrazione. Dato che B é generato da elementi di $\mathrm{End}(V)$ come spazio vettoriale, allora una rappresentazione irriducibile per B lo é anche per $\mathrm{End}(V)$, e per densità anche per $GL(V)$, dunque gli $S_\lambda V$ sono $GL(V)$ moduli irriducibili. A questo punto, la congruenza della tesi, che già sapevamo valere per B moduli, vale anche per $GL(V)$ moduli. $\square$

La decomposizione di moduli irriducibili di dimensione finita in irriducibile non vale soltanto per $GL(V)$, ma anche per molte algebre di Lie semisemplici come $SL(V)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ e altre.

Esempio 48. Calcoliamo $W = S_\lambda V \otimes S_\mu V$ con $|\lambda| = n$ e $|\mu| = m$.

$$W = (V^{\otimes n} c_\lambda) \otimes (V^{\otimes m} c_\mu) \cong (V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m})(c_\lambda \times c_\mu) = V^{\otimes(n+m)} c$$

quindi per ottenere una scomposizione di W dobbiamo cercarla in $V^{\otimes(n+m)}$, ossia ottenere

$$\chi_W = \sum_{\nu \dashv (n+m)} N^\nu_{\lambda\mu} \chi_{S_\nu V} = \chi_{S_\lambda V} \chi_{S_\mu V} = s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \dashv (n+m)} N^\nu_{\lambda\mu} s_\mu$$

ma noi abbiamo già visto una formula simile: in particolare sappiamo che $N^\nu_{\lambda\mu}$ sono i numeri di Littlewood-Richardson.

3.1.1 Gruppi di Riflessioni Complessi

Dato V un $\mathbb{C}$ spazio vettoriale di dimensione finita, allora diremo che G sottogruppo finito di $GL(V)$ é un **CRG**(Complex Reflection Group) se é generato da riflessioni, dove un elemento $s \in GL(V)$ é una riflessione se ha ordine finito e i suoi punti fissi formano un iperpiano di V. Notiamo che scegliendo bene la base, s si può rappresentare con una matrice diagonale, con tutti gli autovalori pari a 1, tranne uno pari a z, radice complessa dell'unità di un qualche ordine finito.

Vorremmo in un qualche modo classificare questi gruppi. Grazie a Shephard-Todd, dal 1944 sappiamo che appartengono alla famiglia infinita $G(r,p,n)$ con r,p,n interi positivi e $p|r$, oppure sono uno dei 34 casi eccezionali documentati, tra cui compaiono gruppi di Weyl, Lie, etc. I gruppi del tipo $G(r,p,n)$ sono prodotti semidiretti $\mathbb{T}_{r,p} \rtimes S_n$, dove un loro singolo elemento é $g = ((z^{a_1}, z^{a_2}, \dots, z^{a_n}), \sigma)$, con z radice primitiva di ordine r dell'unità, $\sum a_i = 0 \pmod p$, e che agisce su un elemento di base $v_i \in V$ come $gv_i = z^{a_i} v_{\sigma(i)}$.

Nel caso $p = 1$, il gruppo diviene $G(r,1,n) = (\mathbb{Z}_r)^n \rtimes S_n$, chiamato *Full Monomial Group* o anche più in generale *Wreath Product*. Un altro modo di vederlo é come il sottogruppo di $GL(\mathbb{C}^n)$ i cui elementi sono le applicazioni lineari $g(\sigma,\varepsilon)$, dove $\sigma \in S_n$, ϵ é una qualsiasi funzione da $\{1,\dots,n\}$ a $\{1, z, \dots, z^{r-1}\}$, ed agisce su un elemento della base e_i come sopra: $g(\sigma,\varepsilon)e_i = \varepsilon(i) e_{\sigma(i)}$. Gli iperpiani fissati dalle riflessioni di questo gruppo sono tutti e soli quelli del tipo

$$H_i = \{ x_i = 0 \} \qquad \text{o} \qquad H_{ij}(\alpha) = \{ x_i - z^\alpha x_j = 0 \}$$

Inoltre, il gruppo $G(2,1,n) = (\mathbb{Z}_2)^n \rtimes S_n$ viene anche chiamato B_n, il gruppo iperottaedrale.

Sia V come sopra (in realtà ciò che diremo funziona su qualsiasi campo $\mathbb{K}$ a caratteristica zero). Chiamiamo

$$S = S(V^*) := \mathrm{Sym}(V^*) = \oplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^i(V^*) \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

dove x_i sono una base di V^*. Dato G un gruppo che agisce su V, questo agisce naturalmente anche su V^*, dove $g \in G$, $\varphi \in V^* \implies (g\varphi)(\cdot) = \varphi(g^{-1}\cdot)$. Questo porta G ad agire su S per estensione, ma dato che agisce in maniera lineare sulle variabili, allora ogni elemento di G é un automorfismo di S che mantiene il grado.

Se $G = S_n$, allora S^G, ossia gli invarianti, sono i polinomi simmetrici, ossia $\mathbb{K}[e_1, \ldots, e_n]$, mentre se $G = B_n$ allora $S^G = \mathbb{K}[\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n]$, dove gli $\overline{e}_i$ sono

$$\overline{e}_k = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_k}^2$$

Ci possiamo chiedere quando accade in generale che i fissati formino un'algebra di polinomi. Prima abbiamo però bisogno di ripassare dei concetti di estensioni di campi.

Se $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é un'algebra di polinomi[3], chiamiamo $Q(S) = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ il suo campo dei quozienti. Sappiamo che l'estensione di campi ${}^{Q(S)}\!/_{\mathbb{C}}$ ha gradi di trascendenza n, ed inoltre che l'estensione ${}^{Q(S)}\!/_{Q(S)^G}$ é un'estensione finita di Galois, poiché é il campo di spezzamento del polinomio

$$p(t) = p_{x_1}(t)p_{x_2}(t)\ldots p_{x_n}(t) \qquad p_{x_i}(t) = \prod_{g \in G}(t - gx_i)$$

dove ogni $p_{x_i}(t)$ é a coefficienti in $Q(S)^G$, e $p(t)$ si spezza completamente in $Q(S)$, ma $x_1, \ldots, x_n$ appartengono al campo di spezzamento di $p(t)$, dunque questo deve essere proprio $Q(S)$. Dato che l'estensione ${}^{Q(S)}\!/_{Q(S)^G}$ é algebrica, allora ${}^{Q(S)^G}\!/_{\mathbb{C}}$ avrà grado di trascendenza n.

Lemma 3.9. Se chiamiamo $S^G = R$, allora

$$Q(S)^G = Q(R)$$

Dimostrazione. Presi $f_1, f_2 \in R$, con $f_2 \neq 0$, allora ${}^{f_1}\!/_{f_2} \in Q(R) \subseteq Q(S)$, ma dato che f_1, f_2 sono invarianti per azione di G, anche la frazione lo sarà, dunque $Q(R) \subseteq Q(S)^G$.

Per mostrare l'altro contenimento, prendiamo ${}^{p}\!/_{q} \in Q(S)^G$. Se $p = 0$, allora appartiene anche a $Q(R)$. Altrimenti, riscriviamo

$$\frac{p}{q} = \frac{\prod_{g \in G} g(p)}{q \prod_{\mathrm{Id} \neq g \in G} g(p)}$$

[3]Ossia $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ con le variabili algebricamente indipendenti.

e notiamo che il numeratore é invariante per azione di G, ossia sta in R. Inoltre, anche tutta la frazione deve restare invariata per azione di G, dunque anche il denominatore sta in R, concludendo la dimostrazione. $\square$

Corollario 3.10. Se $R = S^G$ é un'algebra polinomiale, allora ha tante variabili quanto il grado di trascendenza di $Q(S)$.

Dimostrazione.
$$Q(R) = \mathbb{C}(y_1, \dots, y_m) = Q(S)^G$$
$Q(S)$ é algebrico su $Q(S)^G$, dunque $Q(S)$ ha grado di trascendenza m. $\square$

Chiamiamo ora $val_0 : R \to \mathbb{C}$ la valutazione in zero, ossia vediamo R come i polinomi invarianti dentro S, e li valutiamo nell'origine. Chiamiamo $R_+ = \ker(val_0)$, e I l'ideale esteso $I = R_+S \subseteq S$.[4]

Dato che l'azione di G preserva il grado dei polinomi, allora preso $f \in R$, tutte le sue parti omogenee saranno contenute in R.

Proposizione 3.11. Se $f_1, \dots, f_r \in R$ sono polinomi omogenei, non costanti, che generano I in S, allora $f_1, \dots, f_r$ sono dei generatori di R come $\mathbb{C}$ algebra.

Dimostrazione. Sia $f \in R$ omogeneo di grado d. Dimostriamo per induzione sul grado che $f \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_r]$. Se f é una costante, va bene, dunque poniamo $d > 0$. In questo caso $f \in R_+ \subseteq I$, dunque $f = h_1f_1 + \cdots + h_rf_r$ con gli h_i in S. Dato che f e gli f_i sono omogenei, allora possiamo prendere anche gli h_i omogenei, e visto che $f \in R$, allora

$$f = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gf = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gh_1)f_1 + \cdots + (gh_r)f_r = h_{1\#}f_1 + \cdots + h_{r\#}f_r$$

$$h_{i\#} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gh_i \in R$$

Dato che gli $h_{i\#}$ sono omogenei, in R, ed hanno grado minore di f, possiamo usare l'ipotesi induttiva che appartengono a $C[f_1, \dots, f_r]$, così anche f vi appartiene. $\square$

Lemma 3.12. Sia $l \in S$ omogeneo di grado 1 (ossia un elemento di V^*). Se il kernel di l é incluso negli zeri di $f \in S$, visti su V, allora esiste $g \in S$ per cui $f = l \cdot g$

Dimostrazione. [5] Scriviamo $l = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ con $a_n \neq 0$. Possiamo operare la divisione euclidea di f per l rispetto a x_n, e ottenere $f = lg + r$,

[4] anche se $g(0) = 0$, per $g \in S$, non é detto che stia in I

[5] Per chi conosce un po' di geometria algebrica: $V(l) \subseteq V(f) \implies \sqrt{(f)} \subseteq (l) \implies l|f$.

dove la variabile x_n non appare in r. Se $r \neq 0$, allora esiste almeno un punto $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1})$ su cui r non si annulla per ogni x_n, ma

$$l(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1}, x_n) = a_1\overline{x}_1 + \cdots + a_{n-1}\overline{x}_{n-1} + a_n x_n$$

si annulla per un certo valore $\overline{x}_n$, dunque f non si annulla su $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$, ma l sì, il che é assurdo per ipotesi. Pertanto $r = 0$. □

Lemma 3.13. Se $f_1, \dots, f_r \in R$ sono polinomi omogenei, tali che $f_1 \notin (f_2, \dots, f_r)_R$, e siano $g_i \in S$ tali che $g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r = 0$. Se G é generato da riflessioni, allora $g_1 \in I = R_+ S$.

Dimostrazione. Osserviamo che $f_1 \notin (f_2, \dots, f_r)_S$, poiché se ci fossero h_i in S per cui $f_1 = h_2 f_2 + \cdots + h_r f_r$, allora come sopra, riusciamo a trovare $f_1 = h_{2\#} f_2 + \cdots + h_{r\#} f_r$ con $h_{i\#} \in R$. Dimostriamo dunque il lemma per induzione su $d = \deg(g_1)$. Se $g_1 = 0$, ok. Se $d = 0$, allora g_i é una costante, ma vorrebbe dire che $f_1 \in (f_2, \dots, f_r)_S$, assurdo.

Poniamo dunque $d > 0$, e consideriamo g_1 omogeneo(se non lo fosse, lo spezziamo in componenti omogenee e lo facciamo per ogni componente) prendiamo $s \in G$ una riflessione con H iperpiano fissato da s, e prendiamo $l \in S$ omogeneo di grado 1 che abbia per kernel H. Preso ora $f = sg_1 - g_1$, e $v \in H$, allora

$$f(v) = g_1(s^{-1}v) - g_1(v) = g_1(v) - g_1(v) = 0$$

da cui H é incluso negli zeri di f. Per lemma precedente, allora $sg_1 - g_1 = lh_1$ per qualche $h_1 \in S$. Questo discorso si può ripetere per ogni g_i e per ogni s, ottenendo $sg_i - g_i = lh_i$. Avremo

$$0 = s(g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r) - g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r = l(h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r)$$

$$\implies h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r = 0$$

Ma ora il grado di h_1 é minore strettamente del grado di g_1, pertanto posso applicare l'ipotesi induttiva e dire che $h_1 \in I$, ma allora $sg_1 - g_1 \in I$. Presa un'altra riflessione $t \in G$, avremo che $tsg_1 \equiv tg_1 \equiv g_1 \pmod I$, ma dato che G é generato da riflessioni, allora per ogni $w \in G$ si ha $wg_1 - g_1 \in I$. Da ciò,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} wg_1 \equiv g_1 \pmod I$$

con il primo elemento che appartiene a R in quanto é invariante, e dato che é omogeneo non costante, allora appartiene a $R_+ \subseteq I$, da cui $g_1 \in I$. □

Teorema 3.14 (Chevalley-Shephard-Todd)**.** Dato V come sopra, G un sottogruppo finito di $GL(V)$, e $R = S^G$, allora sono equivalenti

1. R é isomorfo a una $\mathbb{C}$ algebra di polinomi di dimensione pari a $\dim(V)$.

2. S é un R modulo libero

3. G é generato da riflessioni

Dimostrazione. Dimostriamo ($3 \implies 1$). Siano $f_1, \dots, f_r$ un insieme minimale di generatori omogenei di I in R [6]. Vogliamo mostrare che sono algebricamente indipendenti. Poniamo per assurdo esista un polinomio $h \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_r]$ non nullo per cui $h(f_1, \dots, f_r) = 0$. Vedendo f_i come polinomi nelle variabili x_k, possiamo derivare h e ottenere

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} h(f_1, \dots, f_r) = \sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad \forall\, k \qquad h_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \dots, f_r)$$

Chiamato J l'ideale generato in S dagli $h_i(\overline{f})$, sappiamo che, a meno di riordinare, i primi m sono un insieme minimale di generatori di J, dunque possiamo scrivere gli altri in relazione ai primi

$$h_j = \sum_{i=1}^{m} g_{ij} h_i \qquad \forall\, j > m$$

e ottenere dunque

$$0 = \sum_{i=1}^{m} h_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j>m} g_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) \quad \forall\, k$$

Per la minimalità, sappiamo che $h_1 \notin (h_2, \dots, h_m)$. Notiamo inoltre che $h_i(f_1, \dots, f_r) \in R$, poiché R é un anello, e sono omogenee, dunque siamo nelle ipotesi del lemma precedente, da cui

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j>m} g_{1j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \in I \implies \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j>m} g_{1j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = f_1 q_1 + \cdots + f_r q_r \quad q_i \in S$$

Dalla identità di Eulero, chiamiamo $d_i = \deg(f_i)$, moltiplichiamo per x_k e sommiamo su k, ottenendo

$$d_1 f_1 + \sum_{j>m} g_{1j} d_j f_j =$$

$$\sum_k x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j>m} g_{1j} \sum_k x_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} =$$

$$f_1 \sum_k x_k q_1 + \cdots + f_r \sum_k x_k q_r$$

[6] Si riescono a trovare perché I é finitamente generato da g_i elementi di S, ma dato che $I = R_+ S$, ognuno di essi si scrive in relazione a finiti elementi di R_+, e questi ultimi si possono spezzare in parti omogenee.

ma ora $d_1 f_1$ é omogeneo di grado d_1, mentre $f_1 \sum_k x_k q_1$ ha grado strettamente maggiore, dunque spezzando la formula a seconda del grado, si ottiene che $f_1 \in (f_2, \ldots, f_r)$, che é assurdo per minimalità. Da questo, concludiamo che gli f_i sono algebricamente indipendenti. Infine, per il corollario 3.10 sopra, $r = n$. $\square$

Esempio 49. Nel caso $V = \mathbb{C}^2$, $G = \{ \mathrm{Id}, -\mathrm{Id} \}$, allora $S^G = \mathbb{C}[x^2, xy, y^2]$, che non é un'algebra di polinomi. Difatti, $-\mathrm{Id}$ non é una riflessione, avendo come punto fisso solo lo zero, dunque G non può essere generato da riflessioni.