Appunti Schemi

Barbarino Giovanni

21 novembre 2015

Indice

1 Prerequisiti

Tutti gli anelli che utilizzeremo saranno commutativi con identità, dunque gli omomorfismi di anelli avranno la proprietà di mandare 1 in 1.
Diamo ora alcune definizioni e risultati di base di topologia, geometria algebrica e algebra commutativa.

1.1 Topologia

Lemma 1.1 *Dato X spazio topologico, $X = \cup U_i$ un ricoprimento di aperti, e $p \in X$, allora*

$$\overline{\{p\}} = \bigcup \overline{\{p\}}^{U_i} \qquad \overline{\{p\}}^{U_i} = \overline{\{p\}} \cap U_i$$

Dimostrazione. Dato che U_i è un ricoprimento di X, allora la seconda tesi implica la prima. sicuramente sappiamo che la chiusura di p in U_i è contenuta nella chiusura di p, ma è anche uguale poiché altrimenti esisterebbe un altro chiuso in X contenente p e contenuto strettamente in $\overline{\{p\}}$. □

Definition 1.2. Uno spazio topologico X è detto **Irriducibile** se vale, equivalentemente, una delle seguenti:

- X non è unione di chiusi propri.
- Ogni coppia di aperti propri ha intersezione non vuota.

Warning L'insieme vuoto NON è irriducibile.

Lemma 1.3 *Le due definizioni di irriducibile sono equivalenti*

Dimostrazione. Si procede per assurdo in entrambe le direzioni, prendendo i complementari degli insiemi. □

Lemma 1.4 *Ogni spazio irriducibile è connesso*

Lemma 1.5 *Dato X uno spazio topologico, e $Y \subseteq X$ un sottospazio, allora*

- *Se Y è aperto in X, e C è un chiuso irriducibile di X, allora $C \cap Y$ è un chiuso irriducibile di Y*
- *Se $C \subseteq Y$ è chiuso e irriducibile in Y, allora la sua chiusura in X è chiusa e irriducibile*

Definition 1.6. Una **Componente Irriducibile** di uno spazio topologico X è un sottospazio irriducibile, massimale per inclusione.

Lemma 1.7 *Una componente irriducibile di uno spazio topologico è chiusa*

Dimostrazione. Data $C \subseteq X$ componente irriducibile, sia $D = \overline{C}$ la sua chiusura. Otteniamo che anche D è irriducibile, perché C è denso in D, pertanto due aperti disgiunti in D inducono due aperti disgiunti in C. Ma C è massimale per inclusione, dunque $C = D$, ossia, C è chiusa. □

Lemma 1.8 *Data C componente connessa di X, e U un aperto di X non contenuto in C, allora $U \cap C$ è una componente irriducibile di U*

Lemma 1.9 *Se C_1 e C_2 sono due componenti connesse di X, e $p \in C_1 \cap C_2$, allora preso U intorno di p, esso non è contenuto in C_1 o C_2*

Lemma 1.10 *Se uno spazio X ha finite componenti irriducibili X_i, allora*

$$U \subseteq X \text{ aperto} \iff U \cap X_i \text{ aperto in } X_i \ \forall\, i$$

Definition 1.11. Una funzione $f : X \to Y$ tra spazi topologici, è detta **Embedding** se induce un omeomorfismo tra X e l'immagine di f. Si dice **Embedding Chiuso/Aperto**, se $Imm(f)$ è chiuso/aperto in Y chiusa/aperta.

Lemma 1.12 *Un embedding f è continuo e iniettivo. Inoltre è un embedding aperto/chiuso se e solo se è aperto/chiuso come funzione.*

Definition 1.13. Uno spazio topologico X è detto **Localmente Compatto** se ogni punto ammette un intorno compatto

Lemma 1.14 *Se X è uno spazio topologico T2, allora sono equivalenti*

- *X è localmente compatto*
- *Ogni punto di X ha un intorno compatto e chiuso*
- *Ogni punto di X ha un intorno relativamente compatto*
- *Ogni punto di X ha un sistema di intorni compatti*

1.2 Algebra Commutativa

Lemma 1.15 *Dato un anello A, allora ogni suo primo minimale P è contenuto nei divisori di zero dell'anello*

Dimostrazione. L'anello A_P è artiniano e locale, e gli elementi di PA_P sono nilpotenti in esso. Pertanto

$$a \in P \implies \frac{a^n}{1} = \frac{0}{1} \implies \exists s \notin P : a^n s = 0 \implies a \in D(A)$$

Dunque P è contenuto nei divisori di zero di A. □

Lemma 1.16 *Dato un anello A, e due primi minimali distinti P_1 e P_2, esistono $a \in P_1$, $b \in P_2$ non zero tali che $ab = 0$*

Dimostrazione. Se $ab = 0$ e sono non nulli, allora (WLOG) $a \in P_1$. Se $b \in P_2$, abbiamo finito, altrimenti $a \in P_1 \cap P_2$. Ripetendo per tutti i divisori di zero, e dato che P_i sono contenuti nei divisori di zero per Lemma 1.15, otteniamo

$$P_1 \cap D(A) = P_2 \cap D(A) = P_1 = P_2 \qquad ↯$$

□

Definition 1.17. Un anello si dice **Noetheriano** se tutti gli ideali sono generati da un numero finito di elementi

Theorem 1.18 *Dato A anello allora sono equivalenti:*

- *A è Noetheriano.*
- *Ogni catena ascendente di ideali è stazionaria.*
- *Ogni ideale primo è finitamente generato.*

Theorem 1.19 *Se A è un anello noetheriano, tutti i suoi localizzati e i suoi quozienti sono Noetheriani. Inoltre ogni A-algebra finitamente generata è noetheriana.*

Definition 1.20. Un anello si dice **Artiniano** se ogni catena discendente di ideali è stazionaria

Lemma 1.21 *Dato $\mathbb{K}$ un campo, una $\mathbb{K}$ algebra finita M (ossia finitamente generata come $\mathbb{K}$ modulo) è un anello artiniano*

Dimostrazione. M è uno spazio vettoriale finitamente generato, e i suoi ideali sono sottospazi vettoriali, dunque ogni catena discendente di ideali è stazionaria. □

Theorem 1.22 *Dato un anello A, allora*

$$A \text{ artiniano } \iff A \text{ noetheriano di dimensione zero}$$

Lemma 1.23 *Se A è un anello artiniano, allora*

- *ogni ideale primo è massimale (dimensione 0)*
- *ha finiti ideli massimali*
- *è somma diretta di finiti artiniani locali*
- *tutti gli elementi sono divisori di zero o invertibili*
- *se è locale, allora $A \twoheadrightarrow S^{-1}A$ per ogni S moltiplicativamente chiuso*

Definition 1.24. Dato un anello A, (o un modulo M su A), e una proprietà P, diciamo che è una **proprietà locale** se sono equivalenti le seguenti

- P è vera
- P è vera nei localizzati $A_p(M_p)$ per ogni primo p
- P è vera nei localizzati $A_m(M_m)$ per ogni massimale m

Lemma 1.25 *Dato $a \in A$, essere zero è una proprietà locale.*

Dimostrazione. Se a è zero, lo è in tutti i localizzati, in particolare nei localizzati per gli ideali massimali. Ponendo a_M zero per ogni ideale massimale M, sia $I = Ann(a)$. Se $a \neq 0$, allora $I \neq A$, ed esiste un ideale massimale $I \subseteq M$, ma $a_M = 0$ se e solo se esiste $b \notin M : ba = 0$, e $b \in I \subseteq M$, assurdo. □

Lemma 1.26 *Siano A, B anelli, con $\varphi : A \to B$ un omomorfismo, e p, q ideali primi rispettivamente di A e B. Se $\psi : A_p \to B_q$ è un omomorfismo tale che $\psi^{-1}[q] = [p]$, e che renda commutativo il diagramma, allora $\varphi^{-1}(q) = p$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \arrow[d, "\eta_B"] \\ A_p \arrow[r, dashed, "\psi"] & B_q \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. $\eta_B^{-1}[q] = q$ e $\eta_A^{-1}[p] = p$, dunque

$$\psi\eta_A(p) \subseteq \psi[p] = [q] \implies \eta_B\varphi(p) \subseteq [q] \implies \varphi(p) \subseteq q \implies p \subseteq \varphi^{-1}(q)$$

Se per assurdo esistesse $x \in \varphi^{-1}(q)/p$, allora $\eta_A(x)$ sarebbe invertibile, ma

$$[q] \supseteq \eta_B(q) \ni \eta_B\varphi(x) = \psi\eta_A(x) \in B_q^* = B_q - [q]$$

assurdo. □

Definition 1.27. Un **Anello Graduato** è un anello B, scrivibile come somma diretta

$$B = \cdots \oplus B_{-2} \oplus B_{-1} \oplus B_0 \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$$

dove B_i sono gruppi, e hanno la proprietà che

$$B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j} \;\; \forall\, i,j$$

Lemma 1.28 *Dato B anello graduato, B_0 è un sottoanello, e contiene gli invertibili di B.*

Definition 1.29. Dati due anelli $A \subseteq B$, $x \in B$ si dice **Intero** su A se esiste un polinomio monico a coefficienti in A che annulla x. B si dice una **Estensione Intera** di A se tutti gli elementi di B sono interi su A

Lemma 1.30 *Dati $A \subseteq B$ anelli, allora*

$$\overline{A}^B = \{\, x \in B \mid x \text{ intero su } A \,\}$$

è un anello intero su A, e viene chiamato la ***Chiusura Intera*** *di A su B*

Lemma 1.31 *Dato A dominio, K il suo anello di frazioni, e L/K estensione finita separabile, allora*

$$\forall x \in L \;\; \exists a \in A - \{0\} \quad : \quad ax \in \overline{A}^L$$

Dimostrazione. $x \in L$ è algebrico su K, dunque esiste un polinomio a coefficienti su K che si annulla su x. Se moltiplichiamo per i denominatori, troviamo un polinomio a coefficienti non monico in A

$$p(x) = b_n x^n + \sum_{i<n} b_i x^i = 0$$

ma moltiplicando per b_n^{n-1}, otteniamo

$$(b_n x)^n + \sum_{i<n} b_i b_n^{n-1-i} (b_n x)^i = 0$$

dunque $b_n x$ è intero su A, e $b_n \neq 0$. □

Definition 1.32. Un anello A è **Chiuso Integralmente** in B se coincide con la sua chiusura intera su B

Theorem 1.33 (Lying Over) *Data $A \subseteq B$ un'estensione intera di anelli, per ogni $p \subseteq A$ ideale primo, esiste $q \in B$ per cui $q \cap A = p$*

Theorem 1.34 (Going Up) *Data $A \subseteq B$ un'estensione intera di anelli, $p_0 \subseteq p_1$ due ideali primi in A, e q_0 primo in B per cui $q_0 \cap A = p_0$, allora esiste q_1 primo in B per cui*

$$q_0 \subseteq q_1 \qquad q_1 \cap A = p_1$$

Theorem 1.35 (Going Down) *Data $A \subseteq B$ un'estensione intera di domini, con A integralmente chiuso in $Q(A)$, siano $p_0 \subseteq p_1$ due ideali primi in A, e q_1 primo in B per cui $q_1 \cap A = p_1$, allora esiste q_0 primo in B per cui*

$$q_0 \subseteq q_1 \qquad q_0 \cap A = p_0$$

Definition 1.36. Dato A un anello, la sua **Dimensione di Krull** è definita come

$$\boldsymbol{dim(A)} = \sup \{\, n \mid \exists \;\; p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n \text{ primi} \,\}$$

Warning D'ora in poi, la dimensione di un anello sarà la sua dimensione di Krull.

Definition 1.37. Dato un primo p di un anello A, la sua **Altezza** è la dimensione di A_p

Lemma 1.38 *Sia S un dominio e $\mathbb{K}$ algebra finitamente generata di dimensione n. Se p un primo di altezza 1, allora*

$$\dim {}^{S}\!/_{p} = n - 1$$

Inoltre tutti gli ideali massimali hanno la stessa altezza

Lemma 1.39 *In un anello noetheriano ogni primo strettamente contenuto in un ideale principale ha altezza 0.*

Theorem 1.40 *In un anello locale noetheriano (A, m), la dimensione di Krull coincide col minimo numero di generatori di un ideale m-primario.*
In particolare, se $K = A/m$,

$$\dim A \leq \dim_K {}^{m}\!/_{m^2}$$

Theorem 1.41 (Krull) *Sia A un anello noetheriano e siano $x_1, \ldots, x_r$ elementi di A. Allora ogni ideale primo minimale di $(x_1, ..., x_r)$ ha altezza al massimo r.*

Theorem 1.42 (Ideale Principale) *Sia A un anello noetheriano e sia x un elemento di A non divisore di zero e non invertibile. Allora ogni ideale primo minimale di (x) ha altezza esattamente 1.*

Lemma 1.43 *Sia A un anello locale noetheriano, e x un elemento del suo ideale massimale, allora*

$$\dim {}^{A}\!/_{(x)} \geq \dim A - 1$$

Se x non è un divisore di zero, allora vale l'uguaglianza.

Definition 1.44. Un A-modulo N si dice **Piatto** se la tensorizzazione per N conserva l'iniettività, ossia

$$M \hookrightarrow M' \implies M \otimes_A N \hookrightarrow M' \otimes_A N$$

Definition 1.45. Dati due anelli e un omomorfismo $f : A \to B$, allora f si dice **Piatto** se rende B un A-modulo piatto.

Dato che la tensorizzazione è esatta a destra, la condizione di piattezza è equivalente a dire che conserva le sequenze esatte corte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \quad \text{esatta} \implies$$

$$0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0 \quad \text{esatta}$$

Lemma 1.46 *Dato A un anello, e M, N_1, N_2 A-moduli, allora*

- *A è piatto su A*
- *$A[x]$ è piatto su A*
- *$N_1 \oplus N_2$ piatto $\iff$ N_1, N_2 piatti*
- *M libero e finitamente generato $\implies$ M piatto*

- *M proiettivo $\implies$ M piatto*
- *Se $f : A \to B$ è piatto, e I, J sono due ideali di A, allora*

$$(I \cap J)B = IB \cap JB$$

- *Se A è locale, e M è finitamente generato, allora piatto, libero e proiettivo sono equivalenti.*

1.3 Geometria Algebrica

Theorem 1.47 (Nullstellensatz) *Dato $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso, A l'anello di polinomi $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, e I un suo ideale, si ha che*

debole $V(I) = \emptyset \iff I = A$

forte $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$

massimali *I è massimale se e solo se esiste $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V(I)$ per cui*

$$I = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$$

Definition 1.48. Una **Funzione Regolare** su una varietà X è una funzione che localmente è esprimibile come rapporto tra due polinomi. Una **Mappa Regolare** tra due varietà X, Y è una funzione polinomiale.

Theorem 1.49 (Normalizzazione di Noether) *Data A una K-algebra finitamente generata, con K campo, allora esistono $x_1, \ldots, x_n$ elementi algebricamente indipendenti (su K) in A per cui A sia intera su $K[x_1, \ldots, x_n]$*

Capitolo 1

Schemi 1

1 09-10-14 - Zariski su Spazi e Anelli

Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un campo algebricamente chiuso. Chiamiamo $\mathbb{A}^n$ lo spazio $\mathbb{K}^n$ dotato della *topologia di Zariski*, ossia la topologia che ha come chiusi i luoghi di zeri degli ideali di $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Ricordiamo un po' di proprietà:

- Gli insiemi chiusi sono in relazione biunivoca con gli ideali radicali di A.
- Gli insiemi chiusi e irriducibili sono in relazione biunivoca con gli ideali primi di A.
- I singoletti sono chiusi e sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali massimali di A.

Preso $X = V(I)$ un chiuso di $\mathbb{A}^n$, esso determina la $\mathbb{K}$-algebra $\mathbb{K}[X]$, ossia il suo *anello di coordinate*, definito come

$$\mathbb{K}[X] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\sqrt{I}}$$

Da notare che questa è una $\mathbb{K}$-algebra ridotta e finitamente generata. Dato che X è chiuso, sappiamo anche che possiamo identificarlo con l'algebra delle *funzioni regolari* su X

$$\mathbb{K}[X] \cong \mathcal{O}_X(X)$$

dunque, se $f : X \to Y$ è una mappa regolare tra due chiusi, possiamo definire il *pullback* tra i relativi anelli coordinati descrivendone la mappa tra le funzioni regolari

$$f^\# : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X] : \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

e viceversa, data una funzione g tra due anelli di coordinate, esiste ed è unica una mappa tra i rispettivi chiusi che abbia g come pullback. Aggiungendo anche il fatto che ogni algebra ridotta finitamente generata è isomorfa ad un anello di coordinate, abbiamo generato un funtore controvariante, che è anche un'equivalenza di categorie, tra chiusi e rispettivi anelli di coordinate

$$\begin{array}{rcl} F : \{\text{ chiusi di } \mathbb{A}^n\} & \leftrightarrow & \{\text{Algebre finitamente generate ridotte}\} \\ X & \leftrightarrow & \mathbb{K}[X] \end{array}$$

Questa relazione però non ci soddisfa, poiché non c'è un modo canonico di passare dalle algebre ai chiusi.

Dato un anello A, studiamo i suoi ideali, chiamando $Specm(A)$ lo spettro massimale di A, ossia la collezione dei suoi ideali massimali, e $Spec(A)$ lo spettro di A, ossia la collezione dei suoi ideali primi.
Definiamo la *topologia di Zariski* sullo spettro massimale di un anello A generico, come la topologia generata dai chiusi

$$V(I) = \{M \in Specm(A) \mid I \subseteq M\} \quad \forall\, I \subseteq A$$

Abbiamo un po' di proprietà, quali

- $V(0) = Specm(A)$, $V(A) = \emptyset$
- dati $\{I_j\}_{j\in J}$ ideali, $V\big(\sum_{j\in J} I_j\big) = \bigcap_{j\in J} V\big(I_j\big)$
- $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$
- $V(I) = V(J) \implies \sqrt{I} = \sqrt{J}$

Warning Nell'ultimo punto, la freccia inversa è falsa. Per esempio $\mathbb{Z}_p$ ha come ideali radicali (0) e (p), ma un solo ideale massimale, dunque $V(0) = V(p)$. Oppure $\mathbb{K}[\![x]\!]$ e $\mathbb{K}[\![x,y]\!]$ sono locali con molti ideali radicali

Nel caso di anelli di polinomi, abbiamo già detto che i singoletti sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali massimali. Questa passa naturalmente ai chiusi di $\mathbb{A}^n$ e ai rispettivi anelli di coordinate, dandoci un'equivalenza, che in realtà è anche un omeomorfismo tra spazi topologici

$$X \cong Specm(\mathbb{K}[X])$$

Il problema di questa topologia è che un omomorfismo di anelli non induce una funzione tra i rispettivi spettri massimali. Per esempio, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, e (0) è massimale in $\mathbb{Q}$, ma non in $\mathbb{Z}$.
Per questo si introduce

Definition 1.1. La *topologia di Zariski* su $Spec(A)$, è generata dai chiusi

$$V(I) = \{P \in Spec(A) \mid I \subseteq P\} \cong Spec(A/I) \quad \forall\, I \subseteq A$$

Questa ha le stesse proprietà sopra più alcune altre:

- $V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$, dunque vi è una corrispondenza biunivoca tra ideali radicali e chiusi.
- Vi è anche una corrispondenza biunivoca tra ideali primi e varietà irriducibili.
- La chiusura di un punto è la sua varietà $\overline{\{P\}} = V(P)$, e un punto è chiuso se e solo se è un ideale massimale.

- Dati finiti anelli A_i, allora è vero anche in senso topologico che

$$Spec(A_1 \times \cdots \times A_n) = \coprod_{i=1}^{n} Spec(A_i)$$

  ma è falso quando gli anelli sono infiniti. Per esempio, $Spec(\prod^{\infty} \mathbb{K})$ è quasi-compatto, mentre $\coprod_{i=1}^{\infty} Spec(\mathbb{K})$ non lo è (Vedi Teorema 3.1).

- La topologia su $Specm(A)$ è la ristretta di Zariski su $Spec(A)$.

- Il pullback di omomorfismi di anelli è ben definito, ed è continuo: dati A, B anelli,

$$f : A \to B \qquad \Longrightarrow \qquad f^{\#} : Spec(B) \to Spec(A) : P \mapsto f^{-1}(P)$$

Warning In questo caso, data una funzione continua tra spettri, NON è detto che esista una funzione di cui sia il pullback, e anche quando questa esiste, non è detto che sia unica:

$$f, g : Spec(\mathbb{C}) \to Spec(\mathbb{R}[x]) : f(0) = (0),\ g(0) = (x^2 + 1)$$

sono funzioni continue, ma l'immagine di zero dovrebbe essere il nucleo di un omomorfismo di anelli da $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{C}$, ossia di una valutazione. Ma allora è sempre generato dal polinomio minimo dell'immagine di x, e dunque non è mai (0), rendendo f irrealizzabile. g invece sarà indotta dalle valutazioni in i e $-i$.

Diamo una definizione sulle funzioni tra spazi topologici:

Definition 1.2. Una funzione tra due spazi topologici $f : X \to Y$ si dice **Dominante** se $f(X)$ è densa in Y

2 15-10-14 - Jacobson e DVR

Grazie alla corrispondenza tra chiusi irriducibili e primi, si dice che ogni chiuso irriducibile $V \subseteq Spec(A)$ ha un unico **Punto Generico** P tale che $V = V(P)$. Ovviamente, gli ideali massimali sono punti generici dei rispettivi singoletti, che sono chiusi e irriducibili.

Lemma 2.1 *Dato X spazio topologico, e $Y \subseteq X$ con la topologia indotta dall'immersione, allora sono equivalenti*

1. $\forall C' \subseteq Y$ *chiuso,* $\exists!\ C \subseteq X$ *chiuso t.c.* $C' = C \cap Y$
2. $\forall C \subseteq X$ *chiuso,* $Y \cap C$ *è denso in* C

e se vale una delle due, allora Y contiene i punti chiusi di X

Dimostrazione. Dalla definizione di topologia indotta, $\forall C' \subseteq Y$ chiuso, $\exists\ C \subseteq X$ chiuso t.c. $C' = C \cap Y$. Da questo, ragionando per assurdo, entrambe le frecce sono banali verifiche. Visto che il vuoto è chiuso, allora se vale 1., tutti i chiusi devono intersecare Y, da cui i punti chiusi di X appartengono a Y. $\square$

Questo risultato si applica ad un particolare tipo di anelli

Definition 2.2. Un anello A si dice di **Jacobson** se $Specm(A)$ è denso in ogni insieme chiuso di $Spec(A)$

Ciò vuol dire che in un anello di Jacobson, dato un chiuso C in $Spec(A)$, C è la chiusura dei massimali che contiene. In particolare, dato che i massimali sono chiusi, se C contiene finiti massimali, allora C è contenuto in $Specm(A)$, ossia è composto solo da massimali. Dunque i massimali di un chiuso lo identificano completamente, e dato che la topologia su $Specm(A)$ è indotta dalla topologia su $Spec(A)$, avremo la seguente catena di bigezioni:

$$\text{chiusi irriducibili in } Specm(A) \leftrightarrow \text{ chiusi irriducibili in } Spec(A) \leftrightarrow Spec(A)$$

Example

- Un esempio di anello di Jacobson è $\mathbb{Z}$, infatti $Specm(\mathbb{Z}) \cup \{0\} = Spec(A)$, dunque tutti i chiusi sono composti da ideali massimali, escluso $V(0) = Spec(A)$, ma $V(0) - \{0\}$ non è un chiuso.
- Tutti i campi sono Jacobson, in quanto hanno un solo ideale, ed è massimale.
- Un esempio di anello NON di Jacobson è un anello locale con più di un primo, per esempio $\mathbb{Z}_p$ con p primo. Infatti $V(0) = \{(0), (p)\}$, che ha un solo ideale massimale, ma (0) non è massimale.

- per gli stessi motivi, un anello con finiti ideali massimali è Jacobson se e solo se non ha altri ideali primi, per esempio $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Lemma 2.3 *Dato A anello, sono equivalenti*

1. *A è di Jacobson*
2. *Ogni ideale primo è intersezione di massimali*
3. *Ogni ideale radicale è intersezione di massimali*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che se un ideale è intersezione di massimali, allora in particolare è radicale, ed è l'intersezione dei massimali contenuti in $V(I)$, e dunque $Specm(A)$ è denso in $V(I)$, poichè $V(I)$ è il più piccolo chiuso che contiene tutti i suoi ideali massimali.

$(2 \leftrightarrow 3)$ $3 \implies 2$ è ovvio. Viceversa, $I = \sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$, con P primi, che sono intersezioni di massimali.

$(1 \to 3)$ Se I radicale, $I = \bigcap_{I \subseteq P} P \subseteq \bigcap_{I \subseteq M} M = J$ con P primi e M massimali. Ma $V(J)$ e $V(I)$ hanno gli stessi ideali massimali dentro, e per quanto detto prima, i chiusi sono identificati dai massimali che contengono. Dunque

$$I = \sqrt{I} = \sqrt{J} = \sqrt{\bigcap_{I \subseteq M} M} = \bigcap_{I \subseteq M} M$$

Nota: il radicale passa all'intersezione infinita se gli ideali interessati sono radicali.

$(3 \to 1)$ Dato I radicale e intersezione di massimali, sappiamo già che $Specm(A)$ sarà denso in $V(I)$. □

Warning Per il *lemma di scansamento*, dati $P_1, \ldots, P_n$ ideali primi, e I ideale tale che $\bigcap_{1 \leq i \leq n} P_i \subseteq I$, allora $P_i \subseteq I$ per qualche i. Questo NON vale se abbiamo infiniti primi.

Corollary 2.4 *Prodotto finito di anelli di Jacobson è un anello di Jacobson.*

Dimostrazione. Usando la caratterizzazione 2. del lemma 2.3, basta dimostrare che i primi sono intersezione di massimali, ma i primi di un prodotto finito sono controimmagini, tramite le proiezioni, degli ideali primi dei singoli anelli, dunque sono intersezioni delle controimmagini di massimali. □

Se ora consideriamo il radicale di Jacobson $J(A)$, sappiamo che è intersezione di massimali, dunque è radicale, e $V(J(A))$ contiene tutti i massimali, pertanto è la chiusura di $Specm(A)$ in $Spec(A)$. Inoltre

$$Specm(A) \text{ denso in } Spec(A) \iff V(J(A)) = Spec(A) \iff J(A) = N(A)$$

ma dato che $V(I) = Spec(A/I)$, e $Specm(A) \cap V(I) = Specm(A/I)$, allora

$$A \text{ Jacobson } \iff Specm(A/I) \text{ denso in } Spec(A/I) \quad \forall I \text{ radicale } \iff$$

$$\iff J(A/I) = N(A/I) = \{0\} \quad \forall I \text{ radicale}$$

Da notare che questo coimplica che ogni ideale radicale è l'intersezione dei massimali contenuti in $V(I)$, come nel lemma.

Theorem 2.5 (Nullstellensatz Generale) *se A è un anello di Jacobson, e B una A-algebra finitamente generata mediante l'omomorfismo di anelli $\varphi : A \to B$, allora*

- *B è un anello di Jacobson*
- *Se $M \in Specm(B)$, allora $\varphi^{-1}(M) \in Specm(A)$, e*

$$\mathbb{K} = \frac{A}{\varphi^{-1}(M)} \subseteq \frac{B}{M}, \qquad \left[\frac{B}{M} : \mathbb{K}\right] < \infty$$

NOTA BENE: controimmagine di un massimale non è sempre massimale, neanche quando B è una A-algebra finitamente generata! Esistono i *Domini di Goldman* che sono domini i cui campi delle frazioni sono algebre finitamente generati su di essi. Dunque è strettamente necessaria l'ipotesi di Jacobson!

Corollary 2.6 *Ogni $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata è Jacobson*

Definition 2.7. Un anello A è un **Dominio di Valutazione Discreta** (rango 1) se $\exists a \notin A^* \cup \{0\}$, chiamato **Parametro**, tale che ogni x non nullo in A si scrive come $x = ua^n$, con u invertibile, e $n \in \mathbb{N}$

Example

- $\mathbb{Z}_p$ in cui $x = p^n \frac{a}{b}$
- $\mathbb{K}[\![t]\!]$ in cui $x = t^n(1 + \dots)$
- $\mathbb{K}[t]_{(t)}$

In un DVR è facile vedere che la decomposizione di ogni elemento è unica. Se A è un DVR, e localizziamo per $\{1, a, a^2, a^3, \dots\}$, allora $A_a = \mathbb{K}$ è un campo (in realtà è il suo campo delle frazioni), e possiamo definire la sua **Valutazione Discreta** come un omomorfismo di gruppi

$$V_A : \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z} : ua^n \mapsto n$$

Un po' di proprietà di questa funzione sono

- V_A è suriettiva
- se $x, y, x + y \neq 0$, allora $V_A(x + y) \geq \min\{V_A(x), V_A(y)\}$

Viceversa, dato $\mathbb{K}$ un campo, e $V : \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ un omomorfismo suriettivo, allora A è un DVR, dove

$$A = \{0\} \cup \{V(x) \geq 0\}, \quad A^* = \{V(x) = 0\}, \quad a \in \{V(x) = 1\}$$

I DVR hanno varie proprietà, quali

- Sono tutti e soli gli ED(domini euclidei) locali che non sono campi.
- Gli unici primi sono l'ideale massimale e l'ideale (0).
- Non sono Jacobson, poiché sono domini locali.
- Sono integralmente chiusi nel loro campo di frazioni.
- Sono Noetheriani, ma non Artiniani poiché hanno dimensione 1.

3 16-10-14 - Disegnini e Quasi-Compattezza

Dato un anello A, e un suo localizzato $S^{-1}A$, allora

$$Spec(S^{-1}A) \cong \{P \in Spec(A) : P \cap S = \emptyset\}$$

è un omeomorfismo tra spazi topologici. Quindi, dato un elemento $a \in A$, e chiamando $X = Spec(A)$, definiamo

$$\boldsymbol{V(a)} := V(\{a\}) = V((a)) = \{P \in X : a \in P\}$$

$$\boldsymbol{X_a} := X - V(a) = \{P \in X : a \notin P\} = \{P \in X : a^n \notin P\ \forall n\} \cong Spec(A_a)$$

dove vale che

$$X_a \cup X_b = X - V(a) - V(b) = X - (V(a) \cup V(b)) = X - V(ab) = X_{ab}$$

Esempio di anello non Jacobson con *Specm* denso in *Spec*

Prendiamo ora R un DVR, t il suo parametro, $A = R[x]$ il suo anello di polinomi, e $\mathbb{K} = R/(t)$ il suo campo residuo. Dato che la proiezione $A \twoheadrightarrow \mathbb{K}[x]$ è suriettiva, le controimmagini degli ideali generati da polinomi irriducibili sono massimali, ed in particolare

$$\pi^{-1}((\bar{p}(x))) = (p(x), t)$$

però non sono tutti gli ideali massimali: $(tx - 1)$ è massimale in quanto

$$\frac{A}{(tx-1)} \cong R[1/t] \cong R_t = K$$

Con K campo delle frazioni di R. In A, avremo che i primi sopra a (t) sono in corrispondenza con i primi di $A/(t) = \mathbb{K}[x]$, dunque

$$V(t) \cong Spec(\mathbb{K}[x])$$

Inoltre, dall'iniezione di R in A ricaviamo un'applicazione tra i due rispettivi spettri, che è la restrizione dei primi di A su R.

$$R \hookrightarrow A \quad \to \quad f : Spec(A) \to Spec(R)$$

Avremo che

$$f^{-1}((t)) = V(t) \cong Spec(\mathbb{K}[x])$$

$$f^{-1}((0)) = X - V(t) = X_t \cong Spec(R_t[x]) = Spec(K[x])$$

dove i due campi K e $\mathbb{K}$ sono distinti.
A non è Jacobson, in quanto $V(x) \cong Spec(R)$ è chiuso, e contiene solo gli ideali (x) e (x, t), di cui solo il secondo è massimale.
In più, dato che $J(A) = \{(0)\} = N(A)$, allora $Specm(A)$ è denso in $Spec(A)$.

Definition 3.1. Dato un anello A e un suo ideale primo P, il **Campo Residuo di P** è

$$\mathbb{K}(P) = \frac{A_P}{PA_P}$$

Definition 3.2. Dato un anello A un suo ideale primo P, e un elemento $x \in A$, definiamo la sua **Immagine $x(P)$** come l'immagine di x su $\mathbb{K}(P)$ secondo uno dei due omomorfismi equivalenti

$$A \to A_P \twoheadrightarrow \mathbb{K}(P)$$

$$A \twoheadrightarrow \frac{A}{P} \hookrightarrow \mathbb{K}(P)$$

In particolare, $\mathbb{K}(P)$ è il campo di frazioni di A/P, dunque se P è massimale, $\mathbb{K}(P) \cong A/P$, e l'immagine di un elemento non è altro che la sua proiezione.

Example

- $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $P = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, $f \in A \implies \mathbb{K}(P) = \mathbb{K}$, $f(P) = f(a_1, \dots, a_n)$
- $A = \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$ primo, allora $f(P)$ è la sua proiezione su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Se prendiamo come primo (0), allora $\mathbb{K}((0)) = \mathbb{Q}$, e $f(P)$ è l'immersione di f in $\mathbb{Q}$
- $A = \mathbb{R}[x]$, $P = (x^2 + 1)$, $\mathbb{K}(P) \cong \mathbb{C}$. In questo caso l'immagine di $f \in A$ non è unica, in quanto l'identificazione di $\mathbb{K}(P)$ con $\mathbb{C}$ può essere fatta in due modi: mandando x in i oppure in $-i$.

Warning In generale, le immagini di un elemento rispetto a tutti i primi NON identificano univocamente l'elemento. Infatti,

$$f_1(P) = f_2(P)\ \forall P \iff f_1 - f_2 \in P\ \forall P \iff f_1 - f_2 \in N(A)$$

Definition 3.3. Uno spazio topologico compatto per ricoprimenti si dice **Quasi-Compatto**

Ricordiamo che se $X = Spec(A)$, allora $X_f = X - V(f)$ è aperto. Dato $U \subseteq X$ aperto, e $P \in U$, avremo che $U = X - V(I)$, ma

$$P \notin V(I) \implies I \not\subseteq P \implies \exists f \in I - P \implies P \in X_f \subseteq X - V(I) = U$$

dunque X_f è una *base della topologia* su X.

Theorem 3.4 *Dato A anello, $X = Spec(A)$ è quasi-compatto.*

Dimostrazione. Prendiamo un ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i \in S} U_i$. Allora

$$\emptyset = \bigcap_{i \in S} U_i^c = \bigcap_{i \in S} V(I_i) = V\left(\sum_{i \in S} I_i\right) \implies \sum_{i \in S} I_i = A \implies$$

$$\implies 1 \in \sum_{i=1}^{n} I_i \implies A = \sum_{i=1}^{n} I_i \implies \emptyset = V\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} V(I_i) \implies$$

$$\implies X = \bigcup_{i=1}^{n} V(I_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

□

4 22-10-14 - Prefasci e Fasci

Definition 4.1. Dato X spazio topologico, un **Prefascio** di X consiste di una funzione P dagli aperti di X in una collezione di insiemi

$$P : \{\text{sottoinsiemi aperti di } X\} \to Set$$

tali che per ogni coppia di aperti $U \subseteq V$ esista una *funzione di restrizione* $\varphi_U^V : P(V) \to P(U)$ che rispetti

$$\varphi_U^U = Id_U \ \forall U, \qquad U \subseteq V \subseteq W \implies \varphi_U^W = \varphi_V^W \circ \varphi_U^V \quad \forall U, V, W$$

Quando *Set* ha qualche struttura (gruppi abeliani, anelli, $\mathbb{K}$-algebre, etc.), si richiede che le funzioni di restrizione rispettino le relative strutture, ossia che il Prefascio sia un *Funtore Controvariante* tra categorie. Gli elementi di $P(U)$ si dicono anche **Sezioni** di U.

Chiamiamo $\boldsymbol{Op(X)}$ la categoria degli aperti di X con le inclusioni come morfismi.

Example

- $C_X : Op(X) \to \{C(U, \mathbb{R}) : U \in Op(X)\}$ prefascio delle funzioni continue.
- Esiste sempre il prefascio costante $P : Op(X) \to \{0\}$

Definition 4.2. Dati P, Q prefasci su X, un **Omomorfismo di Prefasci** è un set di omomorfismi $\psi_U : P(U) \to Q(U)$ che commutano con le restrizioni, ossia per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$, si ha

$$\varphi_V^U(Q) \circ \psi_U = \psi_V \circ \varphi_V^U(P)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P(U)} \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\varphi_V^U(P)"'] & \mathrm{Q(U)} \arrow[d, "\varphi_V^U(Q)"] \\
\mathrm{P(V)} \arrow[r, "\psi_V"] & \mathrm{Q(V)}
\end{tikzcd}$$

Definition 4.3. Dato P un prefascio su X, Q è un suo **Sotto-Prefascio** se è un prefascio tale che $Q(U) \subseteq P(U)$ per tutti gli aperti, e tale che questa inclusione sia un omomorfismo di prefasci.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Q(U)} \arrow[d, "\varphi_V^U(Q)"'] & \subseteq & \mathrm{P(U)} \arrow[d, "\varphi_V^U(P)"] \\ \mathrm{Q(V)} & \subseteq & \mathrm{P(V)} \end{tikzcd}$$

Example

- Preso X aperto di $\mathbb{C}$, sia $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$, e $\mathcal{O}_X^*$ il fascio delle funzioni olomorfe mai nulle su X. allora la funzione

$$\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* : f \in \mathcal{O}_X(U) \mapsto e^f \in \mathcal{O}_X^*(U)$$

  è un omomorfismo di fasci.

- Il prefascio C_X delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ ha molti sotto-prefasci, come C_X^{lim} funzioni limitate, oppure $\mathbb{R}_X$ funzioni localmente costanti

- Se A è un gruppo abeliano, allora sia A_X il prefascio delle funzioni localmente costanti dagli aperti di X a A. Consideriamo dunque P il prefascio su X che manda gli aperti di X nelle funzioni costanti da U in A. Questo è un sotto-prefascio di A_X

D'ora in poi, parleremo sempre di prefasci almeno di gruppi abeliani. In questo caso, ha senso parlare di *kernel* di un omomorfismo.

Definition 4.4. Dato $\phi : P \to Q$ omomorfismo di prefasci su X, allora $\boldsymbol{ker\ \phi}$ e $\boldsymbol{\widetilde{Im}\ \phi}$ sono sotto-prefasci di P e Q rispettivamente, definiti come

$$\widetilde{Im}\ \phi(U) = Im\ \phi_U, \qquad \ker \phi(U) = \ker \phi_U$$

Example

- Dato l'omomorfismo exp tra i prefasci di funzioni olomorfe sopra,

$$\ker \exp(U) = \ker \exp_U = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : e^f = 1\} = \{2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

  ossia il prefascio $\ker \exp$ è isomorfo al prefascio su X di funzioni costanti su $\mathbb{Z}$.

Definition 4.5. Dato $Q \subseteq P$ prefasci di gruppi abeliani (o di strutture più complesse) su X, allora $\widetilde{\boldsymbol{P/Q}}$ è il **Prefascio Quoziente** definito come

$$\widetilde{P/Q} : U \mapsto P(U)/Q(U)$$

alcune proprietà dei quozienti sono

- Se $\phi : P \to Q$ è un omomorfismo di prefasci, e $R \subseteq P$, allora ϕ fattorizza sul quoziente se e solo se $R \subseteq \ker \phi$.
- $\phi : P \to Q$ induce l'isomorfismo di prefasci $\widetilde{P/\ker \phi} \cong \widetilde{Im}\ \phi$

Notazione: se P è un prefascio su X, $V \subseteq U$ aperti di X, e $s \in P(U)$, allora indicheremo l'operatore di restrizione come

$$s|_V = \varphi_V^U(s)$$

Definition 4.6. Un prefascio è **Separato** se $\forall U \in Op(X)$, $\forall \{U_i\}$ ricoprimento aperto di U, e $\forall s \in P_X(U)$ si ha

$$s|_{U_i} = 0 \ \ \forall i \implies s = 0$$

Definition 4.7. Un prefascio F su X è un **Fascio** se $\forall U \in Op(X)$, $\forall \{U_i\}$ ricoprimento aperto di U, e $\forall \{s_i\} : s_i \in P_X(U_i)\ \forall i$, allora

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \ \forall \{i, j\} \implies \exists! s \in P_X(U) : s|_{U_i} = s_i \ \forall i$$

Notiamo che in particolare tutti i fasci sono separati

Example

- ▶ C_X prefascio delle funzioni continue è in realtà un fascio, poiché le funzioni si possono incollare
- ▶ C_X^{lim} è separato, ma non è un fascio poiché incollamento di funzioni limitate può non essere limitata.
- ▶ $\widetilde{C_X/C_X^{lim}}$ non è separato, poiché se ricopriamo un aperto infinito U con aperti limitati U_i, le restrizioni delle funzioni vanno a zero.
- ▶ Se prendiamo exp definito sopra, $\widetilde{Im}$ exp è il prefascio delle funzioni che hanno un logaritmo sugli aperti. Ma incollando funzioni con logaritmo, non è detto che la funzione risultante abbia logaritmo (per esempio su una corona circolare). In particolare, $\widetilde{Im}$ exp $\cong \widetilde{\mathcal{O}_X/(2\pi i\mathbb{Z})_X}$ non è un fascio.

Dalla definizione di fascio si ricava un'interessante proprietà

Theorem 4.8 *Dato F un fascio su uno spazio topologico X, U un aperto di X, e $\{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto, si ha che*

$$F(U) \cong \ker \left(\prod_i F(U_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{i,j} F(U_{ij}) \right)$$

dove $U_{ij} = U_i \cap U_j$, e dati $s_i \in F(U_i)$, allora

$$\varphi((s_i)_i) = (s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}})_{i,j}$$

Questo ci dice, in particolare, che un fascio è totalmente determinato dalle sezioni su una base di aperti chiusa per intersezione finita.

Un *Omomorfismo di Fasci* è un omomorfismo di prefasci fatto tra fasci. Alcune delle loro proprietà sono

- $\phi : F \to G$ omomorfismo di fasci $\implies$ $\ker \phi$ fascio (ma è falso per $\widetilde{Im}\ \phi$, e per i quozienti). Questo è vero pure per G prefascio separato.
- Se $\phi : F \hookrightarrow G$ è un omomorfismo di fasci iniettivo, allora $\widetilde{Im}\ \phi$ è un fascio isomorfo ad F.
- $P \subseteq F$, con F fascio e P prefascio $\implies$ P separato.
  Inoltre P è un fascio $\iff$ $\widetilde{F/P}$ separato.

Definition 4.9. Dato P un prefascio, ed un elemento $p \in X$, allora la **Spiga** P_p è

$$P_p := \{(U, s) \mid U \in Op(X),\ p \in U,\ s \in P(U)\}/\sim$$

dove

$$(U, s) \sim (V, r) \iff \exists W \subseteq U \cap V : p \in W, s|_W = r|_W$$

Inoltre, l'elemento $[(U, s)] \in P_p$ è chiamato **Germe** di (U, s).

Se P è un prefascio di gruppi abeliani (o strutture più complicate), allora la spiga P_p acquista la struttura di gruppo abeliano, con l'operazione

$$[(U, s)] + [(V, r)] = [(U \cap V, s + r)]$$

e dato $\phi : P \to Q$ un omomorfismo di prefasci, esso induce omomorfismi sulle spighe

$$\phi_p : P_p \to Q_p : [(U, s)] \mapsto [(U, \phi(s))]$$

Alcune proprietà delle spighe sono

- Dato P prefascio, questo è separato se e solo se per ogni aperto U e per ogni elemento $s \in P(U)$, si ha $[(U, s)]_p = [(U, 0)]_p\ \forall p \in U \iff s = 0$

- Dati $Q \subseteq P$ prefasci, allora la spiga Q_p si immerge in P_p, con un omomorfismo canonico, dunque tratteremo Q_p come un sottoinsieme di P_p
- $(\ker \phi)_p = \ker(\phi_p)$
- $(\widetilde{Im}\ \phi)_p = Im(\phi_p)$
- $Q \subseteq P$ prefasci $\implies (P\widetilde{/}Q)_p = P_p/Q_p$

Dalle spighe si ricava un concetto di iniettività e suriettività locale, che saranno utili nel prossimo capitolo.

Definition 4.10. Un omomorfismo di prefasci si dice **localmente iniettivo/suriettivo** se gli omomorfismi indotti sulle spighe sono rispettivamente iniettivi/suriettivi.

5 23-10-14 - Fascificazione

Notazione: Dati s_i degli oggetti definiti su U_i aperti di X, diremo che si incollano bene se

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j$$

dove s_i possono essere funzioni, o più comunemente sezioni in $P(U_i)$, con P prefascio/fascio.

Dato un prefascio, vorremmo trovare un'operazione che ci ritorni un fascio legato a lui. Una operazione, dunque di Fascificazione[1].

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & F \\ & P^{sh} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Theorem 5.1 *Dato P prefascio su uno spazio topologico X, allora esiste P^{sh} fascio su X, e $\varphi : P \to P^{sh}$ omomorfismo di prefasci, tali che $\forall$ F fascio su X, e $\forall$ $\psi : P \to F$, esiste $\widetilde{\psi} : P^{sh} \to F$ che faccia commutare il diagramma, ossia*

$$\widetilde{\psi} \circ \varphi = \psi$$

Inoltre sono equivalenti:

- *$\widetilde{\psi}$ è un isomorfismo di fasci*
- *ψ è localmente iniettiva e suriettiva*

Proveremo a dimostrare questo teorema dopo aver costruito P^{sh}, e aver specificato meglio cosa si intende con isomorfismo di fasci. D'ora in poi, tutti i fasci saranno costruiti su generici spazi topologici X, a meno che non sia esplicitato.

Lemma 5.2 *Se F è un fascio, allora $F(\emptyset) = \{0\}$*

Dimostrazione. Prendiamo il ricoprimento vuoto $\{U_i\}$ dell'aperto $U = \emptyset$. Per condizione di fascio, esiste un unico s in $F(\emptyset)$ tale che $s|_{U_i} = s_i \in U_i$ $\forall i$, che è una condizione sempre vera in quanto non ci sono U_i nè tantomeno s_i, dunque esiste un unico s in $F(\emptyset)$. $\square$

Lemma 5.3 *Dato F prefascio, è un fascio se e solo se per ogni U aperto e per ogni $\{U_i\}$ ricoprimento, vale*

$$F(U) \cong \left\{ s \in \prod F(U_i) : s_i|_{U_j} = s_j|_{U_i} \right\}$$

[1]**Question:** Fascificazione, Fascizzazione o Fascificatura?
Tanto la correzione ortografica me li dà sbagliati tutti e 3..

Theorem 5.4 (Fascificatura)
Dato P prefascio, e $U \in Op(X)$, definiamo

$$\widetilde{P}(U) = \left\{ \varphi : U \to \coprod_{x \in U} P_x \;\middle|\; \varphi(x) \in P_x \ \forall x \right\}$$

Se poniamo che le restrizioni siano le restrizioni di funzioni, $\widetilde{P}$ diventa un fascio, e il suo sottoprefascio

$$P^{sh}(U) = \Big\{ \varphi \in \widetilde{P} \;\Big|\; \exists \{U_i\} \text{ ricoprimento aperto di } U, \\ \exists s_i \in P(U_i) \text{ t.c. } \forall i, \ \forall x \in U_i, \ \varphi(x) = (s_i)_x \Big\}$$

è anch'esso un fascio, detto fascificatura di P.

Lemma 5.5 *Definiamo l'omomorfismo di prefasci*

$$\eta_P : P(U) \to P^{sh}(U) : s \mapsto (x \mapsto s_x)$$

Avremo che

1. *η_p è un isomorfismo se e solo se P è un fascio.*
2. *η_p è iniettivo se e solo se P è separato.*

Dimostrazione.
1, $\implies$) P^{sh} è un fascio, dunque lo è anche P
2, $\impliedby$) Se su U ho che $\eta_P(s) = 0$, allora $s_x = 0$ per ogni x in U, che implica che $s = 0$ poiché P è separato.
1, $\impliedby$) P fascio $\implies$ P separato $\implies$ η_P iniettiva per il punto precedente. Sia dunque $\varphi \in P^{sh}(U)$. Per definizione, esiste un ricoprimento aperto di U, e degli $s_i \in U_i$ tali che per ogni i e ogni x in U_i, $\varphi(x) = (s_i)_x$. Se chiamiamo $U_{ij} := U_i \cap U_j$, allora

$$\varphi(x) = (s_i)_x = (s_j)_x \ \ \forall x \in U_{ij} \implies \forall x \in U_{ij} \ \ \exists x \in W_x \subseteq U_{ij} : s_i|_{W_x} = s_j|_{W_x}$$

Avremo che s_i e s_j sono uguali su un ricoprimento aperto di U_{ij}, dunque

$$\left(s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}}\right)|_{W_x} = 0 \ \ \forall x \implies s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$$

Dato che gli s_i si incollano bene, e che P è un fascio, allora esiste unico $s \in P(U)$ che ristretto agli U_i dia gli s_i. In particolare,

$$\eta_P(s) = (x \mapsto s_x), \quad x \in U_i \implies \eta_P(s)(x) = (s|_{U_i})_x = (s_i)_x = \varphi(x)$$

Quindi η_P è suriettivo e iniettivo, dunque biettivo.
2, $\implies$) Prendiamo U aperto, un suo ricoprimento aperto U_i, e $s \in P(U)$ tale che $s|_{U_i} = 0 \ \ \forall i$. Se chiamiamo $\eta_P(s) = \varphi$, avremo che

$$x \in U_i \implies \varphi(x) = s_x = (s|_{U_i})_x = 0$$

Dunque $\varphi \equiv 0$, ma η_P è iniettiva, dunque $s = 0$. □

Nota Bene: Questo risultato ci dice che preso un fascio F, esso è isomorfo al suo fascificato. In particolare, questo vuol dire che possiamo vedere effettivamente una sezione $s \in F(U)$ come una funzione $U \to \coprod_{p \in U} F_p$ che manda gli elementi $p \in U$ nei suoi germi s_p.

Avviciniamoci alla dimostrazione del teorema iniziale con un altro paio di lemmi.

Lemma 5.6 *La funzione η_P passa alle spighe, ovvero*

$$(\eta_P)_x : P_x \to P^{sh}_x : s_x \mapsto (y \mapsto s_y)_x$$

e questa è un isomorfismo, ossia $P_x \cong P^{sh}_x$

Dimostrazione. Sappiamo che $\ker(\eta_P)_x = (\ker \eta_P)_x$, ma

$$s \in \ker \eta_P \iff \eta_P(s)(y) = s_y = 0 \ \ \forall y \implies s_x = 0 \implies \eta_P \text{ iniettiva}$$

$(\eta_P)_x$ è anche suriettiva, poiché se $\varphi \in P^{sh}(U)$, U_i il ricoprimento associato, e $x \in U_i$, $s_i \in P(U_i)$, allora $\varphi(x) = (s_i)_x$, e

$$[(U, \varphi)]_x = [(U_i, \varphi|_{U_i})]_x = [(U_i, \eta_P(s_i))]_x = (\eta_P)_x(s_i)$$

□

Usando ciò, mostriamo che

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_P"'] & Q \arrow[d, "\eta_Q"] \\ P^{sh} \arrow[r, dashed, "\varphi^{sh}"] & Q^{sh} \end{tikzcd}$$

Lemma 5.7 *Dato $\varphi : P \to Q$ omomorfismo di prefasci, esiste un unico omomorfismo di fasci*

$$\varphi^{sh} : P^{sh} \to Q^{sh}$$

che commuti con η_P e η_Q.

Dimostrazione. Definiamo φ^{sh} come

$$\alpha \in P^{sh}(U) \implies \varphi^{sh}(\alpha)(x) = \varphi_x(\alpha(x)) \ \ \forall x \in U$$

Questa ha immagine in Q^{sh}, poiché se U_i e s_i sono associati a α, allora

$$x \in U_i \implies \varphi^{sh}(\alpha)(x) = \varphi_x((s_i)_x) = (\varphi(s_i))_x$$

Inoltre fa commutare il diagramma: se $s \in P(U)$, e $x \in U$, allora

$$(\varphi^{sh}\eta_P(s))(x) = \varphi^{sh}(x \mapsto s_x)(x) = \varphi_x(s_x) = \varphi(s)_x = (\eta_Q\varphi(s))(x)$$

Infine, è unica, poiché se esistesse ψ che rispetti le ipotesi, allora preso lo stesso α sopra,

$$\psi(\alpha)|_{U_i} = \psi(\alpha|_{U_i}) = \psi\eta_P(s_i) = \eta_Q\varphi(s_i) \ \ \forall i \implies \psi(\alpha) = \varphi^{sh}(\alpha)$$

dove l'ultima implicazione è data dal fatto che le $\eta_Q\varphi(s_i)$ si incollano bene in Q^{sh} che è un fascio. □

Adesso abbiamo i mezzi per dimostrare il teorema enunciato ad inizio lezione.

Theorem 5.8 (Proprietà Universale)
Dato P prefascio, F fascio, e $\varphi : P \to F$ omomorfismo di prefasci, allora esiste un unico omomorfismo di fasci $\varphi^{sh} : P^{sh} \to F$ che faccia commutare il diagramma.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\eta_P"'] & & F \\ & P^{sh} \arrow[ur, dashed, "\varphi^{sh}"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Segue banalmente dal lemma precedente. □

Prima di concludere la dimostrazione del teorema, esplicitiamo cosa intendiamo con *isomorfismo di fasci*. Sappiamo cos'è un omomorfismo di fasci, e sappiamo dire quando è iniettivo, poiché abbiamo visto che il nucleo dell'omomorfismo è un fascio. Ci accorgiamo che però l'immagine dell'omomorfismo non è in generale un fascio, dunque

Definition 5.9. Si definisce l'**Immagine** di un omomorfismo di fasci come
$$\boldsymbol{Im}(\varphi) = (\widetilde{Im}\ \varphi)^{sh}$$

Diremo dunque che un omomorfismo di fasci $\varphi : F \to G$ è suriettivo se e solo se $Im\ \varphi = G$, e in generale, un omomorfismo di fasci suriettivo **non** è suriettivo come omomorfismo di prefasci.

Example

- Dato $X \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $Exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$ NON è suriettivo come omomorfismo di prefasci, ma lo è come omomorfismo di fasci

Se però un omomorfismo di fasci $\varphi : F \to G$ è iniettivo, allora l'immagine come omomorfismo di prefasci coincide con l'immagine come omomorfismo di fasci, perché $F \cong \widetilde{Im}\ \varphi$, e dunque $\widetilde{Im}\ \varphi$ è già un fascio. In particolare, avremo che

Lemma 5.10 *Dato un omomorfismo di fasci $\varphi : F \to G$, questo è un isomorfismo di fasci se e solo se è un isomorfismo di prefasci.*

Alcuni risultati che valgono sui prefasci sono

Lemma 5.11 *Dato un omomorfismo φ tra due prefasci P, Q, allora*

1. *Se φ è iniettivo allora è localmente iniettivo. Se inoltre P è separato, allora vale il se e solo se.*
2. *Se φ è suriettivo, allora è localmente suriettivo.*
3. *Se φ è localmente suriettivo, localmente iniettivo, P è un fascio, e Q è separato, allora φ è un isomorfismo.*

Dimostrazione.

1. Segue dal fatto che $\ker \varphi_x = (\ker \varphi)_x \ \forall x$, e che l'unico prefascio separato con tutte le spighe nulle è il fascio banale.

2. Segue da $(\widetilde{Im\ \varphi})_x = Im(\varphi_x)\ \forall x$

3. Sappiamo che φ è iniettivo, dunque basta verificarne la suriettività. Dato un aperto U, e una sezione $s \in Q(U)$, sappiamo che per ogni $x \in U$, esiste $r_x \in P(V_x)$ con $x \in V_x \subseteq U$ per cui $\varphi(r_x) = s|_{V_x}$. Gli V_x formano un ricoprimento aperto di U, e dato che φ è iniettivo,

$$\varphi(r_x)|_{V_y} = \varphi(r_y)|_{V_x} = s|_{V_x \cap V_y} \implies r_x|_{V_y} = r_y|_{V_x}$$

   Gli r_x si incollano bene, dunque, dato che P è un fascio, esiste $r \in P(U)$ che si restringe agli r_x, e di conseguenza $\varphi(r) - s \in Q(U)$ ha restrizione nulla su tutti gli V_x. Grazie alla separabilità di Q, otteniamo che $s = \varphi(r)$, dunque φ è un isomorfismo.

□

Un corollario del precedente risultato è quindi che

Lemma 5.12 *Dati F, Q fasci, e $\varphi : F \to Q$ un omomorfismo di fasci localmente iniettivo e suriettivo, allora φ è un isomorfismo di fasci*

Theorem 5.13 *Dato P prefascio, F fascio, e $\varphi : P \to F$ omomorfismo di prefasci, allora sono equivalenti*

1. *$\varphi^{sh} : P^{sh} \to F$ è un isomorfismo di fasci*

2. *φ è localmente iniettiva e suriettiva*

Dimostrazione. $2 \implies 1$ segue dal fatto che $P_x \cong P_x^{sh}$, e dal lemma precedente. $1 \implies 2$ è vero poiché φ^{sh} è un isomorfismo di prefasci, e dunque induce isomorfismi tra le spighe. □

In particolare, valgono le seguenti caratterizzazioni degli omomorfismi di fasci:

Lemma 5.14 *Dato un omomorfismo di fasci $\varphi : F \to G$, allora*

1. *φ è localmente iniettivo se e solo se è iniettivo*

2. *φ è localmente suriettivo se e solo se è suriettivo*

3. *φ è localmente iniettivo e suriettivo se e solo se è un isomorfismo*

Dimostrazione. Notiamo che i punti 1 e 3 sono dimostrati da 5.11. Il punto 2 invece segue da

$$(Im\ \varphi)_x = (\widetilde{Im}\ \varphi)_x = Im\ \varphi_x$$

e

$$(Im\ \varphi)_x = G_x\ \forall x \iff Im\ \varphi = G$$

□

Anche il quoziente $F\tilde{/}G$ di due fasci è un prefascio separato, ma in generale non è un fascio.

Definition 5.15. definiamo il **Fascio Quoziente** come il fascificato del prefascio quoziente

$$\boldsymbol{F/G} := (F\tilde{/}G)^{sh}$$

Avremo che

- se $\varphi : F \to F/G$ è la composizione delle mappe $F \to F\tilde{/}G \to F/G$, allora

$$G \hookrightarrow F \to F/G$$

visto come omomorfismo da G a F/G, è nullo.

- Se $\varphi : F \to H$ è un omomorfismo di fasci tale che $G \to F \to H$ è nullo, allora si fattorizza con $F\tilde{/}G$, e unicamente con F/G.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d] & \\ F \arrow[r] \arrow[d] & H \\ F\tilde{/}G \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & F/G \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

Definition 5.16. Dati tre fasci e due omomorfismi di fasci

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F''$$

si dice **Sequenza Esatta** di fasci se $Im(\alpha) = Ker(\beta)$.

Warning Una sequenza esatta di fasci, NON è una sequenza esatta di prefasci, in quanto $Im(\alpha) \neq \widetilde{Im}\ (\alpha)$

Le immagini passano alle spighe, in quanto queste sono isomorfe alle spighe delle immagini dei prefasci. Dunque anche l'esattezza passa alle spighe, ossia

$$F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \text{ esatta} \implies F'_x \xrightarrow{\alpha} F_x \xrightarrow{\beta} F''_x \text{ esatta}$$

Inoltre l'esattezza delle sequenze corte passa parzialmente alle sezioni (poiché se α è iniettiva, $\widetilde{Im}\ \alpha = Im\ \alpha$)

$$0 \to F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \to 0 \text{ esatta} \implies 0 \to F'(U) \xrightarrow{\alpha} F(U) \xrightarrow{\beta} F''(U) \text{ esatta}$$

Da questo, si può anche passare alla coomologia dei fasci, ottenendo risultati sui gruppi di omologia[2]

Un'altra definizione di fascio associato ad uno spazio topologico, passa dall' *espace étalé*

Definition 5.17. Dato un prefascio P, il suo **espace étalé** è

$$\boldsymbol{EE(P)} := \coprod_{x \in X} P_x$$

Possiamo dimostrare che se F è un fascio, esiste un'unica struttura topologica su $EE(F)$ tale che $\pi : EE(F) \to X : s_x \mapsto x$ sia un omeomorfismo locale, e tale che per ogni elemento $s \in F(U)$, la mappa $\varphi_s : U \to EE(F) : x \mapsto s_x$ sia continua.

[2]Tradotto: qui c'è un delirio sui gruppi di omologia e successioni esatte infinite che non ho voglia di ricopiare

6 29-10-14 - Operazioni tra Fasci e Prefasci

Definition 6.1. Dati P_i prefasci, il loro **Prodotto** è un prefascio definito come
$$\left(\prod \boldsymbol{P_i}\right)(U) := \prod(P_i(U))$$

Definition 6.2. Dati P_i prefasci, la loro **Somma Diretta** è un prefascio definito come

$$\left(\widetilde{\bigoplus} \boldsymbol{P_i}\right)(U) := \bigoplus(P_i(U))$$

Definition 6.3. Dati P_i fasci, la loro **Somma Diretta di Fasci** è un fascio definito come

$$\left(\bigoplus \boldsymbol{P_i}\right)(U) := \left(\widetilde{\bigoplus} P_i(U)\right)^{sh}$$

Un po' di proprietà:

- Per ogni i, esiste la proiezione $\pi_i : \prod P_j \to P_i$ con la proprietà universale che se Q è un prefascio per cui esistono $\varphi_i : Q \to P_i$ omomorfismi per ogni i, allora esiste ed è unico $\varphi : Q \to \prod P_i$ tale che $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & \prod P_j \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & P_i & \end{tikzcd}$$

- Se P_i sono fasci, allora $\prod P_i$ è un fascio.
- Se l'insieme di indici è finito, allora $\prod P_i = \widetilde{\bigoplus} P_i$.
- Per ogni i, esiste l'immersione $\epsilon_i : \widetilde{\bigoplus} P_j \to P_i$ con la proprietà universale che se Q è un prefascio per cui esistono $\varphi_i : P_i \to Q$ omomorfismi per ogni i, allora esiste ed è unico $\varphi : \widetilde{\bigoplus} P_i \to Q$ tale che $\varphi \circ \epsilon_i = \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd} Q & & \widetilde{\bigoplus} P_i \arrow[ll, dashed, "\varphi"'] \\ & P_i \arrow[ul, "\varphi_i"] \arrow[ur, "\epsilon_i"'] & \end{tikzcd}$$

- Se i P_i sono fasci, e l'insieme di indici è infinito, allora $\widetilde{\bigoplus} P_i$ è un prefascio separato, ma in generale non è un fascio.
- Se P_i sono fasci, allora

$$\bigoplus P_i(U) = \left\{ s \in \prod P_i(U) \,\middle|\, \forall p \in U \;\; \exists p \in V_p \subsetneq U : \#\left\{ i \mid s_i|_{V_p} \neq 0 \right\} < \infty \right\}$$

$$\begin{tikzcd} Q & & \bigoplus P_i \arrow[ll, dashed, "\varphi"'] \\ & P_i \arrow[ul, "\varphi_i"] \arrow[ur, "\epsilon_i"'] & \end{tikzcd}$$

- Se i P_i sono fasci, allora per ogni i esiste l'immersione $\epsilon_i : \bigoplus P_j \to P_i$ con la proprietà universale che se G è un fascio per cui esistono $\varphi_i : P_i \to Q$ omomorfismi, allora esiste ed è unico $\varphi : \bigoplus P_i \to Q$ tale che $\varphi \circ \epsilon_i = \varphi_i$.

Altre due operazioni tra prefasci/fasci sono la restrizione e il push forward

Definition 6.4. Dato un (pre)fascio F, ed U un aperto, allora il **(pre)fascio Ristretto** è definito come

$$\boldsymbol{F|_U}(V) = F(V) \ \ \forall\, V \subseteq U$$

Definition 6.5. Data $f : X \to Y$ una funzione continua tra due spazi topologici, e F un (pre)fascio su X, si definisce il (pre)fascio su Y **Push Forward** di f come

$$\boldsymbol{f_* F}(U) := F(f^{-1}(U))$$

Questa hanno proprietà quali

- Dato un fascio F, allora $\forall U$, $\forall x \in U$, $(F|_U)_x = F_x$
- Il push forward passa alla composizione di funzioni e agli omomorfismi tra (pre)fasci, ossia

$$X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \implies (g \circ f)_* F = g_* f_* F$$

$$\varphi : F \to G, \ \ f : X \to Y \implies \exists\, f_* \varphi : f_* F \to f_* G$$

- se $f : X \hookrightarrow Y$ è iniettiva, allora le spighe sui punti di X sono isomorfe:

$$(f_* F)_x = F_x$$

Lemma 6.6 *Dato F fascio, U aperto, U_i ricoprimento aperto di U tale che gli U_i siano disgiunti, allora*

$$F(U) \to \prod F(U_i) : s \mapsto (s|_{U_i})$$

è un isomorfismo

Questo ultimo lemma ci dice che se lo spazio X non è connesso, possiamo spezzare un fascio nel prodotto di fasci ristretti.

Example

- Dati $X = Y = \mathbb{C}$, e $f : X \to Y : z \mapsto z^2$, sia $F = \mathbb{Z}_X$ il fascio delle funzioni su $\mathbb{Z}$ localmente costanti. Sicuramente ogni spiga in un punto sarà composto dalle funzioni costanti su $\mathbb{Z}$. Se invece cerchiamo di capire cos'è $(f_*\mathbb{Z}_X)_q$, scopriamo che se $q = 0$, allora è nuovamente $\mathbb{Z}$, altrimenti è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, poiché si spezza in due parti.

- Dato X con topologia discreta, e F un qualsiasi fascio, allora $F(\{ p \}) = F_p$ e determinano F unicamente.

- Dato X spazio topologico, e X' lo tesso spazio, ma con la topologia discreta, allora $Id : X' \to X$ è continua, e se F' è un fascio di X', il suo push forward Id_*F' sarà lo stesso fascio di F', ma che agisce solo sugli aperti di X.

7 30-10-14 - Fasci di Anelli e Spazi Anellati

Dato A un anello, e $X = Spec(A)$ con la topologia di Zariski, vorremmo potergli attribuire un fascio che rappresenti le Funzioni Regolari su X. Similmente a quando abbiamo fascificato i prefasci, definiamo dunque un fascio grande

$$\widetilde{\mathcal{O}}_X(U) = \left\{ \alpha : U \to \coprod_{p \in U} A_p \;\middle|\; \alpha(p) \in A_p \right\}$$

e dunque ne estraiamo un sottofascio

$$\boldsymbol{\mathcal{O}_X}(U) = \Big\{ \alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}_X(U) \;\mid\; \forall p \in U \;\; \exists f \in A,\; s \in A_f : \\ p \in X_f \subseteq U,\;\; \alpha(q) = s_q \;\; \forall q \in X_f \Big\}$$

Dove s_q è l'immagine di s tramite l'omomorfismo $A_f \twoheadrightarrow A_q$.
Questo nuovo oggetto ha molte interessanti proprietà[1] quali

Theorem 7.1

1. $\mathcal{O}_X(X) \cong A$
2. $\mathcal{O}_X(X_f) \cong A_f$
3. $(\mathcal{O}_X)_p \cong A_p$

Dimostrazione.

1. Prendiamo la mappa

$$\eta : A \to \mathcal{O}_X(X) \;:\; a \mapsto (p \mapsto a_p)$$

Questa è iniettiva poiché essere zero è una proprietà locale, ossia, se $a_p = 0$ per ogni p primo, allora $a = 0$. Preso ora $\alpha \in \mathcal{O}_X(X)$, sappiamo che X è quasi compatto per teorema 3.4, dunque possiamo estrarre un sottoricoprimento finito di X, indiciato da f_i. Indichiamo dunque s_i e p_i l'elemento e il primo associati a X_{f_i}, e notiamo che

$$X = \cup X_{f_i} = (\cap V(f_i))^c = V(\{f_i\})^c \implies V(\{f_i\}) = \emptyset \implies (\{f_i\}) = A$$

$$\sqrt{(\{f_i^n\})} = (\{f_i\}) = A \;\; \forall n \implies (\{f_i^n\}) = A \;\; \forall n$$

Dato che $s_i \in A_{f_i}$, saranno nella forma $s_i = v_i/f_i^{r_i}$, ma dato che sono in numero finito, possiamo modificare i v_i in modo che gli esponenti degli f_i siano tutti uguali $r_i = r$. Dalla definizione di $\mathcal{O}_X(X)$, sappiamo che

$$\forall q \in X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_i f_j} \quad (s_i)_q = (s_j)_q$$

ossia

$$\forall q \in X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_i f_j} \;\; \exists t_q \notin q \;:\; t_q(v_i f_j^r - v_j f_i^r) = 0$$

[1] Ma percaso è l'unico con queste proprietà a meno di isomorfismi?

Ma chiamato $J = Ann(v_i f_j^r - v_j f_i^r)$, e P un qualsiasi primo in $V(J)$, allora $P \notin X_{f_i f_j}$, poiché altrimenti esiste t_P nell'annullatore, e dunque in J, ma non in P. dunque $P \in V(f_i f_j)$, e pertanto $\sqrt{J}$, che è l'intersezione di tali primi, contiene $f_i f_j$. Di conseguenza,

$$\forall\, i,j \ \exists\, m_{ij} \ : \ (f_i f_j)^{m_{ij}}(v_i f_j^r - v_j f_i^r) = v_i f_i^m f_j^{m+r} - v_j f_j^m f_i^{m+r} = 0$$

ma possiamo sempre prendere il massimo, ed imporre $m_{ij} = m$. Preso ora $a \in A$ come

$$\sum_i a_i f_i^{m+r} = 1 \qquad a = \sum_i a_i v_i f_i^m$$

otteniamo

$$a f_j^{m+r} = \sum_i a_i v_i f_i^m f_j^{m+r} = \sum_i a_i v_j f_j^m f_i^{m+r} = v_j f_j^m$$

$$\implies f_j^m (a f_j^r - v_j) = 0 \implies (a)_{f_j} = \frac{v_j}{f_j^r} = s_j$$

Dunque $\alpha = \eta(a)$, e η diventa un isomorfismo.

2. É una conseguenza del punto sopra, in quanto facendo la stessa costruzione partendo da A_f invece che da A, si ottiene lo stesso fascio, ristretto a $X_f = Spec(A_f)$.

3. Dato che le spighe sono oggetti locali, basta considerare una base di aperti, in questo caso gli X_f. Presa l'applicazione

$$(\mathcal{O}_X)_p \to A_p \ : \ [X_f, s] \mapsto s_p$$

si prova con facili verifiche che è ben definita come omomorfismo di anelli, ed inoltre è un isomorfismo.

□

Dato R anello, definiamo $\mathbb{A}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{R}} := Spec(R[x_1, \ldots, x_n])$.

Example

- se $\mathbb{K}$ campo, $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = Spec(\mathbb{K}[x])$. Per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ esiste $f \in \mathbb{K}[x]$ tale che $U = (\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}})_f = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} - V(f)$[2]. Se ora prendiamo $\mathcal{O}_X$ fascio associato, otteniamo che $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(X_f) \cong \mathbb{K}[x]_f$.
- Preso ora $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} = Spec(\mathbb{K}[x,y])$, e $U = X - \{ (x,y) \}$, cos'è $\mathcal{O}_X(U)$? Se $U_1 = X_x$, $U_2 = X_y$, allora $U_1 \cap U_2 = U_{12} = X_{xy}$, mentre $U_1 \cup U_2 = U$. Essendo un fascio tutti e soli gli elementi di $\mathcal{O}_X(U)$ saranno l'incollamento degli elementi di $\mathcal{O}_X(U_1) = \mathbb{K}[x,y]_x$ e $\mathcal{O}_X(U_2) = \mathbb{K}[x,y]_y$ che sono uguali su $\mathcal{O}_X(U_{12}) = \mathbb{K}[x,y]_{xy}$, dunque si può esprimere come

$$\mathcal{O}_X(U) = ker\big(\mathcal{O}_X(U_1) \oplus \mathcal{O}_X(U_2) \to \mathcal{O}_X(U_{12}) \ : \ (\varphi, \psi) \mapsto \varphi - \psi\big)$$

  ma i polinomi del tipo $\alpha(x,y)/x^m$ e $\beta(x,y)/y^n$ che coincidono, sono tutti e soli i polinomi in $\mathbb{K}[x,y]$, dunque $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(U) = \mathbb{K}[x,y]$.

Passiamo adesso ad un tipo particolare di spazi-fasci, gli *Spazi Anellati* [3]

[2] Questo vale in realtà per ogni anello PID, poichè $V(I) = V(f)$

[3] Anellato o anulato, tanto fanno cagare tutte e due

Definition 7.2. Uno **Spazio Anellato** $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio topologico con un fascio di anelli commutativi con identità.

Definition 7.3. Uno **Spazio Anellato Locale**, o **Spazio Localmente Anellato** (s.l.a.) $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato tale che le spighe $(\mathcal{O}_X)_p$ siano anelli locali.

Esempi evidenti di s.l.a. sono appunto $(Spec(A), \mathcal{O}_X)$, poiché sono costruiti in modo che $(\mathcal{O}_X)_p = A_p$ sia locale. Altri esempi possono essere

Example

- Preso uno spazio topologico X, un anello A, e il fascio delle funzioni localmente costanti A_X, allora $(A_X)_p \cong A$, dunque è uno s.l.a. se e solo se A è locale.
- Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato (locale), e U è un aperto, allora la restrizione è ancora uno spazio anellato (locale).
- Dato X spazio topologico, allora sono s.l.a.

  (X, C_X) fascio delle funzioni continue.

  (X, C_X^∞) se X è una varietà C^∞.

  $(X, \mathcal{O}_X)$ se $X \subseteq \mathbb{C}$ aperto, funzioni olomorfe.

Warning L'anello banale $\{0\}$ NON è un anello locale, dunque nessuna spiga di uno sla può annullarsi. Questo, in particolare, implica che

$$\forall U \subseteq X \text{ non vuoto}, \quad \mathcal{O}_X(U) \neq \{0\}$$

Possiamo anche definire dei *morfismi* di spazi anellati come

Definition 7.4. Se prendiamo due spazi anellati $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, un **Morfismo di Spazi Anellati** è una coppia di funzioni $(f, f^\#)$ tali che

$$\begin{aligned} f : X \to Y \qquad & \text{è continua} \\ f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X \qquad & \text{è un omomorfismo di fasci di anelli} \end{aligned}$$

Vorremmo dare anche una nozione di morfismo tra s.l.a., ma per farlo abbiamo bisogno di definire prima cosa sia un *omomorfismo locale* tra anelli locali

Definition 7.5. Dati A, B due anelli locali, con M_A e M_B i relativi ideali massimali, un **Omomorfismo Locale** tra i due è un omomorfismo di anelli

$$f : A \to B \quad \text{t.c.} \quad f(M_A) \subseteq M_B \quad \text{o} \quad M_A = f^{-1}(M_B)$$

Definition 7.6. Un morfismo f di spazi anellati $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, si dice **Morfismo di Spazi Localmente Anellati** se per ogni $p \in X$, la composizione

$$(\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \xrightarrow{f^{\#}_{f(p)}} (f_*\mathcal{O}_X)_{f(p)} \longrightarrow (\mathcal{O}_X)_p$$

è un omomorfismo locale.

Example

- Se X, Y sono spazi topologici, e $f : X \to Y$ è una funzione continua (o una funzione C^∞ se X, Y sono varietà C^∞), allora definiamo un omeomorfismo tra i fasci delle funzioni continue tale che

  $$f^{\#} : C_Y(U) \to f_*C_X(U) : g \mapsto g \circ f|_{f^{-1}(U)}$$

  Allora la coppia $(f, f^{\#})$ è un morfismo di s.l.a., poiché le spighe sono anelli locali, con ideali massimali le funzioni che si annullano nel punto, e $f^{\#}$ è locale.

- Dati A, B anelli, $\varphi : B \to A$ omomorfismo, $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$

  $$f : X \to Y : p \mapsto \varphi^{-1}(p) \qquad \text{è continua poiché} \qquad f^{-1}(Y_g) = X_{\varphi(g)}$$

  ed induce in maniera unica l'omomorfismo locale

  $$B_{f(q)} \xrightarrow{\varphi_q} A_q$$

  dunque possiamo definire l'omomorfismo di fasci

  $$f^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U)$$

  $$\left(\beta : U \to \coprod_{p \in U} B_p\right) \xmapsto{f^{\#}} \left(\alpha : f^{-1}(U) \to \coprod_{q \in f^{-1}(U)} A_q \ : \ q \mapsto \varphi_q \beta f(q)\right)$$

  Questo definisce un morfismo di s.l.a..

Con l'ultimo esempio abbiamo costruito un morfismo di s.l.a. partendo da un morfismo di anelli. Viceversa, prendendo un morfismo $(f, f^{\#})$ tra due s.l.a. $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$, e chiamando $A = \mathcal{O}_X(X)$, $B = \mathcal{O}_Y(Y)$, allora la funzione $f^{\#} : \mathcal{O}_Y(Y) \to f_*\mathcal{O}_X(Y)$ è un omomorfismo di anelli tra B e A.

8 05-11-14 - Schemi (finalmente!)

Definition 8.1. Uno **Schema Affine** è uno s.l.a. $(X, \mathcal{O}_X)$ associato ad un anello.
Un **Morfismo di Schemi Affini** è un morfismo di s.l.a. tra schemi affini

Una cosa importante da sottolineare riguardo l'ultimo esempio della lezione scorsa è che ogni morfismo di s.l.a. tra due schemi affini ha una struttura uguale a quella ricavata partendo da un omomorfismo di anelli. Questo è espresso dal seguente teorema:

Theorem 8.2 *Dati due anelli A, B, e $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i corrispondenti schemi affini, allora vi è una bigezione tra gli omomorfismi di anelli, e i morfismi di schemi affini*

$$Hom(B, A) \leftrightarrow Mor(X, Y)$$

Questa porta ad un'equivalenza tra la categoria degli anelli (opposta), e la categoria degli schemi affini. In particolare, gli isomorfismi di anelli corrisponderanno agli isomorfismi di schemi affini.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cong"'] & A \arrow[d, "\cong"] & & \\
\mathcal{O}_Y(Y) \arrow[r, "f_Y^\#"] \arrow[dr] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[dr] & \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f_U^\#"] \arrow[dl] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[dl] \\
& (\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathcal{O}_X)_p \arrow[d, "\cong"] & \\
& B_{f(p)} \arrow[r, "\psi"] & A_p &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. abbiamo già mostrato come da un omomorfismo di anelli passiamo ad un mofismo di sla, e dunque di schemi affini.

Se $(f, f^\#)$ è un morfismo di sla tra X, Y, allora prendiamo $\varphi : B \to A$ definito come

$$\varphi \equiv f_Y^\# : \mathcal{O}_Y(Y) = B \to f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(X) = A$$

e questo è un omomorfismo di anelli.

Bisogna dimostrare che queste due operazioni sono inverse. Partendo dal morfismo $(f, f^{\#})$, dimostriamo che discende da $\varphi \equiv f^{\#}_Y$. Chiamiamo $(g, g^{\#})$ il morfismo indotto da φ. Avremo che

$$g : X \to Y : p \mapsto \varphi^{-1}(p) = (f^{\#}_Y)^{-1}(p)$$

Nel diagramma, che commuta poiché $(f, f^{\#})$ è un morfismo di sla, la mappa in basso ψ è locale, dunque (grazie al lemma 1.26 nei prerequisiti)

$$f(p) = \psi^{-1}(p) \implies f(p) = \varphi^{-1}(p) = g(p) \implies f \equiv g$$

Inoltre

$$g^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) :$$

$$\left(\beta : U \to \prod_{p \in U} B_p\right) \xmapsto{g^{\#}} \left(\alpha : f^{-1}(U) \to \prod_{q \in f^{-1}(U)} A_q \ : \ q \mapsto \varphi_q \beta f(q)\right)$$

e questa, come preannunciato, è esattamente la funzione $f^{\#}$, poiché $\beta(p) = \beta_p$, e grazie alla commutatività del diagramma:

$$f^{\#}\beta(q) = (f^{\#}\beta)_q = \psi(\beta_{f(q)}) = \varphi_q \beta f(q)$$

Viceversa, partendo dall'omomorfismo $\varphi : B \to A$, induciamo $(f, f^{\#})$ e dunque chiamiamo $\varphi' \equiv f^{\#}_Y$. Avremo che, dato $\beta \in B \cong \mathcal{O}_Y(Y)$,

$$\varphi'(\beta)_p = \varphi'(\beta)(p) = \varphi_p \beta \varphi^{-1}(p) = \varphi_p \beta_{\varphi^{-1}(p)} = \varphi(\beta)_p \implies \varphi'(\beta) = \varphi(\beta)$$

Dunque i morfismi di schemi affini tra $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sono in corrispondenza con gli omomorfismi di anelli tra B e A, ed è facile verificare che rispettano la composizione, dunque possiamo definire il funtore (controvariante) che associa ad ogni anello A lo sla $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$, e manda gli omomorfismi nei morfismi di schemi affini, creando così un'equivalenza tra le due categorie.

Dato un isomorfismo di schemi affini, l'omomorfismo di anelli indotto è un isomorfismo, poiché un isomorfismo di fasci è anche un isomorfismo di prefasci. Viceversa, un isomorfismo di anelli induce isomorfismi tra le spighe, e pertanto un isomorfismo di fasci, mentre la mappa indotta sugli spazi topologici è un omeomorfismo. □

Lemma 8.3 *dato un morfismo $(f, f^{\#})$, da $(X, \mathcal{O}_X)$ a $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ammette un morfismo inverso se e solo se f è un omeomorfismo, e $f^{\#}$ è un isomorfismo.*

Ed ora, finalmente, diamo la definizione di *schema*

Definition 8.4. Dato $(X, \mathcal{O}_X)$ uno sla, esso è detto **Schema** se ammette un ricoprimento aperto fatto da schemi affini.

Lemma 8.5 *Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno schema, $U \subseteq X$ è un aperto, e $V \subseteq X$ è uno degli schemi affini del ricoprimento di X, allora $U \cap V$ è ricoperto da schemi affini aperti. In particolare, tutti gli aperti sono schemi.*

Dimostrazione. V è uno schema affine, dunque possiamo supporre che $V = X$ (altrimenti ci restringiamo a V). $X = Spec(A)$ e se $p \in U$, allora esiste un intorno X_f di p contenuto in U. Ma $X_f \cong Spec(A_f)$, dunque U è ricoperto da schemi affini aperti. $\square$

Warning NON è detto che $U \cap V$ sia uno schema affine. Invece è vero che ogni schema ha una base di aperti affini, costituita dagli X_f di ogni schema affine che lo ricopre.

Come è fatto uno schema? Tutti gli schemi affini sono schemi, ma esistono schemi che non sono affini?
Example

- Dato $\mathbb{K}$ campo, $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} = Spec(\mathbb{K}[x,y])$, $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} - \{(x,y)\}$. Se induciamo su X il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}}$, otteniamo uno schema. Sappiamo che

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}}(X) = \mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}[x,y]$$

  Inoltre, $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow (\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}})$ è un morfismo di sla, e la mappa tra le sezioni globali è un isomorfismo, dunque se $X = Spec(A)$ è affine, allora $(f, f^{\#})$ induce un isomorfismo di anelli, e pertanto è lui stesso un isomorfismo di schemi affini, ma questo è impossibile, in quanto f non è un omeomorfismo. Dunque X è uno schema, ma non è affine.

Dato un anello base R, e A una R-algebra, allora esiste un omomorfismo di anelli $R \to A$, che induce un morfismo tra i rispettivi fasci da $Spec(A)$ a $Spec(R)$.
Se A, B sono R-algebre, un omomorfismo di R-algebre $A \to B$ commuta con la struttura di R-algebra, producendo un morfismo di sla che commuta con i morfismi con $Spec(R)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & B \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Spec(A) \arrow[dr] & & Spec(B) \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & Spec(R) & \end{tikzcd}$$

Definition 8.6. Dato S uno schema, allora uno **Schema su *S*** è uno schema $(X, \mathcal{O}_X)$ con un morfismo di schemi

$$X \to S$$

Definition 8.7. Dati X, Y schemi su S, definiamo un **Morfismo di Schemi su *S*** come un morfismo di schemi $X \to Y$ che commuti con i morfismi

$$X \to S \leftarrow Y$$

Definition 8.8. Se R è un anello, allora uno **Schema su $\boldsymbol{R}$** è uno schema su $Spec(R)$.

Example

- S è uno schema su sè stesso, con il morfismo identità.
- Se R è un anello, $\mathbb{A}^n_R$ è uno schema su R.
- Se X è uno schema su S, $\exists! X \to S$ morfismo di schemi su S, ossia S è un elemento terminale nella categoria degli schemi su S.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & S \arrow[dl, equal] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Theorem 8.9 *Dati X, Y sla, sia $\{ X_i \}$ un ricoprimento aperto di X, con $(f_i, f_i^{\#}) : X_i \to Y$ morfismi di sla tali che si incollino bene, allora esiste un unico incollamento $(f, f^{\#}) : X \to Y$ morfismo di sla t.c. $f|_{X_i} = f_i$.*

Dimostrazione. Sicuramente esiste un'unica funzione continua $f : X \to Y$ con quelle proprietà. Vediamo adesso come incollare le $f_i^{\#}$.

$$f_i^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to (f_i)_* \mathcal{O}_{X_i}(U) = \mathcal{O}_{X_i}(f_i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(f_i^{-1}(U))$$

ma le $f_i^{\#}$ si incollano bene, ossia

$$f_i^{\#}|_{f_i^{-1}(U) \cap X_j} = f_j^{\#}|_{f_j^{-1}(U) \cap X_i}$$

dunque per la condizione di fascio, riusciamo a definire una $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ che rispetti le condizioni. $\square$

9 06-11-14 - Incollamento e Unioni di Schemi

Dato uno schema X, un anello R, ed un morfismo di schemi $X \to Spec(R)$, otteniamo un morfismo di anelli

$$\mathcal{O}_{Spec(R)}(Spec(R)) = R \to \mathcal{O}_X(X)$$

Questo porta a dire che

Theorem 9.1 *Dato $(X, \mathcal{O}_X)$ uno schema, e R un anello, abbiamo una bigezione tra*

$$Mor(X, Spec(R)) \leftrightarrow Hom(R, \mathcal{O}_X(X))$$

Dimostrazione. Se X fosse affine, allora lo sapremmo già per teorema 8.2. Prendiamo allora $\{ X_i \}$ un ricoprimento fatto da schemi affini. Presi f, g morfismi da X in $Spec(R) = Y$, poniamo che vengano mandati nello stesso omomorfismo di anelli, ossia

$$f_Y^\# = g_Y^\# : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$$

Avremo che $f_i = f|_{X_i}$ e $f_i^\# = f^\#|_{X_i}$ si incollano bene, e dato che

$$(f_i^\#)_Y : \mathcal{O}_Y(Y) \stackrel{f_Y^\#}{\to} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_i) = \mathcal{O}_{X_i}(X_i)$$

allora $(f_i^\#)_Y = (g_i^\#)_Y$, e per teorema 8.2, $(f_i, f_i^\#)$ coincidono con i rispettivi $(g_i, g_i^\#)$, e dunque, per il teorema 8.9, $f = g$, assicurandoci l'iniettività della corrispondenza.

Per provare la suriettività, prendiamo $\varphi : R \to \mathcal{O}_X(X)$ un omomorfismo di anelli, e mostriamo che appartiene all'immagine. Presi $\{ X_i \}$ il ricoprimento di schemi affini aperti in X, definiamo φ_i come le ristrette di φ agli X_i, ossia $\varphi_i : R \to \mathcal{O}_X(X_i)$. Questi sono omomorfismi di anelli, dunque inducono i morfismi di schemi

$$f_i : X_i \to Spec(R) \qquad f_i^\# : \mathcal{O}_{Spec(R)}(U) \to \mathcal{O}_{X_i}(f_i^{-1}(U))$$

$$f_i(p) = \varphi_i^{-1}(p) \qquad f_i^\#(s)(p) = (\varphi_i)_{f(p)}(s_{f(p)})$$

ma le f_i si incollano bene, dunque esiste un unico morfismo di schemi incollamento $f : X \to Spec(R)$, e questo soddisfa che la sua immagine sia $\varphi = f_R^\# : R \to \mathcal{O}_X(X)$. □

Warning In questo caso, isomorfismi di anelli NON inducono isomorfismi di schemi, ma il viceversa è sempre vero.

Corollary 9.2 *Dato X uno schema, allora esiste un unico morfismo di schemi*

$$X \to Spec(\mathbb{Z})$$

Dimostrazione. esiste un unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X(X)$, poichè l'immagine di 1 è 1. Per teorema, dunque, esiste un unico morfismo di schemi da X a $Spec(\mathbb{Z})$ □

Un risultato che si ricava riguarda le strutture di R-algebra sugli schemi:

Corollary 9.3 *Dato R un anello, e X uno schema in cui $\mathcal{O}_X(X)$ sia una R-algebra, allora per ogni aperto $U \subseteq X$ esiste un'unica struttura di R-algebra su $\mathcal{O}_X(U)$ tale che le restrizioni siano omomorfismi di R-algebre, ossia che $\mathcal{O}_X$ risulti un fascio di R-algebre.*
Più precisamente, esiste una corrispondenza biunivoca tra le strutture di R-algebra su $\mathcal{O}_X$ e gli omomorfismi di anelli $R \to \mathcal{O}_X(X)$

Notiamo, in particolare, che gli omomorfismi di anelli indotti sugli aperti e sulle spighe preservano l'unità, dunque R non andrà mai a finire totalmente in zero, assicurando la struttura di R-algebra.

$$R \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U) \qquad R \to \mathcal{O}_X(X) \to (\mathcal{O}_X)_p$$

Definition 9.4. Dati X_1 e X_2 due schemi, con $U_1 \subseteq X_1$, $U_2 \subseteq X_2$ sottoschemi aperti, ed un isomorfismo di schemi $\varphi : U_1 \to U_2$, definiamo lo **Schema Incollato** di X_1 e X_2 come

$$\boldsymbol{X_1 \coprod_{\varphi} X_2} := \frac{X_1 \coprod X_2}{\sim} \qquad x_1 \sim x_2 \iff \varphi(x_1) = x_2$$

Dato uno schema incollato X, e la mappa di proiezione $X_1 \coprod X_2 \to X$, allora

- Esiste U aperto di X tale che $U_i \to U$ siano omeomorfismi per $i = 1, 2$.
- $X_i \hookrightarrow X$ sono mappe iniettive aperte per $i = 1, 2$.

Il problema è che nessuno ci dice che X sia effettivamente uno schema

Theorem 9.5 *Dati X_1 e X_2 due schemi, con $U_1 \subseteq X_1$, $U_2 \subseteq X_2$ sottoschemi aperti, ed un isomorfismo di schemi $\varphi : U_1 \to U_2$, allora esiste un unico schema X, a meno di isomorfismi, con due sottoschemi aperti X_1', X_2' tali che*

$$f_i : X_i' \cong X_i, \quad X = X_1 \cup X_2, \quad U = X_1 \cap X_2, \quad f_i^{-1}(U) = U_i$$

e che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1|_{U_1}"'] & & U_2 \arrow[dl, "f_2|_{U_2}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Il fascio $\mathcal{O}_X$ dello schema incollato sarà definito come un sotto fascio del prodotto dei fasci di X_1 e X_2:

$$\mathcal{O}_X(V) = \big\{(s_1, s_2) \in \mathcal{O}_{X_1}(f_1^{-1}(V)) \times \mathcal{O}_{X_2}(f_2^{-1}(V)) \;\big|$$

$$s_1|_{U_1 \cap f_1^{-1}V} = \varphi^{\#} s_2|_{U_2 \cap f_2^{-1}V} \}$$

dove

$$\varphi(U_1 \cap f_1^{-1}V) = U_2 \cap f_2^{-1}V$$

Example

- Se $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = Spec(\mathbb{K}[x])$, e $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} - \{(x)\}$, allora lo schema X incollamento è un $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ con un punto doppio[1]. Questo X è uno schema, poichè ricoperto da X_1 e X_2, ma non è affine:

$$\mathcal{O}_X(X) = \{\, (s_1, s_2) \in \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] : s_1 = s_2 \text{ su } \mathbb{K}[x]_x \,\} = \mathbb{K}[x]$$

$$\implies X = Spec(\mathbb{K}[x]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \ \lightning$$

- Prendiamo come prima $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, e $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} - \{(x)\}$, ma stavolta prendiamo un diverso isomorfismo tra gli U_i:

$$U_i = \mathbb{K}[x_i^{\pm 1}], \quad \varphi : U_1 \to U_2 : \varphi(x_1) = x_2^{-1}$$

  Stavolta l'incollamento è tale che

$$\mathcal{O}_X(X) = \{\, (s_1, s_2) \in \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] : s_1(x) = s_2(x^{-1}) \text{ su } \mathbb{K}[x]_x \,\}$$

  Che chiameremo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$

Costruiamo ora uno schema unendo degli schemi affini, senza incollarli (o, se vogliamo, incollandoli scegliendo come aperto il vuoto).

Definition 9.6. Dati X_i degli sla, allora la loro **Unione Disgiunta** è lo spazio topologico $X := \coprod_i X_i$, dove gli aperti sono le unioni disgiunte degli aperti in X_i.

Lemma 9.7 *Dati X_i sla, e X la loro unione disgiunta, esiste un unico fascio di anelli $\mathcal{O}_X$ che renda X uno sla, e tale che $\mathcal{O}_X|_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$ $\forall i$. In particolare, se U è un aperto di X,*

$$U = \coprod_i U_i \implies \mathcal{O}_X(U) = \prod_i \mathcal{O}_{X_i}(U_i)$$

Lemma 9.8 *Dati X_i sla, e X la loro unione disgiunta, allora*

- *Se X_i sono schemi, lo è anche X.*
- *Se $X_i = Spec(A_i)$ sono finiti schemi affini, allora lo è anche X, ed in particolare $X = Spec(\times A_i)$.*
- *Se X_i sono schemi affini, allora X è uno schema affine se e solo se gli X_i sono finiti. (Se X è affine, allora è quasi compatto, ma gli X_i formano un ricoprimento aperto infinito)*

[1] Detto "Linea con 2 origini"

10 12-11-14 - Costruzione Proiettiva

Dato un anello graduato (su $\mathbb{N}$)

$$B = B_0 \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$$

chiamiamo gli elementi nei B_i omogenei di grado i. B_0 è un sottoanello di B, e lo rende una B_0 algebra. Definiamo

$$\boldsymbol{B_+} := B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$$

ideale di B tale che $B_0 = B/B_+$. Esso è un particolare caso di *ideale omogeneo*.

Definition 10.1. Dato un ideale I di un anello graduato B, questo è **Omogeneo** se vale una delle seguenti due condizioni equivalenti

- I è generato da elementi omogenei
- Le componenti degli elementi di I stanno in I, ossia

$$I \cong \bigoplus_i (I \cap B_i)$$

D'ora in poi, per dire che un ideale I è omogeneo in un anello graduato B, scriveremo

$$I \triangleleft B$$

Gli ideali omogenei si comportano bene per somma, prodotto, intersezione e quoziente, ossia

- Dato $I \triangleleft B$, allora B/I è un anello graduato, dove

$$\left(\frac{B}{I}\right)_d = \frac{B_d}{I \cap B_d}$$

- Se $I_i \triangleleft B$, allora $\cap I_i$ e $\sum I_i$ sono omogenei.
- Se $I, J \triangleleft B$, allora $I \cdot J \triangleleft B$

Lemma 10.2 *Prendiamo $I \triangleleft B$. Allora*

1. *I è primo se e solo se per ogni coppia di elementi omogenei a, b, vale*

$$ab \in I \implies a \in I \vee b \in I$$

2. *I è radicale se e solo se per ogni elemento omogeneo vale*

$$a^n \in I \implies a \in I$$

3. *$\sqrt{I}$ omogeneo*

Dimostrazione.

1) Proviamo che B/I è un dominio. Sappiamo che è graduato, dunque prendiamo due elementi non nulli x, y, che avranno le loro scritture $x = \sum^n x_i$, $y = \sum^m y_i$ in componenti omogenee, con $x_n, y_m \neq 0$. Dunque

$$xy = 0 = x_n y_m + \cdots \implies x_n y_m = 0$$

ma se prendiamo a, b controimmagini di x_n, y_m in B, questi saranno elementi omogenei tali che $ab \in I$, dunque uno dei due sarà in I. ↯

$3 \implies 2$) Se $\sqrt{I}$ è omogeneo, e $a \in B$ è omogeneo, allora

$$a \in \sqrt{I} \implies a^n \in I \implies a \in I$$

ma $\sqrt{I}$ è generato da elementi omogenei, dunque $\sqrt{I} = I$.

3) Sia $a \in \sqrt{I}$, e $a = \sum^m a_i$ la sua scrittura in componenti omogenee, con $a_m \neq 0$. Allora

$$a^n \in I \implies a_m^n \in I \implies a_m \in \sqrt{I} \implies \sum^{m-1} a_i \in \sqrt{I}$$

e così via. □

Notiamo che possiamo dare anche un concetto di ideale omogeneo massimale contenuto in un ideale I come

$$\boldsymbol{I^h} = \bigoplus I \cap B_i$$

Lemma 10.3 *dato P ideale primo di B anello graduato, allora P^h è primo (e lo stesso vale per la radicalità)*

Dimostrazione. $P^h \subseteq P$ è omogeneo, e se prendiamo due elementi omogenei a, b, allora

$$ab \in P^h \implies ab \in P \overset{wlog}{\implies} a \in P \implies a \in P^h$$

dunque P^h è primo. □

Gli anelli graduati più classici sono gli anelli di polinomi. Se prendiamo $\mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, allora i sottospazi di $\mathbb{K}^{n+1}$ sono varietà associate ad ideali omogenei, poiché saranno intersezioni di iperpiani, che sono descritti da equazioni lineari omogenee. (L'inverso non è vero, per esempio $(x_0^2 - x_1^2)$ è omogeneo, ma non descrive un sottospazio. Invece è sempre vero che le varietà associate ad ideali omogenei sono coni)
L'unico ideale massimale omogeneo qui sarà $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, che corrisponde come varietà al punto zero, ed è l'ideale $\mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]_+$. Togliendolo, gli ideali primi omogenei associati a rette in $\mathbb{K}^{n+1}$ saranno elementi massimali nel set degli ideali omogenei, poiché gli ideali che corrispondono ad un insieme finito di punti non sono omogenei.(in quanto, nell'ipotesi di campo infinito, finiti punti non formano un cono)

Definition 10.4.

$$\boldsymbol{Proj(B)} = \{\, P \lhd B : P \text{ primo}, \; B_+ \not\subseteq P \,\}$$

Notiamo che gli ideali primi omogenei di B che contengono B_+ sono le controimmagini degli ideali primi in B_0 in $B/B_+ \cong B_0$.
Inoltre $Proj(B)$ sarà vuoto solo quando tutti gli ideali primi omogenei contengono B_+, ma se P è primo, allora P^h è primo e omogeneo, dunque questo succede solo quando B_+ sta nel nilradicale di B, poiché

$$N(B) = \bigcap_{P \in Spec(B)} P = \bigcap_{P \in Spec(B)}^{P \lhd B} P$$

Definition 10.5. Dato $I \lhd B$,

$$\boldsymbol{V_+(I)} = \{\, P \in Proj(B) : I \subseteq P \,\}$$

Prendendo $V_+(I)$ come chiusi di una topologia su $Proj(B)$, otteniamo di nuovo una topologia di Zariski, con

Lemma 10.6

1. $V_+(B) = \emptyset$, $V_+(0) = Proj(B)$
2. $\cap V_+(I_i) = V_+(\sum I_i)$
3. $V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(I \cap J) = V_+(I \cdot J)$
4. *La topologia di $Proj(B)$ è indotta dalla topologia di $Spec(B)$.*
5. $V_+(I) = V_+(\sqrt{I})$
6. $V_+(I) \cong Proj(B/I)$
7. $V_+(I) = V_+(I \cap B_+)$
8. $V_+(I) \subseteq V_+(J) \iff J \cap B_+ \subseteq \sqrt{I}$

Dimostrazione. Mostriamone solo alcuni:

6) Presa $\pi : B \to B/I$, allora

$$Proj(B/I) \to Proj(B) : q \mapsto \pi^{-1}(q)$$

è ben definita ed iniettiva, con immagine $V_+(I)$.

7)
$$V_+(I \cap B_+) = V_+(I) \cup V_+(B_+) = V_+(I)$$

8) Se $J \cap B_+ \subseteq \sqrt{I}$, allora

$$V_+(I) = V_+(\sqrt{I}) \subseteq V_+(J \cap B_+) = V_+(J)$$

Viceversa, se $V_+(I) \subseteq V_+(J)$, poniamo che

$$J \cap B_+ \not\subseteq \sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$$

ossia esiste un primo P contenente I tale che $J \cap B_+ \not\subseteq P$. P^h è primo, e $I \subseteq P^h$ poiché I è omogeneo, ma allora

$$P^h \in V_+(I) \subseteq V_+(J) \quad \vee \quad B_+ \subseteq P^h \implies J \cap B_+ \subseteq P \lightning$$

$\square$

In questo caso, non abbiamo una corrispondenza tra ideali radicali e chiusi della topologia, poiché per esempio $V_+(B_+) = V_+(B) = \emptyset$, e B_+ è radicale quando B_0 è ridotto. Questo è dato anche dal fatto che

$$\sqrt{B_+} = N(B_0) \oplus B_+, \qquad I \subseteq B_+ \implies \sqrt{I} = N(B_0) \oplus (\sqrt{I} \cap B_+)$$

Vale invece

Lemma 10.7 *Vi sono le bigezioni*

1.
$$\{ \text{ chiusi in } Proj(B) \} \leftrightarrow \left\{ I \triangleleft B : I \cap B_0 = N(B_0),\ I = \sqrt{I} \right\}$$

2. Se B_0 è un campo,

$$\{ \text{ chiusi in } Proj(B) \} \leftrightarrow \left\{ I \triangleleft B : I \neq B,\ I = \sqrt{I} \right\}$$

Dimostrazione.

1) sicuramente, con gli ideali omogenei radicali generiamo tutti i chiusi, ed inoltre

$$V_+(I) = V_+(I \cap B_+) = V_+(\sqrt{I \cap B_+}) = V(N(B_0) \oplus (\sqrt{I} \cap B_+))$$

dunque prendiamo solo i J radicali che intersecati con B_0 diano $N(B_0)$. Se ora I, J sono due tali ideali, con $V_+(I) = V_+(J)$, allora

$$J \cap B_+ \subseteq \sqrt{I} = I, \quad I \cap B_+ \subseteq \sqrt{J} = J \implies I \cap B_+ = J \cap B_+ \implies$$
$$\implies I = N(B_0) \oplus (I \cap B_+) = N(B_0) \oplus (J \cap B_+) = J$$

2) Se B_0 è un campo, allora $N(B_0) = 0$, e $B_0 = B^*$, dunque

$$I \cap B_0 = 0 \iff I \neq B$$

$\square$

Localizzando un anello graduato mediante un insieme moltiplicativamente chiuso che contiene solo elementi omogenei, si ottiene ancora un anello graduato, stavolta con gradi in $\mathbb{Z}$:

$$(S^{-1}B)_d = \left\{ \frac{a}{s} : a \in B \text{ omogeneo, } deg(a) - deg(s) = d \right\}$$

$$S^{-1}B = \bigoplus (S^{-1}B)_d$$

In particolare, $(S^{-1}B)_0$ è un sottoanello

Example

- Se $f \in B$ è omogeneo, allora $B_f = \{1, f, f^2, \dots\}^{-1} B$ è una localizzazione omogenea
- Se $P \in Proj(B)$, siano $\boldsymbol{S_P}$ gli elementi omogenei in P^c. Allora S_p è moltiplicativamente chiuso.

Definition 10.8. Se S è un insieme moltiplicativamente chiuso in B, composto da soli elementi omogenei, allora si dice che $(S^{-1}B)_0$ è una **Localizzazione Omogenea**, e si indica con

$$\boldsymbol{B_{(P)}} := (S_P^{-1}B)_0$$

Definition 10.9. Se f è un elemento omogeneo di B,allora

$$\boldsymbol{B_{(f)}} := (B_f)_0$$

Warning Bisogna stare attenti al contesto: $B_{(f)}$ può indicare l'oggetto appena definito, oppure la localizzazione dell'anello B rispetto all'ideale primo (f).

Un esempio famoso è l'omogeneizzazione dei polinomi. Infatti se $B = \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, allora

$$B_{(x_0)} = \mathbb{K}\left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$$

Se ora prendiamo un elemento $f \in B$ omogeneo, e chiamiamo

$$X = Proj(B), \quad X_f = X - V_+(f)$$

allora X_f è un aperto, e al variare di f ricoprono tutto X, poiché

$$\bigcup X_f = \bigcup (X - V_+(f)) = X - \bigcap V_+(f) = X - V_+\left(\sum (f)\right) = X$$

Se $f \in B_+$ omogeneo, allora

$$P \in X_f \implies f \notin P \implies P_f \subseteq B_f$$

e possiamo definire

Definition 10.10.

$$\boldsymbol{P(f)} := P_f \cap B_{(f)} = (P_f)_0$$

Lemma 10.11 *La funzione*

$$F : X_f \to Spec(B_{(f)}) : P \mapsto P(f)$$

è un omeomorfismo con inversa

$$G : Spec(B_{(f)}) \to X_f : Q \mapsto \left\langle \left\{ a \in B \text{ omo} \,\middle|\, \exists m > 0, n \geq 0 : \frac{a^m}{f^n} \in Q \right\} \right\rangle$$

Dimostrazione. Dimostriamo la buona definizione di F e G.
Dato $Q \in Spec(B_{(f)})$, $G(Q)$ è un ideale omogeneo che non contiene f, poiché altrimenti f sarebbe combinazione finita di alcuni generatori omogenei a_i, ma se $a_i^{m_i}/f^{n_i} \in Q$, allora

$$f = \sum a_i c_i, \ \ c_i \text{ omogenei} \implies f^{\sum m_i} = \sum a_i^{m_i} c_i' \implies 1 = \sum \frac{a_i^{m_i}}{f^{n_i}} \frac{c_i'}{f^{\alpha_i}} \in Q$$

Possiamo testarne la primalità su elementi omogenei: se a, b sono omogenei in B, e $ab \in G(Q)$, allora

$$ab = \sum a_i c_i, \ \ c_i \text{ omogenei} \implies (ab)^{\deg f \sum m_i} = \sum a_i^{m_i \deg f} c_i'$$

$$\implies \frac{(ab)^{\deg f \sum m_i}}{f^{\deg(ab) \sum m_i}} = \sum \left(\frac{a_i^{m_i}}{f^{n_i}} \right)^{\deg f} \frac{c_i'}{f^{\alpha_i}} \in Q$$

$$\implies \frac{a^{\deg f \sum m_i}}{f^{\deg a \sum m_i}} \in Q \ \vee \ \frac{b^{\deg f \sum m_i}}{f^{\deg b \sum m_i}} \in Q \implies a \in G(Q) \ \vee \ b \in G(Q)$$

Dato $P \in X_f$, allora $P(f)$ è un ideale primo di $Spec(B_{(f)})$, oppure è tutto l'anello , ma $1 \in P(f) \implies 1 \in P_f \implies P_f = B_f$, e questo è impossibile poiché $X_f \subseteq Spec(B_f)$. Inoltre, abbiamo che

$$F(P) = P(f) = \left\{ \frac{p}{f^n} \in B_f \,\middle|\, p \in P \text{ omogeneo }, \deg(p) = n \deg(f) \right\}$$

ma per ogni elemento $p \in P$ omogeneo, $p^{\deg f}/f^{\deg p} \in P(f)$, e se $p/f^n = a/f^m$, allora $a \in P$. Ciò ci dice che

$$P \subseteq G(P(f)) = G(F(P)) \subseteq P \implies P = G(F(P))$$

Viceversa, è facile vedere che $Q \subseteq F(G(Q))$, mentre

$$\frac{a}{f^r} \in F(G(Q)) \implies a \in G(Q) \implies \frac{a^m}{f^n} \in Q \quad mr \deg f = m \deg a = n \deg f$$

$$\implies \frac{a^{rm}}{f^{rn}} = \left(\frac{a}{f^r}\right)^n \in Q \implies \frac{a}{f^r} \in Q \implies F(G(Q)) \subseteq Q \implies F(G(Q)) = Q$$

Dunque F e G sono inverse, ed inoltre F mantengono l'inclusione, ossia

$$P \subseteq P' \implies F(P) \subseteq F(P') \qquad Q \subseteq Q' \implies G(Q) \subseteq G(Q')$$

pertanto sono anche continue. $\square$

Questo ci dice, in particolare, che $Proj(B)$ è ricoperto da $Spec(B_{(f)})$, e dunque ci avviciniamo a dare una struttura di schema a $Proj(B)$.

11 13-11-14 - Schema Proiettivo e Punti Razionali

Preso B anello graduato, $X = Proj(B)$, P un elemento di X, e $f \notin P$, allora f è invertibile in B_P, e otteniamo un omomorfismo

$$B \to B_f \to B_P \implies B_0 \to B_{(f)} \to B_{(P)}$$

Inoltre,

Lemma 11.1

$$B_{(P)} \cong \left(B_{(f)}\right)_{P(f)} \quad e \quad B_{(fg)} \cong (B_f)_{(g)}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$B_{(P)} = \left\{ \frac{b}{s} \;\middle|\; b \in B \text{ omo}, s \notin P \text{ omo}, \deg b = \deg s \right\}$$

$$\left(B_{(f)}\right)_{P(f)} = \left\{ \frac{b}{f^n} / \frac{s}{f^m} \;\middle|\; b \in B \text{ omo}, s \notin P \text{ omo}, \; \frac{b}{f^n}, \frac{s}{f^m} \in B_{(f)} \right\}$$

e dato che f è omogeneo, e non appartiene a P, possiamo definire una mappa

$$\left(B_{(f)}\right)_{P(f)} \to B_{(P)} : \frac{b}{f^n} / \frac{s}{f^m} \mapsto \frac{bf^m}{sf^n}$$

Questa è iniettiva poiché

$$\frac{bf^m}{sf^n} = \frac{0}{1} \implies tbf^m = 0, t \notin P \text{ omo} \implies \frac{tbf^m}{f^{n+m}} / \frac{st}{f^m} = \frac{bf^m}{sf^n} = 0$$

Ed è suriettiva poiché

$$\frac{bs^{\deg f - 1}}{f^{\deg s}} / \frac{s^{\deg f}}{f^{\deg s}} \mapsto \frac{b}{s}$$

□

Essendo la localizzazione per un primo, $B_{(P)}$ è un anello locale.
Abbiamo già visto che X è coperto da X_f, quindi definiamo un fascio su X analogo a quello fatto per $Spec(A)$. Preso U aperto in X,

$$\widetilde{\mathcal{O}}_X(U) = \left\{ \alpha : U \to \coprod_{P \in U} B_{(P)} \;\middle|\; \alpha(p) \in B_{(P)} \right\}$$

e dunque ne estraiamo un sottofascio

$$\boldsymbol{\mathcal{O}_X}(U) = \Big\{ \alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}_X(U) \;\mid\; \forall P \in U \;\; \exists f \in B_+, \; a \in B \text{ omo}, \; n \in \mathbb{N} : \\ P \in X_f \subseteq U, \;\; \alpha(q) = \frac{a}{f^n} \in B_{(q)} \;\; \forall q \in X_f \Big\}$$

Otteniamo uno sla, che come sopra soddisfa

- $(\mathcal{O}_X)_P \cong B_{(P)} \;\; \forall P \in X$ tramite $[(s, U)]_P \mapsto s(P)$
- $\mathcal{O}_X(X_f) \cong B_{(f)}$

ma dato che $X_f \cong Spec\left(B_{(f)}\right)$, $X = Proj(B)$ acquista una struttura di schema. Per teorema 9.1, avremo che i morfismi di schemi $X \to Spec(B_0)$ sono in corrispondenza biunivoca con gli omomorfismi di anelli $B_0 \to \mathcal{O}_X(X)$, dunque all'omomorfismo

$$B_0 \to \mathcal{O}_X(X) : a \mapsto \left(P \mapsto \frac{a}{1} \in B_{(P)}\right)$$

corrisponderà un morfismo di schemi che rende X uno schema su B_0. Definiamo dunque i principali schemi con cui lavoriamo

Definition 11.2. Dato R un anello, allora

$$\mathbb{P}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{R}} := Proj\left(R[x_0, x_1, \dots, x_n]\right)$$

$$\mathbb{P}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{R}}(d_0, d_1, \dots, d_n) := \mathbb{P}^n_R \text{ dove } deg(x_i) = d_i$$

Se $B = R[x_0, x_1, \dots, x_n]$, con $B_+ = (x_0, \dots, x_n)$, allora

$$U_i = (\mathbb{P}^n_R)_{x_i} \cong Spec\left(B_{(x_i)}\right) = Spec\left(\mathbb{K}\left[\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]\right) \cong \mathbb{A}^n_R$$

sono un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^n_R$ fatto con schemi affini.
Nei casi base, avremo

$$\mathbb{P}^0_R = Proj(R[x]) = Spec(R[x]_{(x)}) = Spec(R)$$

$$\mathbb{P}^1_R = U_0 \cup U_1, \quad U_0 \cap U_1 = Spec\left(R[x_0, x_1]_{(x_0 x_1)}\right) = Spec(R[x]_x)$$

Inoltre

Lemma 11.3 *Se $X = \mathbb{P}^n_R$, allora*

$$\mathcal{O}_X(X) \cong R$$

Dimostrazione. Sia $B = R[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Grazie al teorema 4.8 sappiamo che

$$\mathcal{O}_X(X) \cong \ker\left(\prod_i \mathcal{O}_X(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{O}_X(U_{ij})\right)$$

Ma preso un elemento nella produttoria degli $\mathcal{O}_X(U_i)$, avremo che sta nel kernel se

$$\left(\frac{a_0}{x_0^{m_0}}, \dots, \frac{a_n}{x_n^{m_n}}\right) \in \ker\left(\prod_i \mathcal{O}_X(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{O}_X(U_{ij})\right) \implies$$

$$\frac{a_i}{x_i^{m_i}} = \frac{a_j}{x_j^{m_j}} \implies x_i^{m_i} | a_j,\ x_j^{m_j} | a_i \implies \frac{a_i}{x_i^{m_i}} \in R \ \forall i$$

ovvero l'elemento preso è un elemento di R. $\square$

Lemma 11.4 *$X = \mathbb{P}^n_R$ è uno schema affine solo se $R = 0$ o $n = 0$*

Dimostrazione. $\mathcal{O}_X(X) \cong R$ induce un morfismo $\mathbb{P}^n_R \to Spec(R)$, definito come

$$P \in Proj(B) \mapsto P \cap R$$

e se X fosse uno schema affine, sarebbe un isomorfismo. Ma l'applicazione è iniettiva solo se $n = 0$ o $R = 0$, poiché altrimenti l'ideale omogeneo $P + (x_0)$ si restringerebbe a P assieme allo stesso ideale P. □

Warning Dato $X = Proj(B)$, non è possibile ricostruire B, poiché esistono diversi B con lo stesso $Proj$. Per esempio, dato un campo qualsiasi $\mathbb{K}$, il $Proj(\mathbb{K}[x])$ consiste solo dell'ideale (0).

Se prendiamo uno schema X su $\mathbb{K}$, ossia un morfismo $X \to Spec(\mathbb{K})$, allora $\mathcal{O}_X$ è un fascio di $\mathbb{K}$-algebre, e le spighe sono $\mathbb{K}$-algebre locali. Dunque definiamo

Definition 11.5. Dato uno sla di $\mathbb{K}$-algebre X, un suo elemento $p \in X$, $(\mathcal{O}_X)_p$ e m_p la sua spiga e il rispettivo ideale massimale, allora p si dice **Razionale** se

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}\boldsymbol{(p)} := \frac{(\mathcal{O}_X)_p}{m_p}$$

Il luogo dei punti razionali di X è denotato da $\boldsymbol{X(}\mathbb{K}\boldsymbol{)}$

Lemma 11.6 *Dato $X = Spec(A)$ $\mathbb{K}$-schema affine, allora $p \in X$ è razionale se e solo se $\mathbb{K} = A/p$.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{K} = A/p$, allora p è razionale poiché

$$\mathbb{K}(p) = \frac{A_p}{pA_p} = Q(A/p) = \mathbb{K}$$

Viceversa, se p è razionale, allora $\mathbb{K} = Q(A/p)$, ma A/p è un dominio ed una $\mathbb{K}$-algebra, dunque dato $x \in A/p$, esiste $y \in \mathbb{K}$ per cui

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} \implies s(x-y) = 0, \quad s \in A/p - \{0\} \implies x = y$$

pertanto $A/p = \mathbb{K}$ □

Dunque i punti razionali negli affini sono ideali massimali, e sono in corrispondenza biunivoca con gli omomorfismi di $\mathbb{K}$-algebre da A in $\mathbb{K}$, che a loro volta sono in corrispondenza con i morfismi di schemi affini $Spec(\mathbb{K}) \to X$ (che NON sono in corrispondenza con gli elementi di X)

$$X(\mathbb{K}) \leftrightarrow Hom(A \twoheadrightarrow \mathbb{K}) \leftrightarrow Mor(Spec(\mathbb{K}), X)$$

Se X è uno schema, ma non affine, i punti razionali sono comunque chiusi, poiché se ci restringiamo negli schemi affini che contengono il punto, le spighe non cambiano, quindi avremmo comunque $\mathbb{K}(p) = \mathbb{K}$, dunque il punto è chiuso in ogni aperto di un ricoprimento aperto.

Example

- $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$ poiché è uno schema affine, dunque i punti razionali sono omomorfismi $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}$
- $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$, $X = Spec(A) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sottoschema affine. Allora $X(\mathbb{K}) = Hom(A, \mathbb{K}) = Specm(A)$ (l'ultima uguaglianza è vera se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso)

L'ultimo esempio ci dice in particolare che i punti razionali di una k-algebra finitamente generata, con campo algebricamente chiuso, sono tutti e soli gli ideali massimali, per Nullstellensatz.

Lemma 11.7 *Se $f : X \to Y$ è un morfismo di $\mathbb{K}$-schemi, allora immagini di punti razionali sono punti razionali*

Dimostrazione. Dato $p \in X$, sappiamo che la mappa $(\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \to (\mathcal{O}_X)_p$ è locale, dunque

$$\frac{(\mathcal{O}_Y)_{f(p)}}{m_{f(p)}} \cong \frac{(\mathcal{O}_X)_p}{m_p}$$

pertanto se p è razionale, lo è anche $f(p)$. □

Se B è graduato, siano $Y = Spec(B) - V(B_+)$ e $X = Proj(B)$. Sicuramente $Y = \cup_{i \neq 0} \cup_{f \in B_i} Y_f = \cup_{i \neq 0} \cup_{f \in B_i} Spec(B_f)$, ma è vero anche che $X_f = Spec\left(B_{(f)}\right)$, dunque possiamo incollare le mappe $\varphi_f : Y_f \to X_f$ per ottenere la mappa $\varphi : Y \to X$

Punti Razionali di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

Utilizzando il fatto sopra, abbiamo una mappa

$$\varphi : \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} - \{\, (x_0, \ldots, x_n) \,\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

con $Y = \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} - \{\, (x_0, \ldots, x_n) \,\} = \cup(Y - V(x_i)) = \cup Y_{x_i}$,

$$Y_{x_i} = Spec(\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{x_i}) \quad Y_{x_i}(\mathbb{K}) = \left\{\, (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} : a_i \neq 0 \,\right\}$$

e $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \cup X_{x_i}$, dove

$$X_{x_i} = Spec(\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)})$$

Le mappe $\varphi_i : Y_{x_i} \to X_{x_i}$ mandano i punti razionali in paunti razionali, e sono suriettive, dunque possiamo calcolare

$$X_{x_i}(\mathbb{K}) = \varphi_i(Y_{x_i}(\mathbb{K})) = \left\{ \left(\frac{a_0}{a_i}, \frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i} \right) : a_i \neq 0 \right\}$$

e dedurre che

$$X(\mathbb{K}) = \cup_i X_{x_i}(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n = (\mathbb{K}^{n+1} - 0)/\mathbb{K}^*$$

12 20-11-14 - Embedding Chiusi e Pullback

Definition 12.1. Dati due schemi X, Y, un **Embedding Chiuso** è un morfismo di schemi $f : X \to Y$ tale che

- f sia un embedding chiuso tra spazi topologici
- $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ sia un omomorfismo di fasci suriettivo

Idealmente, abbiamo un embedding chiuso quando riusciamo ad estendere le sezioni su X a sezioni su tutto Y.

Data la prima condizione, la seconda può essere riformulata in

- $f_p^\# : (\mathcal{O}_Y)_p \to (\mathcal{O}_X)_p$ è un omomorfismo suriettivo $\forall p \in X$

Infatti, $(f_*\mathcal{O}_X)_p \cong (\mathcal{O}_X)_p$, ed inoltre $Y - X$ è aperto, con $f_*\mathcal{O}_X|_{X-Y} = 0$.

Lemma 12.2 *Dati A, B, anelli, $\varphi : B \to A$ omomorfismo di anelli, che induce $f : X \to Y$ morfismo di schemi affini, dove $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$, allora*

$$f \text{ è un embedding chiuso} \iff \varphi \text{ suriettivo}$$

Dimostrazione. Sicuramente, se f è un embedding chiuso, allora $\varphi = f_B^\#$ è suriettivo. Se poniamo adesso che φ sia suriettiva, chiamiamo $I = \ker \varphi$ ideale di B. Avremo che

$$A \cong B/I \implies f : X = Spec(A) = Spec(B/I) = V(I) \hookrightarrow Spec(B) = Y$$

dunque l'immagine di f è omeomorfa a X e chiusa in Y. Inoltre

$$f_p^\# : (\mathcal{O}_X)_p = A_p \twoheadrightarrow B_{f(p)} = (\mathcal{O}_Y)_{f(p)}$$

Dunque f è un embedding chiuso. $\square$

Definition 12.3. Dati tre schemi Y, Y', X e due embedding chiusi $f : Y \to X$, $f' : Y' \to X$, allora sono **Equivalenti** se esiste un isomorfismo di schemi $Y \cong Y'$ che commuti con f, f'.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Notiamo che dato un embedding chiuso $f : Y \to X$, allora la conoscenza del fascio $f_*\mathcal{O}_Y$, identifica in maniera unica $Imm(f)$. Infatti

$$p \notin f(Y) \implies (f_*\mathcal{O}_Y)_p = 0 \quad p \in f(Y) \implies (f_*\mathcal{O}_Y)_p = (\mathcal{O}_Y)_{f^{-1}(p)} \neq 0^1$$

Dunque un isomorfismo di schemi $f'_*\mathcal{O}_Y \cong f_*\mathcal{O}_Y$ porta ad un isomorfismo di spazi topologici, che rende f, f' equivalenti. Questo ci dice che per testare l'equivalenza tra due morfismi, ci basta trovare un isomorfismo di fasci.
Se chiamiamo ora $Y' = Imm(f)$, è facile verificare che l'immersione di $(Y', f_*\mathcal{O}_Y|_{Y'})$ in X è equivalente ad f, quindi si dice che ogni embedding chiuso ha un *rappresentante canonico* in X.

Definition 12.4. Dato F fascio su X, allora definiamo il **Supporto** di F come

$$\boldsymbol{Supp(F)} := X - \left\{p \in X \;\middle|\; \exists U \text{ intorno aperto di } p : F|_U = 0\right\}$$

o anche

$$Supp(F) = \overline{\{\, p \in X \mid F_p \neq 0 \,\}}$$

Lemma 12.5 *Le due definizioni di Supporto di un fascio sono equivalenti.*

Dimostrazione. Se chiamiamo

$$A = \left\{p \in X \;\middle|\; \exists U \text{ intorno aperto di } p : F|_U = 0\right\}$$

$$C = \{\, p \in X \mid F_p \neq 0 \,\}$$

allora A è aperto, e

$$A \subseteq \{\, p \in X \mid F_p = 0 \,\} = C^c \implies X - A = A^c \supseteq C \implies X - A \supseteq \overline{C}$$

Preso ora $p \in X - A$, poniamo che esista un suo intorno $p \in U$ che non intersechi C. Allora le spighe in tutti i punti di U sono nulle, e dunque, presa $s \in F(U)$, avremo per ogni $q \in U$ un intorno di Q in cui s si annulla, ma essendo F un fascio, anche $s = 0$. Dunque $F(U) = 0$ e $p \in A$, assurdo. □

Se $j : Y \subseteq X$ è un embedding chiuso come spazi topologici, e F un fascio su X, allora

$$Supp(F) \subseteq Y \iff F|_{X-Y} = 0$$

mentre se G è un fascio su Y,

$$Supp(j_*G) = Supp(G) \subseteq Y$$

Lemma 12.6 *Se $j : Y \subseteq X$ è un embedding chiuso come spazi topologici, allora tutti i fasci su X con supporto in Y sono isomorfi a j_*G per qualche G fascio su Y.*

[1]questo è vero perché Y è uno schema, quindi ci restringiamo nello schema affine. Cosa succederebbe se Y fosse solo uno sla?

Sicuramente j_* è un funtore che porta fasci su Y in fasci su X con supporto in Y. Per mostrare il lemma, però, abbiamo bisogno di un funtore inverso. Per questo definiamo il *Pullback di Fasci*

Definition 12.7. Dato $f : Y \to X$ funzione continua tra spazi topologici, definiamo il **Pullback di Prefasci** come un'operazione che, dato P un prefascio su X, restituisce un prefascio su Y

$$(\boldsymbol{f^p P})(V) = \varinjlim_{U \in I_V} P(U)$$

dove V è un aperto di Y, e

$$I_V = \{ U \subseteq X \text{ aperto } \mid f(V) \subseteq U \}$$

Dove il limite inverso è una generalizzazione del concetto di spiga:

$$\varinjlim_{U \in I_V} P(U) = \{ (s, U) : U \in I_v, s \in P(U) \} \ / \sim_V$$

$$(s, U) \sim_V (t, U') \iff \exists W \in I_V : W \subseteq U \cap U',\ s|_W = t|_W$$

Difatti, se $f : Y = \{ q \} \subseteq X$ è un punto, allora

$$(f^p P)(Y) = P_q$$

Più in generale, se $Y = \{ q \}$ è un punto, e $f : Y \to X$ una funzione continua,

$$(f^p P)(Y) = P_{f(q)}$$

o ancora più in generale,

Lemma 12.8 *Se $y \in Y$, allora*

$$(f^p P)_y \cong P_{f(y)}$$

Se f è una funzione aperta, allora $f(V)$ è un aperto, dunque è contenuto in $I(V)$, e tutte le sezioni vi si restringono:

$$(f^p P)(V) = P(f(V))$$

Warning Il pushforward e il pullback NON sono operazioni inverse

Lemma 12.9 *Pullback e Pushforward sono* Funtori Aggiunti*, ossia dati P, Q prefasci su X, Y, e $f : Y \to X$ continua, esiste un isomorfismo canonico*

$$Hom_Y(f^p P, Q) \leftrightarrow Hom_X(P, f_* Q)$$

Dimostrazione. Prendiamo $\varphi \in Hom_X(P, f_*Q)$. Dato V aperto in Y, e una sezione $s \in (f^pP)(V)$, questo viene da una sezione $\bar{s} \in P(U)$, con $V \subseteq f^{-1}(U)$. Dunque definiamo un omomorfismo $\psi \in Hom_Y(f^pP, Q)$ come

$$\psi(s) = \varphi(\bar{s})|_V \in f_*Q(U)|_V = Q(f^{-1}(U))|_V = Q(V)$$

Questa non dipende dalla scelta di U e $\bar{s}$.

Nell'altra direzione, data $\psi \in Hom_Y(f^pP, Q)$, prendiamo U aperto in X e $s \in P(U)$. Dato che $ff^{-1}(U) \subseteq U$, allora

$$s' = [(s, U)] \in (f^pP)(f^{-1}(U))$$

Definiamo $\varphi \in Hom_X(P, f_*Q)$ come

$$\varphi(s) = \psi(s') \in Q(f^{-1}(U)) = f_*Q(U)$$

Queste due mappe sono inverse l'una all'altra. $\square$

La composizione di mappe commuta con il pullback a meno di isomorfismi, ossia date

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$

mappe continue tra spazi topologici, e P un prefascio su X, allora

$$g^pf^pP \cong (f \circ g)^pP$$

sono prefasci isomorfi, ma non uguali.

Warning Se F è un fascio su X, e $f : Y \to X$ è continua, NON è detto che f^pF sia un fascio. Per esempio, sia $X = \{1\}$, f banale, A gruppo abeliano t.c. $F(X) = A$. Allora

$$(f^pF)(U) = \begin{cases} 0 & U = \emptyset \\ A & U \neq \emptyset \end{cases}$$

che NON è un fascio su Y se questo non è irriducibile, poiché se U_1 e U_2 sono aperti disgiunti non vuoti in Y, e prendiamo $a \neq b$ in $A = (f^pF)(U_1) = (f^pF)(U_2)$, questi si incollano bene, ma non esiste un elemento in $(f^pF)(U_1 \cup U_2)$ che ristretto agli aperti dia a e b.

Definition 12.10. Dato $f : Y \to X$ funzione continua tra spazi topologici, e F fascio su X definiamo il **Pullback di Fasci** come

$$f^{-1}F = (f^pF)^{sh}$$

Questa costruzione eredità le proprietà del pullback tra prefasci, quali

Lemma 12.11 *dati F, G fasci su X, Y, e $f : Y \to X$ continua, esiste un isomorfismo canonico*

$$Hom_Y(f^{-1}F, G) \leftrightarrow Hom_X(F, f_*G)$$

Dimostrazione.

$$Hom_Y(f^{-1}F, G) \leftrightarrow Hom_Y(f^pF, G) \leftrightarrow Hom_X(F, f_*G)$$

dove la prima è per la proprietà universale della fascificazione, mentre la seconda è per Lemma 12.8 □

- La composizione di mappe commuta con il pullback a meno di isomorfismi, ossia date
$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$
mappe continue tra spazi topologici, e F un prefascio su X, allora
$$g^{-1}f^{-1}F \cong (f \circ g)^{-1}F$$
sono fasci isomorfi, ma non uguali.
Per mostrarlo, ci serve la proprietà che, dato $y \in Y$,
$$(f^{-1}F)_y \cong (f^pF)_y \cong F_{f(y)}$$
e pertanto, dato un prefascio P su X,
$$f^{-1}P \cong f^{-1}(P^{sh})$$
dunque
$$g^{-1}f^{-1}F \cong g^{-1}f^pF = (g^pf^pF)^{sh} \cong ((f \circ g)^pF)^{sh} = (f \circ g)^{-1}F$$
- pullback e pushforward NON sono operazioni inverse, ma dati F, G fasci su X, Y, esistono degli omomorfismi
$$f^{-1}f_*G \to G \qquad F \to f_*f^{-1}F$$
che sono gli elementi associati alle identità nelle corrispondenze
$$Hom_Y(f^{-1}f_*G, G) \leftrightarrow Hom_X(f_*G, f_*G)$$
$$Hom_X(F, f_*f^{-1}F) \leftrightarrow Hom_Y(f^{-1}F, f^{-1}F)$$

In realtà, pullback e pushforward sono inverse sotto speciali ipotesi, che coinvolgono gli embedding chiusi:

Lemma 12.12 *Se $j : Y \subseteq X$ è un embedding chiuso di spazi topologici, e prendiamo un fascio G su Y, e un fascio F su X con supporto in Y, allora*

$$j^{-1}j_*G \cong G \qquad j_*j^{-1}F \cong F$$

Dimostrazione. L'idea principale è che j_* e j^{-1} preservano le spighe, e omomorfismi di fasci che preservano le spighe sono isomorfismi. □

Definition 12.13. Dato $f : Y \hookrightarrow X$ un embedding chiuso, chiamiamo $j : f(Y) = Y' \hookrightarrow X$, e

$$\boldsymbol{\mathcal{O}_{Y'}} := j^{-1} f_* \mathcal{O}_Y$$

Y', in particolare, sarà uno schema, in quanto $(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$. Questo fornisce un rappresentante canonico degli embedding chiusi a meno di equivalenza.

Per completezza, riportiamo anche la definizione di *embedding aperto*

Definition 12.14. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ si dice **Embedding Aperto** se

- la funzione tra gli spazi topologici è un embedding aperto
- gli omomorfismi indotti tra le spighe $f_p^\# : (\mathcal{O}_Y)_p \to (\mathcal{O}_X)_p$ sono isomorfismi

In particolare, questo vuol dire che X è isomorfo all'immagine di f, o anche che X è un sottoschema di Y.

13 26-11-14 - Funtorialità dell'Operatore Proj

Prendiamo A un anello, $X = Spec(A)$, e I un ideale di A.
Se $Y = Spec(A/I) = V(I)$, allora l'immersione $f : Y \hookrightarrow X$ è un embedding chiuso di schemi indotto dalla proiezione al quoziente $A \twoheadrightarrow A/I$.
Dunque abbiamo la successione esatta di schemi

$$0 \to I_Y \to \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y \to 0$$

dove I_Y è il fascio di ideali su X definito come il ker di $\mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$. Questo induce la seguente successione esatta:

$$0 \to I_Y(X) \to \mathcal{O}_X(X) = A \to f_* \mathcal{O}_Y(X) = A/I$$

che implica $I_Y(X) = I$. Questo ci dice che se un sottoschema Y è un $V(I)$, il fascio ci permette di individuare I. In realtà vale una cosa molto più potente:

Theorem 13.1 *Tutti i sottoschemi chiusi di Spec(A) sono affini, e sono del tipo Spec(A/I) per qualche ideale I. Dunque esiste una bigezione tra gli ideali di I e i sottoschemi chiusi di Spec(A).*

Se $f : Y \to X$ è un morfismo di schemi, e X_i è un ricoprimento aperto di X, siano $Y_i = f^{-1}(X_i)$, e definiamo

$$f_i = f|_{Y_i} : Y_i \to X_i$$

$$f_i^\# = f^\#|_{X_i} : \mathcal{O}_{X_i} \to f_* \mathcal{O}_Y = (f_i)_* \mathcal{O}_{Y_i}$$

Lemma 13.2 *f è un embedding chiuso $\iff$ f_i sono tutti embedding chiusi*

Questo ci dice che per testare se un morfismo di schemi è un embedding chiuso, possiamo ridurci ai sottoschemi affini.

Example

- Se $X \to Spec(\mathbb{K})$ è uno schema affine su $\mathbb{K}$, e $p \in X$ è un punto razionale, allora corrisponde ad un morfismo $Spec(\mathbb{K}) \to X$ che in particolare è un embedding chiuso, poiché manda il punto di $Spec(\mathbb{K})$ in un punto chiuso, ed è indotto dall'omomorfismo suriettivo $\varphi : A \to A/p = \mathbb{K}$.
- Se $X \to Spec(\mathbb{K})$ è uno schema, allora un punto razionale corrisponde ad un morfismo $Spec(\mathbb{K}) \to X_i \to X$, con X_i affine, e il punto è ancora chiuso, dunque è di nuovo un embedding chiuso.

Torniamo adesso a parlare di anelli graduati e ideali omogenei

Definition 13.3. Dati B, C anelli graduati, e $\varphi : B \to C$ un omomorfismo di anelli, esso è un **Omomorfismo di Anelli Graduati di Grado $d > 0$** se

$$\varphi(B_i) \subseteq C_{d \cdot i}$$

Preso $\varphi : B \to C$ omomorfismo di anelli graduati di grado $d > 0$, e $p \triangleleft C$, allora $\varphi^{-1}(p) \triangleleft B$. Questo NON dà una mappa $Proj(C) \to Proj(B)$, ma vale che

$$\varphi^{-1}(p) \in Proj(B) \iff B_+ \not\subseteq \varphi^{-1}(p) \iff \varphi(B_+) \not\subseteq p$$

Dunque otteniamo una mappa

$$f : Proj(C) - V_+(\varphi(B_+)) \to Proj(B)$$

e la possiamo rendere un morfismo di schemi.
Chiamiamo $X = Proj(B)$, $Y = Proj(C)$, e ricopriamo Y con $Y_c = Y - V_+(c)$, dove c sono elementi omogenei di C di grado positivo tali che

$$V_+(\varphi(B_+)) \subseteq V_+(c) \implies Y_c \subseteq Proj(C) - V_+(\varphi(B_+))$$

Similmente, ricopriamo $Proj(B)$ con X_b. Tutti gli Y_c e X_b sono schemi affini, poiché sono spettri rispettivamente di $C_{(c)}$ e $B_{(b)}$.
La mappa $\varphi : B \to C$ porta alle mappe $\varphi_b : B_{(b)} \to C_{(\varphi(b))}$, che inducono i morfismi di schemi affini

$$f_b : Spec\left(C_{(\varphi(b))}\right) = Y_{\varphi(b)} = f^{-1}(X_b) \to X_b = Spec\left(B_{(b)}\right)$$

Questi si incollano bene, in quanto, se b, b' sono elementi omogenei di grado positivo,

$$X_b \cap X_{b'} = X_{bb'}, \quad Y_{\varphi(b)} \cap Y_{\varphi(b')} = Y_{\varphi(bb')}$$

dunque otteniamo che possiamo estendere f ad un morfismo di schemi.

Lemma 13.4 *se $f : Y \to X$ è un morfismo di schemi, con $X = \cup X_i$ un ricoprimento aperto, $Y_i = f^{-1}(X_i)$, allora*

$$f|_{Y_i} : Y_i \cong X_i \ \forall i \iff f \text{ isomorfismo}$$

Lemma 13.5 *Dato B un anello graduato, e r un intero positivo, definiamo*

$$B^{(r)} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_{ir}$$

Allora si ha che, per ogni $r > 0$,

$$Proj(B) = Proj\left(B^{(r)}\right)$$

Dimostrazione. Sicuramente $\varphi : B^{(r)} \subseteq B$ è un omomorfismo di grado r.

$$B_+ \subseteq \sqrt{\varphi\left(B_+^{(r)}\right)} \implies V_+\left(\varphi(B_+^{(r)})\right) = \emptyset$$

Se $Y = Proj(B)$, $X = Proj\left(B^{(r)}\right)$, abbiamo già visto come generare un morfismo indotto da φ

$$f : Y \to X$$

e se ricopriamo X con X_b, $b \in B_+^{(r)}$ e $Y_b = f^{-1}(X_b)$, scopriamo che

$$B_{(b)}^{(r)} \cong B_{(b)} \implies Y_b = Spec(B_{(b)}) \cong Spec(B_{(b)}^{(r)}) = X_b$$

dove la prima eguaglianza è data da $B_{(b)} \ni a/b^n = ab^{kr-n}/b^{kr} \in B_{(b)}^{(r)}$. Dunque per lemma 13.4, gli schemi X e Y sono isomorfi. $\square$

Warning Attenzione alle notazioni:

- $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è lo spazio proiettivo quoziente di $\mathbb{K}^{n+1}$
- $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = Proj(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n])$ è uno schema
- $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$ sono i punti razionali dello schema, che come abbiamo mostrato, coincidono con $\mathbb{P}^n$

Example

▶ Siano $B = \mathbb{K}[y_0, \dots, y_m]$, $C = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $f_0, f_1, \dots, f_m \in C_d$ polinomi omogenei di grado d. Prendiamo dunque l'omomorfismo di grado d

$$g : B \to C : y_i \mapsto f_i$$

che induce il morfismo

$$F : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - V_+(f_0, \dots, f_m) \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$$

Ricoprendo $\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ con gli m aperti $U_i = \left(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}\right)_{y_i} = Spec\left(K[y_0, \dots, y_m]_{(y_i)}\right)$, otteniamo un ricoprimento di

$$P^n_{\mathbb{K}} - V_+(f_0, \dots, f_m) = \bigcup_i F^{-1}(U_i) = \bigcup_i Spec\left(K[x_0, \dots, x_n]_{(f_i)}\right)$$

e la mappa g ristretta ai $B_{(y_i)}$ sarà

$$B_{(y_i)} = \mathbb{K}\left[\frac{y_0}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\right] \to K[x_0, \dots, x_n]_{(f_i)} : \frac{y_j}{y_i} \mapsto \frac{f_j}{f_i}$$

Guardando ai punti razionali, otteniamo

$$\varphi : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) - V(\{f_i\}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) : [a_0 : \dots : a_n] \mapsto [f_0(a_0, \dots, a_n), \dots]$$

- Se B è un anello graduato, $I \lhd B$, $C = B/I$, con π la mappa di proiezione, e $\pi(B_+) = C_+$, allora abbiamo un embedding chiuso

$$Proj(C) \to Proj(B)$$

che induce un isomorfismo tra $Proj(C)$ e $V_+(I)$. Inoltre, questo induce anche delle mappe

$$f_b : B_{(b)} \to C_{(\varphi(b))}, \qquad Ker(f_b) = I_{(b)}$$

- nell'esempio di prima, se $B = R[x_0, \dots, x_n]$, e $I = (f_0, \dots, f_m)$, con $deg(f_i) = d_i$, restringendoci agli schemi affini, otteniamo

$$U_0 = Spec(B_{(x_0)}) = Spec\left(\mathbb{K}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]\right) \quad Proj(C) \cap U_0 = Spec\left(\frac{B_{(x_0)}}{I_{(x_0)}}\right)$$

dove $I_{(x_0)}$ è generato da $f_i/x_0^{d_i}$

Altri risultati sugli ideali omogenei sono

Lemma 13.6

- *Se $\varphi : B \to C$ omomorfismo di ideali graduati di grado 1 tale che*

$$\exists d \text{ t.c. } \varphi|_{B_{\geq d}} : B_{\geq d} \cong C_{\geq d}$$

allora questo induce un isomorfismo

$$Proj(C) \cong Proj(B)$$

- *Se $I, J \lhd B$, e $\exists d$ t.c. $I_{\geq d} = J_{\geq d}$, allora*

$$Proj(B/I) \cong Proj(B/J)$$

come sottoschemi di B

- *Assumendo $B = R[x_0, \dots, x_n]$, e $I, J \lhd B$, allora*

$$Proj(B/I) \cong Proj(B/J) \iff \exists d \text{ t.c. } I_{\geq d} = J_{\geq d}$$

Questo in particolare ci dice che dato un ideale omogeneo I finitamente generato, si può trovare un ideale omogeneo J con tutti i generatori dello stesso grado, e tale che induca lo stesso schema.

14 27-11-14 - Noetherianità e Schemi Ridotti

Definition 14.1. Uno schema si dice **Localmente Noetheriano** se ammette un ricoprimento aperto di schemi affini di anelli noetheriani

Definition 14.2. Uno schema si dice **Noetheriano** se ammette un ricoprimento finito aperto di schemi affini di anelli noetheriani

Un risultato facile da verificare è

$$X \textit{ noetheriano} \iff X \textit{ localmente noetheriano, quasi-compatto}$$

Lemma 14.3 *Un sottoschema aperto di uno schema localmente noetheriano è localmente noetheriano*

Dimostrazione. $X = \cup U_i$, $U_i = Spec(A_i)$ con A_i noetheriani. Se ora $f_i \in A_i$, allora $(U_i)_{f_i} = Spec((A_i)_{f_i})$ formano una base di X, dunque tutti i sottoschemi aperti di X sono ricoperti da tali schemi. □

Lemma 14.4 *X schema localmente noetheriano $\iff$ $\forall U = Spec(A) \subseteq X$ sottoschema affine aperto, A è noetheriano*

Dimostrazione. la freccia $\Longleftarrow$ è ovvia. Per l'altra, prendiamo $U = Spec(A)$ sottoschema affine aperto. Per Lemma 14.3, è uno schema localmente noetheriano, ma dato che è quasi-compatto, allora è anche noetheriano. Dunque prendiamo $U_i = Spec(A_i) \subseteq U$ un ricoprimento aperto finito, con A_i noetheriani, che generano degli omomorfismi $\varphi_i : A \to A_i$. Preso un ideale I in A, chiamiamo IA_i la sua immagine estesa in A_i tramite φ_i. Gli A_i sono noetheriani, dunque IA_i è finitamente generato dalle immagini di $a_1, \dots, a_r$ elementi di I[1] . Chiamiamo dunque J_i l'ideale generato da questi elementi per ogni i, e J l'ideale generato dai J_i, che è comunque finitamente generato. Avremo che

$$J \subseteq I, \qquad IA_i = J_iA_i \subseteq JA_i \subseteq IA_i \ \forall i$$

Preso ora $p \in U$, e U_i uno degli schemi che contene p, allora esiste un unico p_i ideale primo di A_i che coincide con p. Questo induce l'isomorfismo

$$A_p \cong (\mathcal{O}_U)_p \cong (\mathcal{O}_{U_i})_{p_i} \cong (A_i)_{p_i}$$

dunque

$$I_p = (IA_i)_{p_i} = (JA_i)_{p_i} = J_p \implies (I/J)_p = 0 \ \ \forall p \in Spec(A)$$

[1] se prendiamo un set finito di generatori, questo sta in IA_i, ma ognuno di essi è una combinazione finita di elementi di I, quindi possiamo prendere un set finito di generatori anche in I

questo ci dice che $I = J$, e dunque I è finitamente generato. Concludiamo che A è noetheriano. $\square$

Definition 14.5. Uno spazio topologico X è **Noetheriano** se vale una delle seguenti equivalenti condizioni:

1. ogni sequenza decrescente di chiusi(o crescente di aperti) è stazionaria
2. ogni aperto di X è quasi-compatto
3. ogni sottoinsieme di X è quasi compatto

Per esempio, lo spettro di un anello noetheriano è noetheriano, e se X è uno spazio ricoperto da finiti spazi noetheriani (anche non aperti), allora è noetheriano.
Da questo discende che

Lemma 14.6 *Uno schema noetheriano ha uno spazio topologico noetheriano*

Inoltre, uno spazio noetheriano ha necessariamente un numero finito di componenti irriducibili. Questo è vero perché, prendendo i chiusi che non sono unioni di finiti irriducibili, ne esisterà uno minimale per inclusione Y, ma essendo questo non irriducibile, $Y = Y_0 \cup Y_1$ con Y_0 e Y_1 aperti propri, che pertanto daranno unione di finiti irriducibili, così come Y. Dunque lo spazio intero è unione di finiti irriducibili, e togliendo quelli ridondanti si ottengono esattamente le componenti irriducibili.

Lemma 14.7 *Uno spazio topologico noetheriano è localmente connesso*

Dimostrazione. Se X noetheriano non vuoto, dividiamolo nelle sue finite componenti irriducibili $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Prendiamo $p \in X$ e otteniamo che

$$U = X - \bigcup_{p \notin X_i} X_i = X - Y = \bigcup_{p \in X_i} (X_i - Y) \quad \text{è connesso e aperto}$$

$\square$

Se ora prendiamo $\{\mathbb{K}_i\}_{i \in I}$ un insieme infinito di campi, e A il loro prodotto, possiamo mettere la topologia discreta su I, ottenendo che I si immerge in $X = Spec(A)$, mandando ogni punto i nell'ideale massimale che ha 0 nella i-esima componente.
X è di Haussdorf, quasi-compatto, totalmente disconnesso, ed è la *Compattificazione di Čech* di I.

Definition 14.8. X è la **Compattificazione di Čech** di uno spazio topologico I se X è compatto, I si immerge in X, e dato un compatto C, e una funzione continua $I \to C$, questa si estende unicamente a $X \to C$.

Ritorniamo agli anelli graduati, e vediamo cosa comporta la noetherianità

Lemma 14.9 *Se $f_1, \dots, f_n \in B_+$ elementi omogenei di un anello graduato B, allora gli f_i generano B_+ come ideale se e solo se lo generano come B_0-algebra*

Lemma 14.10 *B algebra graduata è noetheriana $\iff$ B_0 è noetheriano, e B è una B_0-algebra finitamente generata*

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) se B_0 è noetheriano, ogni B_0-algebra finitamente generata è noetheriana.
$\Longrightarrow$) B noetheriano implica che B_0 è noetheriano, e l'ideale B_+ è finitamente generato, ma allora è finitamente generato come B_0-algebra, e lo è anche B aggiungendo l'elemento $1 \in B_0$. □

Lemma 14.11 *B anello graduato è finitamente generato da elementi di grado 1 se e solo se B_+ è generato come ideale da elementi di grado 1.*
É equivalente a dire che

$$B \cong \frac{B_0[x_1, \dots, x_n]}{I}$$

dove le immagini degli x_i nel quoziente sono elementi di grado 1.

Lemma 14.12 *Se B è un anello graduato noetheriano, allora esiste $r > 0$ tale che $B^{(r)}$ è finitamente generato come B_0-algebra da elementi di grado 1.*

Lemma 14.13 *Se B è un anello graduato e noetheriano, allora $Proj(B)$ è uno spazio topologico noetheriano*

Dimostrazione. Preso $B^{(r)}$ generato da elementi di grado 1, sappiamo che

$$Proj(B) \cong Proj(B^{(r)})$$

ma per Lemma 14.11

$$B^{(r)} \cong \frac{B_0[x_1, \dots, x_n]}{I}$$

e dunque il suo $Proj$ è un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_{B_0}$, che però è ricoperto da $\mathbb{A}^n_{B_0}$, che sono finiti schemi noetheriani, dunque anche $Proj(B)$ è noetheriano. □

Passiamo ora agli *schemi ridotti.*

Definition 14.14. Uno schema X si dice **Ridotto** se le sue spighe sono tutti anelli ridotti

Lemma 14.15 *Per un anello, l'essere ridotto è una proprietà locale*

Lemma 14.16 *Dato X schema, sono equivalenti*

1. *X ridotto*
2. *X è unione di $U_i = Spec(A_i)$ schemi affini aperti con A_i ridotti*
3. *$\forall U \subseteq X$ aperto, $\mathcal{O}_X(U)$ è ridotto*

Lemma 14.17 *Dato X schema, con $X = \cup X_i$, X_i schemi affini aperti, e $Y_i \subseteq X_i$ sottoschemi chiusi con*

$$Y_i \cap X_{ij} = Y_j \cap X_{ij} \;\; \forall i, j$$

allora esiste un unico sottoschema chiuso $Y \subseteq X$ tale che $Y \cap X_i = Y_i \;\; \forall i$

Dimostrazione. $Y = \cup Y_i$ è chiuso in X (poiché intersecato con ogni X_i dà Y_i chiuso). Se $f_i : Y_i \hookrightarrow X_i$ sono le immersioni, e

$$f_i^\# : \mathcal{O}_{X_i} \twoheadrightarrow (f_i)_* \mathcal{O}_{Y_i} \qquad I_{Y_i} = ker f_i^\#$$

allora definiamo I_Y come

$$I_Y(U) = \left\{ s \in \mathcal{O}_X(U) \;\middle|\; s|_{U \cap X_i} \in I_{Y_i}(U \cap X_i) \;\; \forall i \right\}$$

avremo che, data $f : Y \hookrightarrow X$,

$$I_Y|_{X_i} = I_{Y_i} \qquad \mathcal{O}_Y := f^{-1}(\mathcal{O}_X / I_Y)$$

$\square$

Theorem 14.18 *Se X è uno schema, e $Y \subseteq X$ è un sottoschema chiuso, allora esiste ed è unico un sottoschema ridotto di X con supporto Y*

Dimostrazione. Nel caso affine, $X = Spec(A)$, $Y = V(I) = V(\sqrt{I})$ per Theorem 13.1. Questo implica che $Spec(A/\sqrt{I})$ è l'unico sottoschema ridotto con supporto Y. Nel caso generale, Prendiamo X_i ricoprimento aperto di schemi affini di X, e $Y_i = X_i \cap Y$ sottoschemi chiusi. Possiamo prendere dunque i sottoschemi ridotti su Y_i (poiché X_i sono affini) e incollarli per il lemma sopra. Otteniamo un sottoschema di X, ed è ridotto per Lemma 14.16. $\square$

Passiamo ora a trattare con le componenti irriducibili di uno schema.

Lemma 14.19 *Se X è uno schema, esiste una bigezione tra*

$$\{ \text{ Sottospazi chiusi irriducibili di } X \} \leftrightarrow \{ \text{ punti di } X \}$$

Dimostrazione. Nel caso affine, i sottospazi chiusi irriducibili corrispondono agli ideali primi.
Nel caso generale, invece, preso $p \in X$, a questo corrisponde $\overline{\{p\}}$.
Infatti se $\overline{\{p\}} = \overline{\{q\}}$, allora tutti gli aperti contenenti p devono contenere anche q. In particolare, questo vale anche restringendoci ad un sottospazio affine che li contiene entrambi, ma qua sappiamo che $p = q$, dimostrando che è iniettiva.
Per la suriettività, preso V un chiuso irriducibile non vuoto, allora per tutti gli aperti $U \subseteq X$, $U \cap V$ è irriducibile e chiuso in U, ma allora esiste un $p \in U$ tale che la sua chiusura in U sia $U \cap V$ e $V = \overline{U \cap V}$ implica che la sua chiusura in X sia V. □

Questo ci dice che uno schema irriducibile ha un *Punto Generico* p tale che la sua chiusura sia tutto.

Lemma 14.20 *Dato X schema localmente noetheriano, X_1, X_2 due sue componenti irriducibili distinte, e $p \in X_1 \cap X_2$, allora $(\mathcal{O}_X)_p$ NON è un dominio*

Dimostrazione. Grazie a Lemma 14.3 e ai risultati 1.8 e 1.9 nei prerequisiti, possiamo ridurci al caso in cui $X = Spec(A)$ sia affine, dunque esistono p_1 e p_2 primi minimali distinti con $X_1 = V(p_1)$, $X_2 = V(p_2)$, e tali che $p_1 + p_2 \subseteq p$. Ma allora p_1 e p_2 saranno pure due primi minimali in A_p, dunque quest'ultimo non può essere un dominio. □

15 03-12-14 - Schemi Integrali e Fibrati Prodotto

Definition 15.1. Dato X schema, si dice che è uno **Schema Integrale** se soddisfa una delle seguenti equivalenti condizioni:

1. $U \subseteq X$ sottoschema affine aperto $\implies \mathcal{O}_X(U)$ dominio
2. $U \subseteq X$ aperto $\implies \mathcal{O}_X(U)$ dominio
3. X è ridotto e irriducibile

Lemma 15.2 *le tre condizioni di schema integrale sono equivalenti*

Dimostrazione. 2 $\implies$ 1) ovvio
1 $\implies$ 3) la prima condizione implica che lo schema è ridotto, poiché le spighe sono domini, e dunque ridotte. Se X non fosse irriducibile, esisterebbero $U_1 = Spec(A_1)$,$U_2 = Spec(A_2)$ aperti non vuoti con intersezione vuota, e $U_1 \cup U_2 = Spec(A_1 \times A_2)$ che non è un dominio ↯
3 $\implies$ 2) Preso U aperto in X, sappiamo che è irriducibile e ridotto, quindi ci riduciamo a dimostrare che $\mathcal{O}_X(X)$ è un dominio. Siano $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$, con $fg = 0$, e $V = Spec(A) \subseteq X$ un aperto affine. Preso p punto generico di V, allora

$$\overline{\{p\}} = V(p) = V \implies p \subseteq N(A) = 0$$

Pertanto, (0) è primo, e A è un dominio. Dato che $fg = 0$, allora (WLOG) $f|_V = 0$, e in particolare $f_p = 0$. Ma se ora prendiamo un qualsiasi altro aperto affine $U = Spec(B)$, B è sempre un dominio, e U contiene p; $f_p = 0$ significa che l'immagine di f in $Q(B)$ è zero, ma B è un dominio, pertanto $f|_U = 0 \ \forall U \implies f = 0$. □

Un'altra dimostrazione dello stesso fatto passa per l'insieme

Lemma 15.3 *Dato X schema, e $f \in \mathcal{O}_X(X)$, allora*

$$A = \{\, p \in X \mid [(f, X)]_p \in m_p \,\}$$

è chiuso, dove m_p è l'ideale massimale della spiga $(\mathcal{O}_X)_p$

Dimostrazione. Se $[(f, X)]_p \notin m_p$, allora è invertibile nella spiga, ossia esiste g tale che $fg = 1$ su un intorno U di p. Ciò vuol dire che il complementare di A è aperto, ossia A è chiuso. □

Uno schema integrale è in particolare irriducibile, dunque possiede un unico punto generico p. Inoltre, abbiamo già usato che

Lemma 15.4 *Se uno schema è integrale, allora tutte le sue spighe sono domini*

Un altro risultato che servirà in seguito è che

Lemma 15.5 *Dato X uno schema Noetheriano, allora*

$$Z = \{ \, x \in X \mid (\mathcal{O}_X)_x \text{ dominio } \}$$

è un insieme aperto[1]

Dimostrazione. Possiamo metterci su un aperto affine $X = Spec(A)$, in cui A è Noetheriano, e chiamare X_i le sue finite componenti irriducibili. Grazie a Lemma 14.20, sappiamo che Z ha un'intersezione vuota con le intersezioni degli X_i, dunque chiamiamo Y l'aperto ottenuto togliendo tali intersezioni. Prendiamo un primo minimale P_i, corrispondente a X_i, ed un primo $P \in Z \cup X_i$. Se $P_i = (x_1, \dots, x_n)$, allora in A_P questi generatori si annullano, ossia

$$\forall \, i \;\; \exists \, s_i \notin P \; : \; s_i x_i = 0$$

Dato che gli s_j non appartengono a P_i, ma sono divisori di zero, allora devono appartenere a qualche altro primo minimale, e ciò ci dice che

$$P \in X_{\prod s_i} \cap Y \subseteq X_i \cap Z$$

dunque P ha un intorno contenuto in Z, e pertanto Z è aperto. □

Lemma 15.6 *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi integrali. Mostrare che le seguenti sono equivalenti.*

1. *Il morfismo f è dominante.*
2. *L'omomorfismo di fasci $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ è iniettivo*
3. *Gli omomorfismi tra le spighe sono iniettivi.*
4. *Il morfismo f porta il punto generico di X nel punto generico di Y.*

Lemma 15.7 *Dato p punto generico di X schema integrale, allora la spiga $(\mathcal{O}_X)_p$ è un campo*

Dimostrazione. Tutti gli aperti contengono p. Se $U = Spec(A)$ è uno schema affine non vuoto aperto, allora A è un dominio con punto generico 0, e la chiusura di p in U deve essere tutto U, dunque

$$V(p) = \overline{\{p\}} = U \implies p = (0) \implies (\mathcal{O}_X)_p = (\mathcal{O}_U)_p = A_{(0)}$$

è un campo. □

[1] è vero anche con 'ridotto' al posto di 'dominio'

Definition 15.8. Dato X schema integrale, e p il suo punto generico, allora $\mathbb{K}(\boldsymbol{X}) := (\mathcal{O}_X)_p$ è detto il suo **Campo delle Funzioni Razionali**

Se U è un aperto non vuoto di X schema affine, allora $p \in U$, e otteniamo un omomorfismo

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathbb{K}(X) : f \mapsto f_p$$

che è iniettivo poiché lo è localmente sui sottoschemi affini. In particolare, data una qualsiasi sezione f in un qualsiasi aperto U, si ha

$$f = 0 \iff f_p = 0$$

dunque, $\forall q \in X$, anche

$$(\mathcal{O}_X)_q \to \mathbb{K}(X) : f_q \mapsto f_p$$

è iniettiva, poiché se $q \in U$, $f \in \mathcal{O}_X(U) : f_p = 0$, allora $f = 0$.
Si deduce che le sezioni sono in un certo senso determinate dalla spiga del punto generico:

Lemma 15.9 *Se X è uno schema integrale, U_i degli aperti, e $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, tali che hanno lo stesso germe rispetto al punto generico p, allora si incollano bene in una sezione $s \in \mathcal{O}_X(\cup U_i)$.*

Dimostrazione. Preso $s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}}$ su U_{ij}, il suo germe su p è zero, pertanto s_i e s_j si incollano bene. Per le proprietà di fascio, esiste s. □

Lemma 15.10 *Dato X schema integrale, e U aperto, allora*

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{q \in U} (\mathcal{O}_X)_q \subseteq \mathbb{K}(X)$$

Dimostrazione. Nel caso affine, l'uguaglianza è vera in quanto un dominio è l'intersezione dei suoi localizzati. Dunque prendiamo un ricoprimento aperto U_i di U, e dalla commutatività del diagramma avremo che

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X(U_i) \arrow[dr] & \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[ur, hook, dashed] \arrow[rr, hook] & & \mathbb{K}(X) \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \bigcap \mathcal{O}_X(U_i) = \bigcap_{q \in U} (\mathcal{O}_X)_q$$

Se ora prendiamo $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ che hanno tutti la stessa immagine in $\mathbb{K}(X)$, allora sono sezioni con lo stesso germe, che si incollano per lemma 15.9 in una sezione di $\mathcal{O}_X(U)$, ottenendo l'altro contenimento. □

Diamo adesso un po' di definizioni e risultati su particolari tipi di morfismi tra schemi

Definition 15.11. Una mappa continua tra spazi topologici $f : X \to Y$ è detta **Quasi-Compatta** se per ogni aperto $V \subseteq Y$ quasi-compatto, la sua controimmagine $f^{-1}(V)$ è quasi-compatta

Definition 15.12. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è **Quasi-Compatto** se la funzione tra spazi topologici f è quasi-compatta

D'ora in poi qc vorrà dire quasi-compatt*

Lemma 15.13 *Dati X, Y, spazi topologici, $\{V_i\}$ base di aperti qc di Y, e $f : X \to Y$ mappa continua, allora f è qc $\iff$ $f^{-1}(V_i)$ qc per ogni i*

Warning Questo lemma NON vale con un ricoprimento aperto qualsiasi, ma abbiamo bisogno di una base. Nel caso però che X, Y siano schemi, basta meno:

Lemma 15.14 *Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è qc se dati $Y = \cup V_i$ schemi affini, $f^{-1}(V_i)$ sono tutti qc. In particolare, se Y è affine,*

$$f \ qc \iff X \ qc$$

Dimostrazione. Dimostriamo che se Y è affine, allora f qc $\iff$ X qc.
$\implies$) ovvia, poiché $X = f^{-1}(Y)$.
$\impliedby$) scomponiamo $X = \cup X_i$ in finiti aperti affini, e chiamiamo $f_i : X_i \to Y$ le ristrette di f. Avremo che $X_i = Spec(A_i)$, $Y = Spec(B)$, e le controimmagini di Y_b sono $(X_i)_{\varphi_i(b)} = Spec(A_{\varphi_i(b)})$, dove $\varphi_i : B \to A$ sono gli omomorfismi indotti dagli f_i. Dunque la controimmagine di una base qc sono aperti qc, e pertanto le f_i sono qc. Ma allora $f^{-1}(Y_b)$ è un unione di finiti aperti qc, e pertanto è qc. Questo conclude che f è qc.
Grazie a questo, siamo ora in grado di dimostrare il lemma, in quanto se $f : X \to Y$ è un morfismo di schemi, con $f^{-1}(V_i)$ qc, allora $f_i : f^{-1}(V_i) \to V_i$ è qc poiché V_i affine e $f^{-1}(V_i)$ qc. Ma allora possiamo prendere una base di aperti di V_i, e questa avrà controimmagine qc sia con f_i che con f, e facendolo per tutti gli i, otteniamo che f^{-1} manda una base qc in aperti qc, dunque è lei stessa un a funzione qc. □

Non tutti i morfismi di schemi sono quasi-compatti:

Example

- Prendiamo $X = Spec(\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots])$ schema affine non noetheriano, e $U = X - \{(x_1, x_2, \dots)\}$ aperto, ma non quasi-compatto, poiché $V(x_1) \supsetneq V(x_1, x_2) \supsetneq \dots$ è una catena discendente di chiusi non stazionaria. Incolliamo due copie di X tramite U, ottenendo $Y = X \coprod_{\varphi} X$, dove $\varphi : U = U$. Otteniamo X con un punto doppio, e chiamiamo X_1, X_2 le due copie di X in Y. Se ora prendiamo $f : X_1 \hookrightarrow Y$, questo è un morfismo di schemi, ma $f^{-1}(X_2) = U$ che non è quasi-compatto, dunque f non è quasi-compatta.

Definition 15.15. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è **Affine** se $\forall V \subseteq Y$ aperto affine, $f^{-1}(V)$ è affine

Naturalmente, un morfismo affine è qc.

Lemma 15.16 *Dato un morfismo di schemi $f : X \to Y$ e $Y = \cup V_i$ un ricoprimento aperto affine, allora*

$$f \text{ affine} \iff f^{-1}(V_i) \text{ affine } \forall i$$

In particolare, se Y è affine, allora f è affine se e solo se lo è X.

Definition 15.17. un omomorfismo di anelli $\varphi : A \to B$ si dice di **Tipo Finito** se induce su B una struttura di A-algebra finitamente generata

Definition 15.18. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è **Localmente di Tipo Finito** se $\forall U \subseteq X$, $\forall V \subseteq Y$ aperti affini tali che $f(U) \subseteq V$, allora l'omomorfismo indotto

$$\mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_X(U)$$

è di tipo finito

Lemma 15.19 *Dato un morfismo di schemi $f : X \to Y$, $X = \cup U_i$ un ricoprimento aperto affine, e $V_i \subseteq Y$ aperti affini con $f(U_i) \subseteq V_i$, allora $\mathcal{O}_Y(V_i) \to \mathcal{O}_X(U_i)$ sono di tipo finito sse f è localmente di tipo finito.*
In particolare,

1. *Se $Y = Spec(B)$ affine, $X = \cup U_i$ un ricoprimento aperto affine, allora f è localmente di tipo finito se e solo se $\mathcal{O}_X(U_i)$ sono finitamente generate come B-algebre.*

2. *Se $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$ sono affini, allora f è localmente di tipo finito se e solo se A è una B-algebra finitamente generata , o equivalentemente, f si fattorizza con l'embedding chiuso*

$$f : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_B \to Y \qquad A = \frac{B[x_1, \dots, x_n]}{I} \leftarrow B[x_1, \dots, x_n] \hookleftarrow B$$

Corollary 15.20 *Uno schema X (localmente) di tipo finito su $Spec(R)$ con R noetheriano, è (localmente) noetheriano*

Dimostrazione. Dal lemma sopra, X è ricoperto da B-algebre finitamente generate, che sono noetheriane. □

Definition 15.21. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è di **Tipo Finito** se è localmente di tipo finito e qc.

Per esempio, $\mathbb{P}^n_R \to Spec(R)$ è di tipo finito, poiché $\mathbb{P}^n_R$ è ricoperto da finiti schemi affini, dunque è qc.

Adesso passiamo a dei nuovi oggetti, i *fibrati prodotti*, che prima definiamo in generale, per poi passare agli schemi

Definition 15.22. Dati $f : X \to S$, $g : Y \to S$ morfismi di una categoria, allora il **Fibrato Prodotto $\boldsymbol{X \times_S Y}$** è l'unico oggetto della categoria che

- abbia due morfismi proiezioni in X, Y che commutino con f, g
- per ogni oggetto T con la proprietà sopra, esiste un morfismo $\theta : T \to X \times_S Y$ che commuti con le proiezioni di T e di $X \times_S Y$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & S
\end{tikzcd}$$

Notazione: in questo caso si scrive

$$T \xrightarrow{(\varphi,\psi)} X \times_S Y$$

Definition 15.23. Un diagramma commutativo della forma sotto in una categoria si dice **Cartesiano** se T è isomorfo a $X \times_S Y$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & S
\end{tikzcd}$$

Example

- Data $\mathcal{C} = Set$ categoria degli insiemi con funzioni come morfismi, e S insieme composto da un solo elemento, (oggetto terminale nella categoria) allora tutti gli oggetti X, Y hanno morfismi in lui, e il fibrato prodotto non è altro che il prodotto cartesiano

$$X \times_S Y = X \times Y$$

  Se invece S è un oggetto qualsiasi in $\mathcal{C}$, con $f : X \to S$, $g : Y \to S$ morfismi, allora

$$X \times_S Y = \{ (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \}$$

- nella categoria degli spazi topologici è uguale agli insiemi.

Warning Ci sono categorie che non hanno un prodotto fibrato, come per esempio la categoria degli insiemi con 2 elementi.

Per passare ai fibrati prodotti di schemi, lavoriamo un attimo sugli anelli.

Date A, B R-algebre, sappiamo che $A \otimes_R B$ fa commutare il diagramma sotto con le inclusioni di A e B nel prodotto tensore. Questo rende il prodotto tensore un R-algebra in maniera unica, e se prendiamo un'altra R-algebra C, con due omomorfismi di R-algebre $B \to C$, $A \to C$, allora per proprietà universale del prodotto tensore, esiste una mappa $A \otimes_R B \to C$ che fa commutare tutto (questo vale solo con anelli commutativi). In termini di schemi, tutto il diagramma viene ribaltato, producendo un diagramma di schemi affini che ci dice che nella categoria degli schemi affini,

$$Spec(A) \times_{Spec(R)} Spec(B) = Spec(A \otimes_R B)$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
B \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & A \otimes_R B \arrow[dr, dashed] & \\
& & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Spec(C) \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& Spec(A \otimes_R B) \arrow[r] \arrow[d] & Spec(A) \arrow[d] \\
& Spec(B) \arrow[r] & Spec(R)
\end{tikzcd}$$

16 04-12-14 - Fibrati Prodotto di Schemi

D'ora in poi, denotiamo il fibrato prodotto di schemi affini (e non) su $Spec(R)$ indicando solo R, ossia

$$X \times_R Y := X \times_{Spec(R)} Y$$

Warning Le proiezioni NON sono per forza morfismi suriettivi.

Lemma 16.1 *Dato il diagramma commutativo sotto, con $X' \cong X \times_Y Y'$, allora*

$$X'' \cong X' \times_{Y'} Y'' \iff X'' \cong X \times_Y Y''$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drrr, bend left] \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, dashed, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& X'' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& Y'' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. ovvio, prendendo T con nel diagramma sopra. □

Se questi schemi sono affini, con $X = Spec(B)$, $Y = Spec(A)$, e simili, otteniamo la formula

$$A'' \otimes_{A'} (A' \otimes_A B) \cong A'' \otimes_A B$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[d] \\
B \arrow[r] & A' \otimes_A B \arrow[r] & A'' \otimes_{A'} (A' \otimes_A B)
\end{tikzcd}$$

Abbiamo già visto che il fibrato prodotto tra schemi affini di R-algebre è il prodotto tensore.

Example

- $$\mathbb{A}^n_R \times_R \mathbb{A}^m_R \cong Spec(R[x_1, \dots, x_n] \otimes_R R[y_1, \dots, y_m]) \cong$$
  $$\cong Spec(R[z_1, \dots, z_{n+m}]) \cong \mathbb{A}^{n+m}_R$$

- Se
  $$X = Spec\left(\frac{R[x_1, \dots, x_n]}{I}\right), \quad I = (f_1, \dots, f_r)$$
  $$Y = Spec\left(\frac{R[y_1, \dots, y_m]}{J}\right), \quad J = (g_1, \dots, g_s)$$

allora

$$X \times_R Y \cong Spec\left(\frac{R[z_1, \dots, z_{m+n}]}{(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)}\right)$$

poiché vale in generale che

$$\frac{A}{I} \otimes_R \frac{B}{J} \cong \frac{A \otimes_R B}{I(A \otimes_R B) + J(A \otimes_R B)}$$

Se $p \in X = Spec(A)$ schema affine, allora le mappe $A \to A_p \twoheadrightarrow \mathbb{K}(p)$ e $A \twoheadrightarrow A/p \to \mathbb{K}(p)$ inducono lo stesso morfismo di schemi affini

$$P = Spec(\mathbb{K}(p)) \to X$$

Se $Y = Spec(B)$ schema affine, con un morfismo di schemi $f : Y \to X$, allora sappiamo che esiste il fibrato prodotto $P \times_X Y = Spec(\mathbb{K}(p) \otimes_A B)$.

Lemma 16.2 *La proiezione $P \times_X Y \to Y$ induce un omeomorfismo*

$$P \times_X Y \cong f^{-1}(p)$$

e questo rende la fibra di p uno schema.

Dimostrazione.
la mappa $f : Y \to X$ induce l'omomorfismo $\varphi : A \to B$. Se $p \in Spec(A)$, abbiamo le mappe $A \to A_p \to \mathbb{K}(p)$, che inducono il diagramma commutativo a lato. Avremo

$$\begin{tikzcd} P \times_X Y \arrow[r] \arrow[d] & P = Spec(\mathbb{K}(p)) \arrow[d, hook] \\ Spec(A_p) \times_X Y \arrow[r] \arrow[d] & Spec(A_p) \arrow[d, hook] \\ Y \arrow[r, "f"] & X = Spec(A) \end{tikzcd}$$

$$Spec(A_p) \times_X Y \cong Spec(A_p \otimes_A B)$$

Se $S = A - p$, allora sia $T = \varphi(S) \subseteq B$ insieme moltiplicativamente chiuso in B. Per definizione, $A_p \otimes_A B = T^{-1}B = B_p$, e possiamo dire cosa è lo spettro di questo anello:

$$Spec(A_p \otimes_A B) = Spec(B_p) = \{\, q \in Y \mid T \cap q = \emptyset \,\} =$$
$$= \{\, q \in Y \mid \varphi(S) \cap q = \emptyset \,\} = \left\{\, q \in Y \;\middle|\; \varphi^{-1}(q) \subseteq p \,\right\}$$

Dunque

$$P \times_X Y = Spec(\mathbb{K}(p) \otimes_{A_p} B_p) = Spec\left(\frac{A_p}{pA_p} \otimes_{A_p} B_p\right) = Spec\left(\frac{B_p}{pB_p}\right) \cong$$
$$\cong \left\{\, q \in Y \;\middle|\; \varphi^{-1}(q) \subseteq p,\ \ \varphi(p) \subseteq q \,\right\} = \left\{\, q \in Y \;\middle|\; \varphi^{-1}(q) = p \,\right\} = f^{-1}(p)$$

□

Passiamo adesso all'argomento di *cambio di base*, che include, tra le altre, l'estensione di scalari

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed] & & X \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& X' \times_{S'} Y' \arrow[rr] \arrow[dd] & & X' \arrow[dd] \\
Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & S \arrow[dr] & \\
& Y' \arrow[rr] & & S'
\end{tikzcd}$$

Dato il diagramma commutativo a lato, abbiamo un morfismo indotto

$$X \times_S Y \to X' \times_{S'} Y'$$

Se $S = S'$, si trasforma in

$$X \times_S Y \to X' \times_S Y'$$

mentre se $X = X'$, $Y = Y'$, allora abbiamo due mappe

$$X \times_S Y \leftrightarrow X \times_{S'} Y$$

Definition 16.3. un morfismo $f : S \to S'$ in una categoria è un **Monomorfismo** se per ogni oggetto T e ogni coppia di morfismi $g_1, g_2 : T \to S$ tali che $f \circ g_1 = f \circ g_2$, si ha $g_1 = g_2$.

Nelle categorie degli insiemi, degli spazi topologici, dei gruppi e degli anelli, un morfismo è un monomorfismo se e solo se è iniettivo.

Warning Nella categoria degli schemi (anche affini), un morfismo iniettivo non è un monomorfismo[1]

Example

- Data l'immersione $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, questa induce il morfismo $Spec(\mathbb{C}) \to Spec(\mathbb{R})$ che è ovviamente iniettivo, ma non è un monomorfismo, poiché le mappe

$$\begin{tikzcd}
Spec(\mathbb{C}) \arrow[r, bend left, "Conj"] \arrow[r, bend right, "Id"'] & Spec(\mathbb{C}) \arrow[r] & Spec(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

  sono diverse a livello di fasci.

Lemma 16.4 *Dati S', S, X, Y oggetti di una categoria $\mathcal{C}$, con quattro morfismi da X e Y in S e S', allora*

- *le mappe $X \times_S Y \leftrightarrow X \times_{S'} Y$ sono monomorfismi*
- *se esiste un monomorfismo $S \to S'$ che commuta con le mappe sopra, allora $X \times_S Y \cong X \times_{S'} Y$*

Lemma 16.5 *Embedding chiusi e aperti sono monomorfismi nella categoria degli schemi*

[1]è vero che ogni monomorfismo tra schemi è iniettivo?

Corollary 16.6 *Un embedding chiuso o aperto $S \to S'$ induce un isomorfismo $X \times_S Y \cong X \times_{S'} Y$*

Dati X, Y, S schemi, con $f : X \to S$ e $g : Y \to S$ morfismi di schemi, vorremmo costruire il loro prodotto fibrato. A priori, non sappiamo neanche se esiste, dunque abbiamo bisogno di un po' di lemmi:

Lemma 16.7 *Dati X, Y, S schemi, con $f : X \to S$ e $g : Y \to S$ morfismi di schemi, poniamo che esista il prodotto fibrato $X \times_S Y$. Allora per ogni $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ aperti, avremo*

$$p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) \cong U \times_S V$$

dove $p_X : X \times_S Y \to X$ e $p_Y : X \times_S Y \to Y$ sono le proiezioni.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & V \arrow[d, hook] \\
& X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "g"] \\
U \arrow[r, hook] & X \arrow[r, "f"] & S
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Preso T schema con due morfismi su U e V che fanno commutare il diagramma, esiste un morfismo $T \to X \times_S Y$ dato dalla proprietà universale del prodotto fibrato. L'immagine di questo morfismo deve essere contenuto in $p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V)$, rendendo quest'ultimo il prodotto fibrato di U e V su S. □

Theorem 16.8 *Dati X, Y, S schemi, esiste il prodotto fibrato $X \times_S Y$*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazioni in più passi

- Se Y, S sono affini, e $X = X_1 \cup X_2$ con X_i affini, allora $X_1 \times_S Y$ e $X_2 \times_S Y$ si incollano su $(X_1 \cap X_2) \times_S Y$, che sappiamo esistere dal lemma 16.7, e corrisponde alle controimmagini di $X_1 \cap X_2$ tramite le proiezioni dei prodotti fibrati sui X_i. Grazie alla proprietà universale, si dimostra che questo nuovo oggetto è effettivamente $X \times_S Y$. Il ragionamento si può ripetere per uno schema X qualsiasi.

- Nel punto sopra, abbiamo usato che Y fosse affine solo per l'esistenza dei $X_i \times_S Y$. Se poniamo che $Y = \cup Y_i$ sia uno schema, con Y_i affini, allora sappiamo che $X \times_S Y_i$ esiste, e si può ripetere l'argomentazione per ricavare che $X \times_S Y$ esiste pr ogni X, Y schemi.

- Se ora $S = \cup S_i$ è uno schema, con S_i affini, siano $f : X \to S$ e $g : Y \to S$ due morfismi di schemi, e prendiamo $X_i = f^{-1}(S_i)$, $Y_i = g^{-1}(S_i)$ aperti che formano due ricoprimenti di X e Y (in generale NON sono affini). Si mostra che $X_i \times_{S_i} Y_i \cong X_i \times_S Y_i$, e che l'incollamento di questi ultimi fornisce $X \times_S Y$.

□

In particolare, avremo che, se pr_1 e pr_2 sono le due proiezioni del fibrato prodotto su X, Y, allora

$$U_i \times_{W_i} V_i = U_i \times_S V_i = pr_1^{-1}(U_i) \cap pr_2^{-1}(V_i) \hookrightarrow X \times_S Y$$

dove l'ultimo è un embedding aperto.

Prendiamo ora R un anello, e B una R-algebra graduata (nel senso che $R \to B_0$). Avremo le mappe di schemi

$$Proj(B) \to Spec(B_0) \to Spec(R)$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\psi"] & S \otimes_R B \end{tikzcd}$$

Se $\varphi : R \to S$ è un omomorfismo di anelli, allora $B \otimes_R S$ è una S-algebra graduata, con

$$(B \otimes_R S)_i = B_i \otimes_R S$$

$$S = R \otimes_R S \to B_0 \otimes_R S = (B \otimes_R S)_0$$

L'omomorfismo di anelli graduati

$$\psi : B \to S \otimes_R B : b \mapsto 1 \otimes b$$

è di grado 1, e commuta con le strutture di R algebra. Inoltre

$$\psi(B_+)^e = (S \otimes_R B)_+$$

induce il diagramma a lato.

$$\begin{tikzcd} Proj(S \otimes_R B) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & Proj(B) \arrow[d] \\ Spec(S) \arrow[r] & Spec(R) \end{tikzcd}$$

Lemma 16.9 *Il diagramma è cartesiano, ossia*

$$Proj(S \otimes_R B) \cong Proj(B) \times_R Spec(S)$$

Dimostrazione. Se $X = Proj(B) = \cup X_b$ schemi affini aperti, dove l'unione è fatta sugli elementi omogenei di B_+, allora

$$Proj(B) \times_R Spec(S) = \bigcup (X_b \times_R Spec(S))$$

Ma se $Y = Proj(S \otimes_R B)$, e $\phi : Y \to X$, allora

$$\phi^{-1}(X_b) = Y_{\psi(b)} \cong Spec(S \otimes_R B)_{(\psi(b))} \cong Spec(S) \times_R X_b$$

e incollando queste, otteniamo

$$Y = \bigcup Y_{\psi(b)} = Proj(S \otimes_R B) \cong Proj(B) \times_R Spec(S) = \bigcup (X_b \times_R Spec(S))$$

□

Example

- $Spec(S) \times_R \mathbb{P}^n_R \cong \mathbb{P}^n_S$, e in particolare $\mathbb{P}^n_R \cong Spec(R) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$
- Se $A = R[x_0, \dots, x_n]/I$, $X = Proj(A)$, con $I \triangleleft R[x_0, \dots, x_n]$, allora

$$S \otimes_R A = \frac{S[x_0, \dots, x_n]}{\bar{I}} \implies Spec(S) \times_R X = Proj(S \otimes_R A)$$

Dato il diagramma a lato, poniamo che sia cartesiano. Allora la struttura presenta alcuni *invarianti sotto cambi base.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Lemma 16.10

1. *f qc $\implies$ f' qc*
2. *f localmente di tipo finito $\implies$ f' localmente di tipo finito*
3. *f di tipo finito $\implies$ f' di tipo finito*

Dimostrazione.
1) possiamo assumere Y, Y' affini. Dunque X è qc, ed è unione di finiti X_i schemi affini aperti. Quindi anche X' è qc, e $\psi^{-1}(X_i) = Y' \times_Y X_i$ affini, con

$$Y' \times_Y X = \bigcup (Y' \times_Y X_i) \implies f' \;\; qc$$

2) Si riduce al caso in cui X, Y, Y' sono affini, $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$, $Y' = Spec(B')$, e qui $X' = Spec(B' \otimes_B A)$, dunque f' è localmente di tipo finito
3) Si ricava da 1 e 2. □

Se X è uno schema, $p \in X$, allora $P = Spec(\mathbb{K}(p)) \hookrightarrow Spec((\mathcal{O}_X)_p)$. Inoltre

$$P \hookrightarrow Spec((\mathcal{O}_X)_p) \to Spec(U) \cong U \subseteq X$$

dove U è uno schema affine aperto contenente p, ma l'omomorfismo risultante $Spec((\mathcal{O}_X)_p) \to X$ non dipende da U, ed è detto *naturale.*

Lemma 16.11 *Dato $\mathbb{K}$ campo, $f : Spec(\mathbb{K}) \to X$ morfismo di schemi con immagine $p \in X$, allora si fattorizza in maniera unica come*

$$Spec(\mathbb{K}) \to P \to X$$

ottenendo in particolare una mappa iniettiva di campi

$$\mathbb{K}(p) \hookrightarrow \mathbb{K}$$

Dimostrazione. Ci riduciamo al caso affine $X = Spec(A)$, così abbiamo una mappa $A \to \mathbb{K}$ con kernel p, dunque $A/p \hookrightarrow \mathbb{K}$, e il suo campo delle frazioni è $\mathbb{K}(p)$, che dunque si immerge in $\mathbb{K}$. $\square$

Lemma 16.12 *Dato $f : Y \to X$ morfismo di schemi, $p \in X$, allora la proiezione $P \times_X Y \to Y$ induce l'omeomorfismo con la fibra $f^{-1}(p)$.*

Dimostrazione. Riduciamoci al caso affine $X = Spec(A)$, e possiamo farlo poiché preso $p \in U \subseteq X$ aperto affine, ci possiamo ridurre a $f^{-1}(U) \subseteq Y$ e U. Ricopriamo dunque Y di schemi affini Y_i aperti, e chiamiamo f_i le ristrette di f agli Y_i. Avremo che

$$P \times_X Y_i \cong f_i^{-1}(p) \implies P \times_X Y \cong \bigcup (P \times_X Y_i) = \bigcup f_i^{-1}(p) = f^{-1}(p)$$

$\square$

17 10-12-14 - Embedding e Spazi Separati

Definition 17.1. un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è un **Embedding** se può essere fattorizzato tramite uno schema U in $f : X \xrightarrow{g} U \xrightarrow{h} Y$, con g embedding chiuso, e h embedding aperto

Guardando gli spazi topologici, un embedding di schemi è un omomorfismo localmente chiuso.

Lemma 17.2 *Dato $f : X \to Y$ morfismi di schemi, e P una delle seguenti proprietà:*

1. *embedding chiuso*
2. *embedding aperto*
3. *embedding*
4. *quasi-compatto*
5. *di tipo finito*
6. *localmente di tipo finito*
7. *affine*

allora vale che

- *composizione di morfismi con la proprietà P ha la proprietà P*
- *dato $Y = \cup Y_i$ ricoprimento aperto, tale che ogni $f_i = f|_{f^{-1}(Y_i)}$ abbia la proprietà P, allora anche f ha la proprietà P*
- *Dato il diagramma cartesiano*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

*se f ha la proprietà P, allora la ha anche f' (e si dice che P è **Invariante sotto Cambio-Base**)*

Definition 17.3. Data una proprietà P, questa si dice **Locale sul Dominio** se dato un ricoprimento aperto $X = \cup X_i$ tale che $f_i = f|_{X_i}$ abbiano la proprietà P, allora anche f ha la proprietà P.

Per esempio, la proprietà 6 è locale sul dominio, mentre 2 e 4 non lo sono.

Lemma 17.4 *Se X è uno spazio topologico, e*

$$\delta : X \to X \times X : x \mapsto (x, x)$$

allora δ è un embedding, e X è separato se e solo se δ è chiuso

Sugli spazi topologici, questo equivale a dire che la diagonale è chiusa. Per gli schemi, dobbiamo modificare un po' le definizioni

Definition 17.5. Dato $f : X \to Y$ un morfismo di schemi, allora chiamiamo **Diagonale** un morfismo di schemi $\delta : X \to X \times_Y X$ t.c.

$$pr_1 \circ \delta = pr_2 \circ \delta = Id_X$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\delta"] \arrow[drr, bend left, equal] \arrow[ddr, bend right, equal] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Notiamo che un tale δ esiste sempre per proprietà universale del fibrato prodotto.

Lemma 17.6 *Se $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$ sono schemi affini, e $f : X \to Y$ morfismo di schemi, allora la diagonale è un embedding chiuso.*

Dimostrazione. Sappiamo già che $X \times_Y X = Spec(A \otimes_B A)$. Dunque le mappe

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] & X \times_Y X \arrow[r, bend left, "pr_2"] \arrow[r, bend right, "pr_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

inducono

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "j_2"] \arrow[r, bend right, "j_1"'] & A \otimes_B A \arrow[r, "\psi"] & A
\end{tikzcd}$$

L'omomorfismo di anelli $\psi : A \otimes_B A \to A$ indotto da δ, in particolare è suriettivo, poiché composto con le proiezioni j_2 e j_1 dà l'identità di A. Per Lemma 12.2, allora, δ è un embedding chiuso. □

Lemma 17.7 *Il morfismo diagonale δ è sempre un embedding*

Dimostrazione. preso un ricoprimento aperto affine $Y = \cup Y_i$, allora

$$f^{-1}(Y_i) \times_{Y_i} f^{-1}(Y_i) \subseteq X \times_Y X$$

è un sottoschema aperto, e possiamo considerare l'unione di questi schemi, e chiamarla

$$U = \bigcup f^{-1}(Y_i) \times_{Y_i} f^{-1}(Y_i)$$

e resta ancora un sottoschema aperto, così che $U \to X \times_Y X$ sia un embedding aperto. Inoltre $\delta(X) \subseteq U$, e

$$\delta^{-1}(f^{-1}(Y_i) \times_{Y_i} f^{-1}(Y_i)) = f^{-1}(Y_i) \implies \delta^{-1}(U) = X$$

dunque basta provare che $X \to U$ sia un embedding chiuso per terminare. Per farlo, basta dimostrarlo sui Y_i, ossia bisogna dire che

$$f^{-1}(Y_i) \xrightarrow{\delta} f^{-1}(Y_i) \times_{Y_i} f^{-1}(Y_i)$$

è un embedding chiuso per ogni i. Quindi ci mettiamo nel caso che Y sia affine. Prendiamo un ricoprimento affine aperto $X = \cup X_i$. Avremo che

$$X_i \times_Y X_j \subseteq X \times_Y X$$

è un embedding aperto, ma

$$\delta^{-1}(X_i \times_Y X_j) = X_{ij}$$

dunque, visto che

$$X_i \overset{\delta}{\hookrightarrow} X_i \times_Y X_i$$

è un embedding chiuso in quanto fatto tra schemi affini, ne deduciamo che lo sarà anche $X \to U$. □

Definition 17.8. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è detto **Separato** se la diagonale δ è un embedding chiuso

Per esempio, abbiamo già visto che i morfismi di schemi affini sono separati.

Definition 17.9. Uno schema X è detto **Separato** se $f : X \to Spec(\mathbb{Z})$ è un morfismo di schemi separato.

Ricordiamo che ogni schema ha un'unica struttura di schema su $\mathbb{Z}$, dunque f è sempre ben definita. Inoltre, ci dice anche che se X affine, allora è separato.

Lemma 17.10 *Se X separato, e $U, V \subseteq X$ affini aperti, allora $U \cap V$ è affine*

Dimostrazione.

$$\delta(U \cap V) \subseteq U \times_{\mathbb{Z}} V$$

ma δ è un embedding chiuso poiché X è separato, e $U \times_{\mathbb{Z}} V$ è affine, dunque lo è anche $U \cap V$. □

Anche la separazione è invariante per cambio base, ma per provarlo abbiamo bisogno del lemma

Lemma 17.11 *Sia $\mathcal{C}$ una categoria con prodotto fibrato, con $X \to S$, $Y \to S$ e $S' \to S$ tre frecce in $\mathcal{C}$. Allora esiste un isomorfismo canonico*

$$(X \times_S Y) \times_S S' \cong (X \times_S S') \times_{S'} (S' \times_S Y)$$

Lemma 17.12
Dato il diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

se f è separato, allora lo è anche f'

Dimostrazione.

$$X \hookrightarrow X \times_Y X$$

è un embedding chiuso, dunque anche

$$X' = X \times_Y Y' \hookrightarrow Y' \times_Y (X \times_Y X)$$

è un embedding chiuso perché questo è stabile per cambio base, e il diagramma sotto è cartesiano

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \times_Y (X \times_Y X) \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook] & X \times_Y X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Dato inoltre che per lemma 17.11

$$Y' \times_Y (X \times_Y X) \cong (X \times_Y Y') \times_{Y'} (X \times_Y Y') \cong X' \times_{Y'} X'$$

allora f' è separato. $\square$

Ora passiamo a considerare una composizione di morfismi di schemi $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Questi inducono le rispettive mappe diagonali

$$\delta_f : X \to X \times_Y X \quad \delta_g : Y \to Y \times_Z Y$$
$$\delta_{g\circ f} : X \to X \times_Z X$$

Per proprietà del prodotto fibrato, potremo anche scrivere delle mappe

$$\psi : X \times_Y X \to X \times_Z X$$

e

$$\varphi : X \times_Z X \to Y \times_Z Y$$

Notiamo inoltre che, grazie alla proprietà universale del prodotto fibrato, ed in particolare all'unicità della mappa che chiude il diagramma, avremo che

$$\psi \circ \delta_f = \delta_{g\circ f}$$

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[dr, "\psi"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& X \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, bend left] & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right] & Y \arrow[dr, "g"] & \\
& & & Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z X \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd] & & X \arrow[dr, "f"] & \\
& Y \times_Z Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
X \arrow[dr, "f"] & & & \\
& Y \arrow[rr, "g"] & & Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta_f"'] \arrow[rr, bend left, "\delta_{g\circ f}"] & X \times_Y X \arrow[r, "\psi"'] & X \times_Z X
\end{tikzcd}$$

Questi risultati portano al seguente lemma:

Lemma 17.13 *Il seguente diagramma è commutativo, e il quadrato centrale è cartesiano:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta_f"] \arrow[rr, bend left, "\delta_{g\circ f}"] & X \times_Y X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f \circ pr"'] & X \times_Z X \arrow[d, "\varphi"] & \\
& Y \arrow[r, "\delta_g"] \arrow[drr, bend right, equal] & Y \times_Z Y \arrow[dr, "pr"] & \\
& & & Y
\end{tikzcd}$$

Lemma 17.14 *Se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sono morfismi di schemi, allora*

1. *$g \circ f$ separato $\implies$ f separato*
2. *f, g separati $\implies$ $g \circ f$ separato*
3. *se g è separato, allora $g \circ f$ separato $\iff$ f separato*
4. *se X, Y sono affini, allora $g \circ f$ separato $\iff$ f separato*
5. *X separato $\implies$ f separato*

Dimostrazione. 4 è un'ovvia conseguenza di $1, 2, 3$, e 2 discende da 3.

3) Abbiamo che δ_g è un embedding chiuso, ma allora anche ψ lo è, poiché il diagramma sopra è cartesiano. Dunque $\psi \circ \delta_f = \delta_{g \circ f}$ implica che δ_f è un embedding chiuso se e solo se lo è $\delta_{g \circ f}$.

1) Sempre $\psi \circ \delta_f = \delta_{g \circ f}$ ci dice che se $\delta_{g \circ f}$ è un embedding chiuso allora lo è anche δ_f.

5) $X \to Y \to Spec(\mathbb{Z})$ è separato poiché lo è X, e la tesi segue da 1). □

Dato $f : X \to Y$ un morfismo di schemi, con Y affine, e $X = \cup X_i$ un ricoprimento di schemi affini aperti, allora

$$X \text{ separato } \iff X_{ij} \subseteq \delta_f^{-1}(X_i \times_Y X_j) \text{ immersione chiusa } \quad \forall i, j$$

Example

- Presa $X = \mathbb{A}^1_k \coprod_\varphi \mathbb{A}^1_k = X_1 \coprod_\varphi X_2$ la retta con 2 origini già descritta, allora non è separata. Se chiamiamo $Y = \mathbb{A}^1_k$, e $f : X \to Y$ la composizione di $X \to X_1$ con l'isomorfismo $X_1 \cong Y$, allora

  $$\mathbb{A}^1_k - (x) \cong X_1 \cap X_2 \subseteq \delta_f^{-1}(X_1 \times_Y X_2) \cong \mathbb{A}^1_k$$

  non è un'immersione chiusa.

- $\mathbb{P}^n_R$ è separato su R, ossia $f : \mathbb{P}^n_R \to Spec(R)$ è separata. Questo poiché se $A = R[x_0, \dots, x_n]$, allora

  $$\mathbb{P}^n_R = \bigcup X_i = \bigcup Spec(A_{(x_i)})$$

  $$X_{ij} = Spec(A_{(x_i x_j)}) \subseteq X_i \times_R X_j =$$

  $$= Spec(A_{(x_i)}) \times_R Spec(A_{(x_j)}) = Spec(A_{(x_i)} \otimes_R A_{(x_j)})$$

  da cui otteniamo l'omomorfismo di anelli

  $$A_{(x_i)} \otimes_R A_{(x_j)} \to A_{(x_i x_j)}$$

  che in particolare è suriettivo con la moltiplicazione. Dunque il morfismo corrispondente è un embedding chiuso, e ciò porta a dire che f è separato.

Lemma 17.15 *Dato R un DVR, con ideale massimale (t), sia $K = R_t$. Dato $f : X \to Y$ morfismo di schemi separato, e $g_1, g_2 : Spec(R) \to X$ morfismi di schemi tali che $f \circ g_1 = f \circ g_2$, e che $g_1|_{Spec(K)} = g_2|_{Spec(K)}$, allora $g_1 = g_2$.*

Dimostrazione. Dato che $K = R_t$ è il campo ottenuto invertendo l'elemento t che genera l'ideale massimale di R, allora $Spec(K) = Spec(R) - (t) \subseteq Spec(R)$ è un'immersione aperta. Chiamiamo

$$g : Spec(R) \to X \times_Y X$$

la funzione indotta dalla proprietà universale del prodotto fibrato. Se X è il sottoschema chiuso di $X \times_Y X$ dato dalla diagonale, allora $g^{-1}(X)$ è sottoschema chiuso di $Spec(R)$, su cui g_1 e g_2 coincidono. Ma allora

$$Spec(K) \subseteq g^{-1}(X)$$

e dato che è chiuso e ridotto, implica che $g^{-1}(X) = Spec(R)$, e $g_1 = g_2$. □

Più in generale, abbiamo usato solo che

Lemma 17.16 *Dato $g : Y \to Z$ morfismo di schemi separato, e $f_1, f_2 : X \to Y$ morfismi di schemi, in cui X è ridotta, allora se $g \circ f_1 = g \circ f_2$, ed esiste U aperto denso in X su cui f_1 ed f_2 coincidono, si ha che $f_1 = f_2$*

Nel lemma precedente, l'ipotesi di schema ridotto è necessaria. Infatti

Example

- Sia $A = \mathbb{K}[x, y]\big/_{(xy, y^2)}$, e $X = Spec(A)$. Dato che $\sqrt{(xy, y^2)} = (y)$, e che A non è ridotto, allora

  $$A_{\text{red}} = \frac{A}{(y)} = \mathbb{K}[x] \implies X_{\text{red}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \subseteq X$$

  Chiamiamo $m = (x, y) \subseteq A$. Allora

  $$m = V(x) \implies X - \{m\} = Spec(A_x) \cong Spec(\mathbb{K}[x]_x) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} - \{(x)\}$$

  Se $Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = Spec(\mathbb{K}[x])$, allora l'inclusione $\mathbb{K}[x] \subseteq A$ induce un morfismo di schemi $f : X \to Y$ che è separato, in quanto Y è affine. Possiamo dare due morfismi da X in sè, indotti dagli omomorfismi f_1, f_2 da A in A definiti come

  $$f_1 = Id \qquad f_2(x) = x, f_2(y) = 0$$

  Queste due mappe coincidono su $X - \{m\}$, e dunque su ogni $U \subseteq X - \{m\}$ aperto denso. Inoltre la composizione con f è uguale, ma $f_1 \neq f_2$, e dunque anche le mappe da X in sè sono distinte.

18 11-12-14 - Criteri Valutativi e Mappe Finite e Proprie

Theorem 18.1 (Criterio Valutativo per la Separazione)
Siano X, Y schemi localmente noetheriani, e $f : X \to Y$ un morfismo di schemi. Se il Lemma 17.14 vale per ogni R DVR e per ogni g_1 e g_2, allora f è un morfismo separato.

Adesso parliamo di spazi topologici, ed introduciamo un nuovo tipo di funzione continua

Definition 18.2. Dati X, Y spazi topologici, e $f : X \to Y$ una funzione continua, essa è chiamata **Propria** se controimmagine di compatti è compatta.

Warning D'ora in poi, uno spazio localmente compatto sarà sempre anche separabile, ossia T2

Lemma 18.3 *Una mappa propria tra due spazi localmente compatti è chiusa, ma il viceversa non vale.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Preso un diagramma cartesiano nella categoria degli spazi topologici, allora se Y, Y' e X sono localmente compatti, lo è anche X', poiché è chiuso dentro $Y' \times X$, che è prodotto di spazi localmente compatti, e dunque anche lui localmente compatto.

Lemma 18.4 *Se f è propria, allora lo è anche f'*

In questo caso, dunque, se f è chiusa, lo è anche f', e si dice che

Definition 18.5. Dato il diagramma cartesiano sopra, con f chiusa, allora è detta **Universalmente Chiusa** se f' è chiusa per ogni g.

Notiamo inoltre che l'essere chiuso è una proprietà locale sul codominio, ossia, nel caso degli schemi, basta verificarlo quando Y è affine. Questo implica che anche l'essere universalmente chiuso è una proprietà locale sul codominio.

Per quanto detto, ogni mappa propria è universalmente chiusa, ma in realtà vale anche che

Lemma 18.6 *Una mappa continua tra spazi localmente compatti è propria se e solo è universalmente chiusa.*

Example

- la mappa $f : \mathbb{R} \to \{p\}$ è chiusa, ma non è universalmente chiusa, poiché la mappa $f' : \mathbb{R} \times_p \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indotta da (f, f) non è chiusa, in quanto è la proiezione sulla prima componente.(l'immagine di un'iperbole è un aperto)

La definizione di *morfismo proprio tra schemi* è differente da quella data per spazi topologici:

Definition 18.7. Dato $f : X \to Y$ morfismo di schemi, è detto **Proprio** se è contemporaneamente
1 - di tipo finito 2 - separato 3 - universalmente chiuso

I morfismi propri rispettano le tre usuali proprietà in Lemma 17.2.

Example

- $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \to Spec(\mathbb{K})$ non è propria, poiché non soddisfa l'invarianza sotto cambio base. Infatti
$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \times_{\mathbb{K}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$$
Ma $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ non è chiusa, in quanto manda $V = V(xy - 1)$ in $\{0\}$ che non è chiuso, e dunque non è propria.

Dato uno schema X su $\mathbb{C}$, tale che $X \to Spec(\mathbb{C})$ sia di tipo finito, allora i punti razionali $X^{an} := X(\mathbb{C})$ acquisiscono una particolare topologia, detta *analitica*. Questa si costruisce nel seguente modo:

- Nel caso affine, $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ induce un embedding $X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^n$, dunque induciamo la topologia euclidea sui punti razionali, e si dimostra che questa topologia non dipende dall'embedding.

- Nel caso generale, scegliamo un ricoprimento aperto affine X_i di X, e diciamo che $U \subseteq X^{an}$ è aperto se lo sono le sue intersezioni con gli X_i, e ancora questa topologia non dipende dal ricoprimento scelto.

Un esempio è $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ su cui la topologia analitica è esattamente l'usuale topologia euclidea.
Una proprietà della topologia analitica è per esempio che $(X \times_{\mathbb{C}} X)(\mathbb{C}) = X(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$, ma valgono anche risultati molto più potenti:

Theorem 18.8 (Amazing Facts)

- *X connesso $\iff$ X^{an} connesso*
- *X separato $\iff$ X^{an} Haussdorf*
- *Dato $f : X \to Y$ un morfismo di schemi su $\mathbb{C}$, questo induce una mappa continua $f^{an} : X^{an} \to Y^{an}$.*

- *Se X e Y sono separati, $f : X \to Y$ proprio $\iff$ $f^{an} : X^{an} \to Y^{an}$ proprio*

Definition 18.9. Un omomorfismo di anelli $\varphi : A \to B$ è **Finito** se induce su B una struttura di A-modulo finitamente generato

Definition 18.10. Un morfismo di schemi $f : X \to Y$ è **Finito** se f è affine, e $f_V^\# : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ è finito per ogni V aperto affine di Y

Anche i morfismi finiti rispettano le tre usuali proprietà in Lemma 17.2.

Lemma 18.11 *Se $\varphi : A \to B$ è un omomorfismo di anelli finito, allora il morfismo associato $f : Spec(B) \to Spec(A)$ è finito.*

Dimostrazione. Se $Y = Spec(B)$, e $V \subseteq X = Spec(A)$ aperto affine, allora $f^{-1}(V) \cong Y \times_X V$ per i teoremi sulla fibra. Dunque $f^{-1}(V)$ è affine poiché è prodotto di affini, e

$$\mathcal{O}_Y(f^{-1}(V)) = \mathcal{O}_X(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_X(V) \otimes_A B$$

è finitamente generato come $\mathcal{O}_X(V)$-modulo. □

Lemma 18.12 *Dato $f : X \to Y$ morfismo di schemi, con Y_i un ricoprimento aperto affine di Y tale che $f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ sia finito per ogni i, allora f è finito.*

Dimostrazione. Sappiamo che f è affine[1]. Se $V \subseteq Y$ è un aperto affine, e $V \subseteq Y_i$, allora va bene. Altrimenti si può trovare un ricoprimento aperto $V = \cup V_i$, con V_i affini tali che $V_i \subseteq Y_i$. Allora $f^{-1}(V_i)$ è affine, $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i))$ è finito su $\mathcal{O}_Y(V_i)$, e valgono

$$f^{-1}(V_i) = f^{-1}(V) \times_V V_i, \quad \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i)) = \mathcal{O}_Y(V_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

Possiamo scegliere $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ che generino $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i))$ come $\mathcal{O}_Y(V_i)$-modulo. Ma allora gli s_i generano $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ come $\mathcal{O}_Y(V)$-modulo se e solo se per ogni punto $p \in V = Spec(\mathcal{O}_Y(V))$, gli elementi $(s_i)_p \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))_p$ generano. Ma dato $p \in V$, allora $p \in V_i$, $\mathcal{O}_Y(V_i)_p = \mathcal{O}_Y(V)_p$ e

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i))_{f^{-1}(p)} = (\mathcal{O}_Y(V_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X))_{f^{-1}(p)} =$$
$$= (\mathcal{O}_Y(V_i))_p \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)_p} \mathcal{O}_X(X)_{f^{-1}(p)} =$$
$$= (\mathcal{O}_Y(V))_p \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)_p} \mathcal{O}_X(X)_{f^{-1}(p)} = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))_{f^{-1}(p)}$$

□

[1] In realtà non è banale

Lemma 18.13 *Un morfismo di schemi finito è proprio*

Dimostrazione. Prendiamo $f : X \to Y$ morfismo di schemi finito. Riduciamoci al caso affine: abbiamo $X = Spec(B)$, $Y = Spec(A)$, e $\varphi : A \to B$ finito. In questo caso, basta dimostrare che f è chiuso, perché la finitezza è invariante per cambio base, e la proprietà di essere chiuso basta testarlo su affini. Se $I = Ker(\varphi)$, allora $A \twoheadrightarrow A/I \hookrightarrow B$ induce $Spec(B) \to Spec({}^{A}\!/_{I}) \hookrightarrow Spec(A)$, dove l'ultima mappa è chiusa. Possiamo dunque assumere che B sia un'estensione intera di A, poiché è un A-modulo finitamente generato. Grazie ai teoremi di going down/up, f è suriettiva, e se $J \subseteq B$ ideale, avremo

$$f(V(J)) = V(\varphi^{-1}(J))$$

dunque f è chiusa. □

Lemma 18.14 *un morfismo di schemi $f : X \to Y$ affine e proprio è anche finito.*

Theorem 18.15 (Criterio Valutazione Properness)
Se $f : X \to Y$ è localmente di tipo finito tra due schemi localmente noetheriani, allora f è proprio se e solo se per ogni R DVR, con K campo associato, e per ogni diagramma sotto, esiste un unico morfismo φ che lo faccia commutare.

$$\begin{tikzcd} Spec(K) \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ Spec(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Example

- $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \to Spec(\mathbb{K})$ non è proprio, poiché scegliamo $R = \mathbb{K}\left[{}^1\!/_t\right]_{({}^1\!/_t)}$ e di conseguenza, $K = \mathbb{K}\left({}^1\!/_t\right)$ con le mappe $Spec(K) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ indotto da $\mathbb{K}[t] \hookrightarrow \mathbb{K}(t)$, e la mappa $Spec(R) \to Spec(\mathbb{K})$ indotta da $\mathbb{K} \hookrightarrow R$. Una funzione $\varphi : Spec(R) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ induce una mappa di anelli $\mathbb{K}[t] \to R$, che non può commutare con le altre, in particolare poiché l'elemento t non può avere nessuna immagine in R.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[t] \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & \mathbb{K}(t) \\ \mathbb{K} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathbb{K}\left[{}^1\!/_t\right]_{({}^1\!/_t)} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Theorem 18.16 *$f = \mathbb{P}^n_R \to Spec(R)$ è proprio per ogni anello R*

Dimostrazione. $\mathbb{P}^n_R = Spec(R) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$, dunque basta provare che il morfismo $f' = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to Spec(\mathbb{Z})$ sia proprio, e poi con un opportuno diagramma cartesiano, si dimostra che anche f è proprio. Usiamo il criterio sopra, prendendo R' DVR con relativo campo K'. Se come al solito, poniamo

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \cup X_i, \quad X_i = Spec(\mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)})$$

allora $Spec(K')$ ha immagine in uno degli X_i. Poniamo che sia in

$$X_0 = Spec(\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]), \quad t_i = {}^{x_i}\!/_{x_0}$$

Questo induce un omomorfismo $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n] \to K'$, corrispondente ad una valutazione $t_i \mapsto a_i \in K'$. Se gli a_i sono in R', va bene, poiché allora fattorizzerebbe

$$\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n] \to R' \to K' \quad \Longrightarrow \quad Spec(K') \to Spec(R') \to X_0 \subseteq X$$

Altrimenti, $a_i = b_i/b_0$ con $b_i \in R'$ e per cui esiste un i tale che $V(b_i) = 0$ (altrimenti gli a_i starebbero già tutti in R'). Dunque prendiamo

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n] \to K' : x_i \mapsto b_i$$

la cui indotta

$$Spec(K') \to \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{Z}} - V(x_0, \ldots, x_n) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$$

si può sollevare a $Spec(R)$. □

19 17-12-14 - Mappe Separate, Proprie e Dimensioni

Ricordiamo un risultato sugli anelli artiniani:

Lemma 19.1 *Dato A anello noetheriano, allora le sequenti sono equivalenti:*

1. *A è artiniano*
2. *A ha dimensione 0*
3. *A ha finiti ideali primi, e la topologia di Zariski su $Spec(A)$ coincide con la topologia discreta*
4. *tutti gli ideali primi sono massimali*
5. *A ha lunghezza finita come A-modulo*

Detto questo, avremo che

Lemma 19.2 *Ogni morfismo di schemi finito $f : X \to Y$ ha fibre finite.*

Dimostrazione. Dato $q \in Y$, e $q \in V \subseteq Y$, con V aperto affine, allora $f^{-1}(V) = U$ è affine poiché f è affine. Dunque $U = Spec(A)$, $V = Spec(B)$ e

$$f^{-1}(q) = Spec(k(q)) \times_V U = Spec(k(q) \otimes_B A) = Spec(C)$$

il morfismo è anche finito, dunque $\mathcal{O}_X(U) = A$ è un $\mathcal{O}_Y(V) = B$-modulo finitamente generato, e dunque C è una $k(q)$-algebra, finitamente generata come spazio vettoriale. Questo però implica che C ha una lunghezza finita visto come C-modulo, poichè ha lunghezza finita visto come $k(q)$-modulo. Dunque, per il risultato sopra, C ha finiti ideali primi, ossia $f^{-1}(q) = Spec(C)$ è finito. $\square$

Theorem 19.3 (Chevalley)
Un morfismo di schemi proprio con fibre finite è finito

Ricordiamo che essere proprio, finito o affine rispetta le solite 3 proprietà (composizione, locale su codominio, invariante per cambio base), ed essere finito equivale ad essere proprio e affine.
Inoltre, se R è un anello, abbiamo mostrato che la mappa $\mathbb{P}^n_R \to Spec(R)$ è propria. In realtà vale più in generale che, se X è uno schema, e

Definition 19.4.
$$\mathbb{P}^n_X := X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$$

allora la proiezione
$$\mathbb{P}^n_X \to X$$

è una mappa propria, ed è facile vederlo con un cambio-base, che lascia invariata la 'properness' dei morfismi.

Lemma 19.5 *Gli embedding chiusi sono morfismi propri*

Definition 19.6. Dato $f : X \to Y$ morfismo di schemi, è **Proiettivo** se si fattorizza come

$$f : X \overset{g}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_Y \overset{h}{\to} Y$$

con g embedding chiuso, e h proiezione.

Definition 19.7. Dato $f : X \to Y$ morfismo di schemi, è **Quasi-Proiettivo** se si fattorizza come

$$f : X \overset{g}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_Y \overset{h}{\to} Y$$

con g embedding localmente chiuso, e h proiezione.

Un morfismo proiettivo è proprio, poiché l'embedding chiuso g è proprio, e anche la mappa h, per quanto detto sopra, è propria. Però non vale il viceversa: Una mappa propria NON è proiettiva.

Lemma 19.8 *Siano $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z$ morfismi di schemi, con g separato. Se $g \circ f$ soddisfa una proprietà $\mathcal{P}$ per cui valgono:*

- *$\mathcal{P}$ è invariante sotto cambio-base*
- *$\mathcal{P}$ è invariante sotto composizione*
- *le immersioni chiuse soddisfano $\mathcal{P}$*

allora f soddisfa $\mathcal{P}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dd, bend right=60, equal] & Y \arrow[d, hook, "\delta"] \arrow[dr, equal] & \\
X \times_Z Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Y \times_Z Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. dato che g è separato, allora $Y \xrightarrow{\delta} Y \times_Z Y$ è un'immersione chiusa. É facile verificare che il diagramma sopra commuti, e che tutti i quadrati siano cartesiani. In particolare, avremo che φ è un'immersione chiusa, e dunque soddisfa $\mathcal{P}$. Inoltre anche $\alpha \circ \psi$ soddisfa $\mathcal{P}$, dunque

$$f = \alpha \circ \psi \circ \varphi \quad \text{soddisfa } \mathcal{P}$$

□

In particolare, avremo che

Lemma 19.9 *Se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sono morfismi di schemi, con g separato e $g \circ f$ proprio, allora f proprio.*

Lemma 19.10 *Un morfismo di schemi quasi-proiettivo e proprio è anche proiettivo.*

Dimostrazione. Se f è quasi-proiettivo, allora si fattorizza come

$$f : X \overset{g}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_Y \xrightarrow{h} Y$$

con g embedding localmente chiuso, e h proiezione e propria. Ma Se $f = h \circ g$ è anche propria, allora per Lemma 19.9 sappiamo che g è propria, dunque chiusa.[1] □

Se g non è separato, allora il Lemma 19.9 non vale. Infatti
Example

- Data Y la retta con due origini, e $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, abbiamo la composizione di morfismi

  $$Id : X \hookrightarrow Y \to X$$

  dove la prima è un'immersione non chiusa. La composizione è l'identità, che è una mappa propria, ma l'immersione non è propria, in quanto non chiusa. Questo perché la proiezione in questo caso NON è separata (come già visto).

Definition 19.11. Dato $X \neq \emptyset$ spazio topologico, la sua **Dimensione di Krull** è definita come

$$\boldsymbol{dim(X)} = \sup \{ n \mid \exists \ Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \text{ chiusi irriducibili} \}$$

Lemma 19.12

$$Y \subseteq X \implies dim(Y) \leq dim(X)$$

[1] E questo implica che embedding chiuso $\iff$ localmente chiuso e proprio.

Lemma 19.13 *Se X_i è un ricoprimento aperto di X, allora*

$$dim(X) = \max dim(X_i)$$

In particolare questo ci permetterà di verificare la dimensione sugli schemi affini.

Lemma 19.14 *Se A è un anello, allora la sua dimensione di Krull coincide con la dimensione di Krull di $Spec(A)$*

Si può anche dare una definizione di dimensione locale attorno ad un punto:

Definition 19.15. Dato $p \in X$, allora la **Dimensione di p in X** è

$$\boldsymbol{dim_p(X)} = \min \{ \, dim(U) \mid p \in U \subseteq X \text{ aperto} \, \}$$

Lemma 19.16

$$dim(X) = \max_{p \in X} dim_p(X)$$

Definition 19.17. Dato $Y \subseteq X$ chiuso irriducibile, allora la sua **Codimensione** è

$$\boldsymbol{Codim_Y(X)} = \sup \{ \, n \mid \exists \; Y = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \text{ chiusi irriducibili} \, \}$$

Se $C \subseteq X$ è solo un chiuso, allora

$$\boldsymbol{Codim_C(X)} = \inf \{ \, Codim_V(X) \mid V \subseteq X \text{ chiuso irriducibile} \, \}$$

Lemma 19.18 *Se $Y \subseteq X$ è un chiuso, allora*

$$dim(Y) \geq Codim_Y(X) + dim(Y)$$

Presa la catena di lunghezza maggiore in X, deve partire da un irriducibile, dunque

Lemma 19.19

$$dim(X) = \sup \{ \, Codim_Y(X) \mid Y \textit{ chiuso irriducibile} \, \}$$

Definition 19.20. Dato un ideale $I \subseteq A$, la sua **Altezza** è

$$\boldsymbol{ht(I)} = Codim_{V(I)}(Spec(A))$$

Lemma 19.21 *Se I è primo, allora*

$$ht(I) = dim A_I$$

Dato che l'intersezione tra un irriducibile e un aperto è ancora irriducibile nell'aperto, avremo che

Lemma 19.22 *Se X è uno schema, $p \in X$ un punto, $Y = \overline{\{p\}}$, e $p \in U$ un intorno aperto, allora*

$$Codim_Y(X) = Codim_Y(U) = dim(\mathcal{O}_X)_p$$

e di conseguenza

$$dim(X) = \sup_{p \in X} dim(\mathcal{O}_X)_p$$

Theorem 19.23 (Teorema di Krull su Ideali Principali)
Se A è un anello noetheriano locale, e $I = (f_1, \ldots, f_r)$ è un ideale, allora

$$ht(I) \leq r$$

Una conseguenza è che se m è l'ideale massimale di A locale noetheriano, e $\mathbb{K} = A/m$, allora

$$dim(A) = ht(m) \leq dim_{\mathbb{K}}\, m/m^2$$

Theorem 19.24 *Se A locale noetheriano, e $I = (f_1, \ldots, f_r)$, allora*

$$dim\, A/I \geq dim(A) - r$$

Per i teoremi di Going Up e Down, abbiamo anche che

Lemma 19.25 *Se $A \subseteq B$ è un'estensione intera di anelli, allora*

$$dim(A) = dim(B)$$

Theorem 19.26 *Dato A un dominio finitamente generato come algebra sul campo k, e ponendo $\mathbb{K}$ il suo campo di frazioni $Q(A)$, allora*

$$dim(A) = trdeg_k\, \mathbb{K}$$

Inoltre, se I è un ideale di A, allora

$$ht(I) + dim\, {}^{A}\!/_{I} = dim(A)$$

Lemma 19.27 *Se X è uno schema integrale e localmente di tipo finito su un campo k, e p è il suo punto generico, allora*

$$dim(X) = trdeg_k\; k(p)$$

e se $Y \subseteq X$ chiuso,

$$dim(Y) + Codim_Y(X) = dim(X)$$

20 15-01-15 - Schemi Normali

Definition 20.1. Un dominio è detto **Normale** se è chiuso integralmente nel suo campo di frazioni

Lemma 20.2 *Dato A un dominio, e K il suo campo di frazioni, allora le seguenti sono equivalenti:*

1. *A è normale*
2. *L'unico anello B finito su A per cui $A \subseteq B \subseteq K$ è A stesso*
3. *$\forall m \in Specm(A)$, A_m è normale*

Lemma 20.3 *Dato A anello normale, con K campo di frazioni, allora*

1. *$A[x_1, \dots, x_n]$ normale*
2. *Se $S \subseteq A$ è moltiplicativamente chiuso, $S^{-1}A$ è normale*
3. *A è l'intersezione dei A_m al variare di m tra gli ideali massimali di A*
4. *Se A è noetheriano, I è un suo ideale, e g è un elemento di K per cui $gI \subseteq I$, allora $g \in A$*
5. *Se A è noetheriano, allora A è l'intersezione dei A_p al variare di p tra i primi di altezza uno in A*

Dimostrazione.
4)Dato che A è noetheriamo, allora I è un A-modulo finitamente generato, e la moltiplicazione per g è un omomorfismo di A moduli da I in sé. Dunque, per Hamilton Cayley, esiste un polinomio monico a coefficienti in A che annulla g, ossia g è intero su A. Ma dato che A è normale, $g \in A$.

5) Sia B l'intersezione dei A_p al variare di p tra i primi di altezza uno in A. Sappiamo che $A \subseteq B \subseteq K$, e se $B \neq A$, allora esiste $f \in B - A$. Chiamiamo

$$I_f = \{ a \in A \mid af \in A \}$$

che è un ideale proprio di A, in quanto $1 \notin I_f$. Dato che A è noetheriano, possiamo scegliere un I_f massimale tra gli I_g con $g \in B - A$. Questo sarà primo poiché

$$ab \in I_f, \quad b \notin I_f \implies a \in I_{bf} \supseteq I_f \implies a \in I_f$$

per massimalità. Chiamando $p = I_f$, avremo $f \notin A_p$, poiché $f = \frac{a}{s} \implies s \in I_f$. Dunque p non è di altezza 1, poiché altrimenti $f \in B \subseteq A_p$. Dunque

$$fp \subseteq A \implies fpA_p \subseteq A_p$$

A_p è ancora noetheriano locale, dunque per il punto 4), fpA_p non può essere contenuto in pA_p, in quanto $f \notin A_p$. Dunque fpA_p contiene qualche elemento invertibile, e di conseguenza pA_p è generato dall'inverso di f. Ciò implica in particolare che l'ideale è principale, e che A_p è un DVR, il che è assurdo poiché allora p avrebbe altezza 1. □

Lemma 20.4 *Se A è un Dominio a Fattorizzazione Unica, allora A è normale*

Definition 20.5. Un **Dominio di Dedekind** è un dominio noetheriano in cui A_p è un DVR per ogni p primo

NOTA: un dominio di Dedekind è locale se e solo se è un DVR poiché è isomorfo al localizzato per l'ideale massimale.

Lemma 20.6 *Dato un anello A noetheriano, e M, N A-moduli finitamente generati, allora $Hom_A(M, N)$ è un A-modulo finitamente generato*

Dimostrazione. La mappa $A^n \twoheadrightarrow M$ induce l'inclusione

$$Hom(M, N) \subseteq Hom(A^n, N) \cong N^n$$

Ma N^n è finitamente generato, e per noetherianità lo sarà anche $Hom(M, N)$. □

Theorem 20.7 *Un dominio noetheriano è di Dedekind se e solo se è normale e ha dimensione 1*

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) Gli A_p sono DVR, dunque PID, UFD e normali. Di conseguenza, per Lemma 20.2.3, A è normale. Inoltre ha dimensione 1 poiché se ci fosse un primo non zero e non massimale, sarebbe contenuto strettamente in un ideale massimale m, ma allora A_m non sarebbe un DVR.
$\Longleftarrow$) Gli A_p sono domini locali noetheriani di dimensione 1. Per vedere che è un DVR, basta mostrare che il suo ideale massimale p è principale. Per Nakayama, $p \neq p^2$, dunque prendiamo $f \in p - p^2$. Ma allora ${}^{A_p}\!/\!{}_{fA_p}$ ha dimensione zero, e pertanto è un anello artiniano, e dunque sappiamo che esiste un numero naturale r per cui $p^r \subseteq (f)$. Se r fosse 1, allora $p = (f)$. Altrimenti, prendiamo $r > 1$ minimale, e $a \in p^{r-1}$. l'elemento ${}^{a}\!/\!{}_{f}$ sta nel campo di frazioni, ma dato che $ap \subseteq (f)$, allora ${}^{ap}\!/\!{}_{f} \subseteq A$ è un ideale. Se non fosse tutto A, sarebbe incluso in p, e per Lemma 20.3.4, ${}^{a}\!/\!{}_{f}$ starebbe in A, ossia $a \subseteq (f)$, e pertanto $p^{r-1} \subseteq (f)$, il che è assurdo per minimalità di r. Dunque esiste un x in p per cui ${}^{ax}\!/\!{}_{f} = 1$, ossia $ax = f \in p^2$, ma anche questo è un assurdo. □

Definition 20.8. Uno schema irriducibile X si dice **Normale** se $(\mathcal{O}_X)_p$ è normale per ogni $p \in X$.

Diciamo che uno schema X è *normale su* $p \in X$ se $(\mathcal{O}_X)_p$ è normale. Dunque uno schema normale è uno schema irriducibile e normale su tutti i punti.

Lemma 20.9 *Uno schema affine e irriducibile $X = Spec(A)$ è normale se e solo se A è normale.*

NOTA: Dato che un anello normale è un dominio, allora uno schema irriducibile e normale è anche integrale.

Lemma 20.10 *Dato uno schema irriducibile X, sono equivalenti*

1. *X normale*
2. *Per ogni aperto $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ è normale*

Se X è anche qc, allora diventa equivalente pure

3. *X è normale sui suoi punti chiusi*

Per dimostrare il lemma sopra, serve che in un qualsiasi schema qc esista un punto chiuso, ma questo si dimostra per induzione sul numero di aperti affini del ricoprimento. In mancanza dell'ipotesi di qc, dobbiamo imporre, per esempio, che la dimensione sia bassa:

Lemma 20.11 *Dato X schema localmente noetheriano e integrale di dimensione 1, avremo*

$$X \text{ normale} \iff (\mathcal{O}_X)_p \text{ DVR} \quad \forall p \text{ chiuso}$$

Dimostrazione. le spighe hanno dimensione 1 o 0, e sono domini locali, dunque se X è normale, le spighe sono rispettivamente DVR o campi. Ma tutti gli affini hanno dimensione 1 o 0, e sono dei domini, dunque tutti i punti a parte il punto generico sono chiusi, e le loro spighe hanno dimensione 1, pertanto sono dei DVR.
Viceversa, i DVR sono normali, e la spiga del punto generico è un campo, dunque normale. □

Notiamo che negli schemi integrali di dimensione 0 tutti i sottoschemi aperti affini sono domini di dimensione zero, ossia campi, ma per essere irriducibile, deve essercene solo uno, dunque gli schemi integrali di dimensione 0 sono spettri di campi.

Example

- Se R è un anello normale, $\mathbb{A}^n_R$ e $\mathbb{P}^n_R$ sono normali.

Definition 20.12. Uno schema si dice **Normale** se è unione disgiunta di schemi irriducibili normali

Stavolta, se $X = Spec(A)$ è normale e affine, allora è unione di schemi irriducibili normali, ma questi sono sottoschemi chiusi di un affine, dunque saranno affini. Da questo, otteniamo che X è ricoperto da schemi affini normali e irriducibili disgiunti, ma X è qc, quindi saranno in numero finito. Tutto questo porta a dire che

$$X \text{ normale e affine} \iff X \cong Spec(A_1 \times \cdots \times A_n), \quad A_i \text{ normali}$$

Lemma 20.13 *Dato X schema noetheriano normale, allora è unione disgiunta di finiti schemi irriducibili normali*

Lemma 20.14 *Dato uno schema X localmente noetheriano e normale, con $Z \subseteq X$ sottoinsieme chiuso di codimensione almeno 2, allora*

$$\mathcal{O}_X(X) \cong \mathcal{O}_X(X - Z)$$

Dimostrazione. X è unione finita disgiunta di schemi integrali, dunque poniamo X integrale e affine, $X = Spec(A)$. Se $p \in Z$ allora come primo avrebbe altezza almeno 2, e dato che A è normale, avremo

$$A = \mathcal{O}_X(X) \subseteq \mathcal{O}_X(X - Z) = \bigcap_{p \in X - Z} A_p \subseteq \bigcap_{ht(p)=1} A_p = A$$

□

21 21-01-15 - Normalizzazione

Lemma 21.1 *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi integrali. Allora le seguenti sono equivalenti.*

1. *Il morfismo f è dominante.*
2. *L'omomorfismo di fasci $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ è iniettivo.*
3. *Il morfismo f porta il punto generico di X nel punto generico di Y.*

Definition 21.2. Dato X uno schema integrale, allora $\overline{X}$ è il **Normalizzato** di X se è integrale, normale e se esiste un morfismo dominante di schemi $\varphi : \overline{X} \to X$ per cui ogni altro morfismo dominante $\psi : Y \to X$ con Y integrale e normale si fattorizza tramite φ.

Grazie alla proprietà universale, se esiste, allora la normalizzazione è unica

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[rr, "\varphi"] & & X \\ & Y \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Theorem 21.3 *Dato $X = Spec(A)$ uno schema affine e integrale, allora la sua normalizzazione è $\overline{X} = Spec\overline{A}$, dove $\overline{A}$ è la chiusura integrale di A nel suo campo di frazioni, e $\varphi : \overline{X} \to X$ è indotto da $A \hookrightarrow \overline{A}$*

Dimostrazione. $\varphi : \overline{X} \to X$ è dominante in quanto è suriettivo grazie al teorema del Lying Down, poiché $A \subseteq \overline{A}$ è un'estensione intera. Se Y è integrale, normale, e dominante su X tramite $\psi : Y \to X$, allora avremo un omomorfismo $A \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$, che induce $Q(A) \hookrightarrow (\mathcal{O}_Y)_p = k(p)$, dove p è il punto generico di Y, ma dato che $\mathcal{O}_Y(Y)$ è normale, si fattorizza

$$A \hookrightarrow \overline{A} \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$$

ottenendo la fattorizzazione desiderata. □

Dato che per indicare la normalizzazione di uno schema, dobbiamo anche fornire il morfismo dominante, diremo che il normalizzato di uno schema è la coppia schema-morfismo.

Lemma 21.4 *Se X integrale, e $\varphi : \overline{X} \to X$ è una sua normalizzazione, allora per ogni aperto $U \subseteq X$ non vuoto, la sua normalizzazione è*

$$\varphi : \varphi^{-1}(U) \to U$$

Dimostrazione. Si usano la proprietà universale del normalizzato e del prodotto fibrato, in quanto

$$\varphi^{-1}(U) \cong \overline{X} \times_X U$$

e ogni aperto in uno schema integrale è denso □

Theorem 21.5 *Per ogni X integrale, la normalizzazione esiste sempre, ed il relativo morfismo è affine*

Dimostrazione. Se X è ricoperto da U_i affini integrali, sappiamo che esistono le normalizzazioni $\varphi_i : \overline{U_i} \to U_i$, ma se restringiamo φ_i e φ_j a U_{ij}, otteniamo la sua normalizzazione, che dev'essere unica, dunque le φ_i si incollano a formare $\varphi : \overline{X} \to X$ normalizzazione di X. □

Se X non è integrale, possiamo ancora definire la normalizzazione, ma solo nell'ipotesi di noetherianità, poiché le sue componenti irriducibili sono chiuse e finite, e dunque ammettono una sola struttura di schema ridotto (pertanto integrale).

Definition 21.6. Dato X schema noetheriano, siano X_i le sue componenti irriducibili, con le rispettive strutture di schema ridotto(e dunque integrale) associate. Allora $\overline{X} := \coprod \overline{X_i}$ è la **Normalizzazione** di X

Example

- Dato $X = Spec\,(A)$, con $A = {}^{\mathbb{K}[x,y]}\!/\!_{(y^2 - x^3)}$, sia $t = {}^{y}\!/\!_{x}$, cosicché $x = t^2$, $y = t^3$ e pertanto $A \subseteq \mathbb{K}[t]$ è un'estensione intera. Dato che $K[t]$ è normale, allora è la sua chiusura normale.
- Dato $X = Spec\,(A)$, con $A = {}^{\mathbb{K}[x,y]}\!/\!_{(y^2 - x^2(x+1))}$, sia $t = {}^{y}\!/\!_{x}$, cosicché $x = t^2 - 1$, $y = t(t^2 - 1)$, e dunque $A \subseteq \mathbb{K}[t]$ è ancora la sua normalizzazione.
- **Whitney Umbrella** Dato

$$A = \{\, f \in \mathbb{K}[x,y] \mid f(0,y) = f(0,-y) \,\}$$

allora la sua normalizzazione è

$$A = \mathbb{K}[x, y^2, xy] \subseteq \mathbb{K}[x,y]$$

Se ora prendiamo

$$A \cong {}^{\mathbb{K}[u,v,w]}\!/\!_{(u^2v - w^2)} \twoheadrightarrow {}^{\mathbb{K}[u,v,w]}\!/\!_{(u,w)} \cong \mathbb{K}[v]$$

è sicuramente normale, ma il morfismo indotto tra gli schemi NON è dominante (è un quoziente, dunque l'immagine è un chiuso), e difatti non esiste la fattorizzazione tramite il normalizzato.

Diamo un po' di lemmi preliminari

Lemma 21.7 *Dato A dominio normale, con campo di frazioni K, e L/K un'estensione di campi finita e separabile, allora*

$$b \in \overline{A}^L \implies Tr_{L/K}(b) \in A$$

Dimostrazione. $Tr_{L/K}(b)$ appartiene a K, ed inoltre è ancora intero su A, in quanto è somma di elementi interi. Ma A è normale, dunque l'elemento appartiene ad A. □

Lemma 21.8 *Dato A dominio normale noetheriano, con campo di frazioni K, e L/K un'estensione di campi finita e separabile, allora $\overline{A}^L$ è finito su A*

Dimostrazione. Sia $\beta : L \times L \to K : (x, y) \mapsto Tr_{L/K}(xy)$ una forma simmetrica quadratica. Per dimostrare che è non degenere, notiamo che

$$L \otimes_K \overline{K} \cong \overline{K}^n \qquad Tr_{\overline{K}^n/\overline{K}} \cong Tr_{L/K} \otimes Id_{\overline{K}}$$

ma sui vettori di base e_i avremo $Tr_{\overline{K}^n/\overline{K}}(e_i) = 1$, dunque anche $Tr_{L/K}$ è non zero (questo segue anche dal teorema di rappresentazione dei caratteri). Da qui, si dimostra che non è degenere [Lang, VI, Theorem 5.2]. Presa una base $\{x_i\}$ di L su K, sappiamo che esiste $a_i \in K^*$ per cui $a_i x_i \in \overline{A}^L = B$ (Lemma 1.31 prerequisiti), dunque possiamo supporre gli x_i in B, ed avremo la base duale $\{x_i^*\}$ tale che $\beta(x_i, x_j^*) = \delta_{ij}$, ma allora

$$b \in B \implies b = \sum \lambda_i x_i^* \implies \beta(b, x_i) = \lambda_i \in A$$

dove l'ultimo è dato dal lemma sopra. Dunque B è incluso nell'A-modulo generato dagli x_i^*, ma dato che A è noetheriano, allora B sarà finito su A. □

Theorem 21.9 *Dato X uno schema di tipo finito su un campo $\mathbb{K}$, allora $\overline{X}$ è finito su X*

Per mostrare questo, basta farlo nel caso affine, ossia dimostrare che una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata A è tale che la chiusura di A nel suo campo dei quozienti è finita su A. Dato che A è noetheriano, possiamo anche farlo solo sulle componenti irriducibili, imponendo che lo schema sia integrale, ossia che A sia un dominio. Dimostriamo ora un risultato più potente:

Theorem 21.10 *Dato A dominio e $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, con $K = Q(A)$, e L/K un'estensione di campi finita, allora $\overline{A}^L$ è finito su A*

Dimostrazione. Per il lemma di Noether, sappiamo che A è intero su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, dunque la chiusura in L coincide con la chiusura dell'anello di polinomi. Supponiamo pertanto che A sia un anello di polinomi su $\mathbb{K}$, e $K = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Se L è separabile su K, allora sappiamo già che è vero, quindi supponiamo L normale[1], e $K \subseteq E \subseteq L$ con l'ultima estensione separabile, e la prima puramente inseparabile. Da questo deduciamo che possiamo supporre L puramente inseparabile su K, e $0 < p = char\ K = char\ L$. Dato che L è finito su K, allora è algebrico, e

$$\overline{K} = \overline{L} \qquad L = K(e_1, \ldots, e_n) \qquad \exists N : e_i^{p^N} \in K \ \ \forall i \qquad q = p^N$$

[1]perché possiamo farlo?

Gli e_i li possiamo prendere in $B = \overline{A}^L$, ma allora $e_i^q \in K \implies e_i^q \in A$, poiché A è normale, e di conseguenza $b \in B \implies b^q \in A$. la mappa

$$\varphi : \overline{L} \to \overline{L} : x \mapsto x^q$$

è un isomorfismo, ma allora

$$e_i^q = f_i(x_1, \dots, x_n) \implies e_i = g_i(x_1^{1/q}, \dots, x_n^{1/q})$$

e se $\mathbb{K}' \subseteq \overline{L}$ generato dai coefficienti di g_i su $\mathbb{K}$, allora $\mathbb{K}'/\mathbb{K}$ è finita, ed è tale che $B \subseteq \mathbb{K}'[x_1^{1/q}, \dots, x_n^{1/q}]$, poiché contiene gli e_i. Questo però è un modulo su A finito, e dato che A è Noetheriano, allora B è finito su A. $\square$

Warning I Domini di Dedekind NON sono sempre normali, nè di tipo finito su qualche campo, infatti ne esistono tali che i normalizzati siano sempre Domini di Dedekind, ma non finiti.

Lemma 21.11 *Dato X schema di tipo finito su $\mathbb{K}$, allora*

$$\{\, p \in X \mid (\mathcal{O}_X)_p \textit{ normale} \,\}$$

è aperto in X

Dimostrazione. Possiamo sempre assumere $X = Spec(A)$ affine, con A $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. Se $K = Q(A)$, $B = \overline{A}^K$, allora $A_p \subseteq B_p$ è la sua chiusura intera e $\overline{A_p} = B_p$ se e solo se A_p è normale. Se $M = {}^{B}\!/_{A}$, allora

$$\{\, p \in X \mid (\mathcal{O}_X)_p \text{ normale} \,\} = \{\, p \in X \mid M_p = 0 \,\}$$

Se chiamiamo e_i i finiti generatori di M, avremo che M_p è nullo se esistono $s_i \notin p : s_i e_i = 0$, dunque $\cap X_{s_i}$ è un aperto contenente p in cui tutti i primi annullano M. Dunque l'insieme è aperto. $\square$

Lemma 21.12 *Ogni schema ridotto di tipo finito su $\mathbb{K}$ ha un aperto denso, che è pure uno schema normale*

Dimostrazione. Sappiamo (Lemma 14.20) che la spiga di un primo che sta nell'intersezione di due componenti irriducibili non è un dominio, dunque l'insieme definito sopra è disgiunto da tali intersezioni. Questo comporta che è unione disgiunta di componenti irriducibili, e pertanto normale. Inoltre, mettendoci su un aperto affine $Spec(A)$, notiamo che i punti generici delle componenti irriducibili appartengono all'aperto, in quanto corrispondono a primi minimali P nell'anello, ma dato che deve essere ridotto, A_P è un anello artiniano locale e ridotto, ossia un campo, dunque normale. Pertanto l'aperto è anche denso. $\square$

22 22-01-15 - Schemi Regolari

Lemma 22.1 *Dato A un anello dominio locale noetheriano, con m il suo ideale massimale, e $\mathbb{K} = A/m$, allora*

- *$dim_{\mathbb{K}} {}^{m}\!/_{m^2}$ è il minimo numero di generatori di m*
- *$dim\ A \leq dim_{\mathbb{K}} {}^{m}\!/_{m^2}$*

Definition 22.2. Dato un dominio locale noetheriano A, con m il suo ideale massimale, e $\mathbb{K} = A/m$, si dice **Regolare** se

$$dim\ A = dim_{\mathbb{K}} {}^{m}\!/_{m^2}$$

Theorem 22.3 *Se A è un anello regolare, allora*

- *A è un Dominio a Fattorizzazione Unica (e dunque normale)*
- *per ogni $p \in Spec(A)$, A_p è regolare*

Possiamo dare una nozione di regolarità anche ad anelli non locali

Definition 22.4. Dato un dominio noetheriano A, si dice **Regolare** se tutti i suoi localizzati per primi A_p sono regolari

Lemma 22.5 *Se A è un dominio noetheriano, allora A è regolare se e solo se lo sono tutti i suoi localizzati A_m per ideali massimali*

Example

- Dato $A = R/(f)$, con $R = K[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}$ e $f \in (x_1, \ldots, x_n) = M$ non zero, allora $\dim A = n - 1$, e se $m = M/(f)$ è l'ideale massimale di A, avremo

$$R \xrightarrow{f} M \to m \to 0$$

e tensorizzando per $\otimes_R {}^{R}\!/_{M}$,

$$\frac{R}{M} \xrightarrow{f} \frac{M}{M^2} \to \frac{m}{m^2} \to 0$$

dunque è facile vedere per dimensioni su K che

$$A \text{ regolare} \iff f \notin M^2 \iff {}^{\partial f}\!/_{\partial x_i}(0) \neq 0$$

- lo stesso ragionamento si può riadattare ad ogni anello regolare locale R, ossia, dato M il suo ideale massimale, e $f \in M - \{0\}$ un elemento, si ha

$$R/_{fR} \text{ regolare } \iff f \notin M^2$$

- in particolare, preso $A = K[x]/_{(p(x))}$, con $p(x)$ non costante, i suoi massimali sono i fattori irriducibili di $p(x)$. Se $q(x)$ è un fattore irriducibile di $p(x)$, allora chiamiamo $R = K[x]_{(q(x))}$ locale, e $f = p(x) \in (q(x)) = M \subseteq R$. Avremo che

$$A_{(q(x))} = R/_{p(x)R} \text{ regolare } \iff p(x) \notin (q(x)^2)$$

ossia, A è regolare su $q(x)$ se e solo se è un fattore semplice di $p(x)$. Ciò ci dice che A è regolare se e solo se $p(x)$ è square-free.

- In generale, se $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $I = (f_1, \ldots, f_m)$, $A = R/_I$, $X = Spec(A)$, e prendiamo un massimale $P \in Specm(A)$ tale che $A/_P = K$, allora $P = (\{x_i - a_i\})$. Chiamiamo M il massimale corrispondente in R, ed otteniamo

$$R^m \to M \to P \to 0 \quad : \quad (b_1, \ldots, b_m) \mapsto \sum b_i f_i \mapsto 0 \mapsto 0$$

tensorizzando per $\cdot \otimes_R A/_P = \cdot \otimes_R K = \cdot \otimes_R R/_M$ otteniamo

$$K^m \xrightarrow{f} \frac{M}{M^2} \cong K^n \twoheadrightarrow \frac{P}{P^2} \to 0$$

localizzando per P e M, otteniamo che A_P è regolare quando

$$\dim_p X = \dim A_p = n - rk(f)$$

Dato che M/M^2 ha come base gli $x_i - a_i$, allora avremo che

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \overset{f}{\mapsto} (\partial f_i/\partial x_1, \ldots, \partial f_i/\partial x_n)(a_1, \ldots, a_n)$$

Dunque il rango di f è il rango della matrice Jacobiana composta dai $\partial f_i/\partial x_j(a)$, che d'ora in poi indicheremo come $J_f(a)$.

Analizziamo un po' meglio l'ultimo esempio:
un anello regolare è normale, dunque

$$\{\, p \in X \mid (\mathcal{O}_X)_p \text{ regolare} \,\} \subseteq \{\, p \in X \mid (\mathcal{O}_X)_p \text{ normale} \,\}$$

L'abbiamo studiato per P massimali particolari, ma in realtà la stessa argomentazione vale per qualsiasi primo P di A, e l'unica differenza è che la matrice Jacobiana non va più valutata in un elemento di K^n, ma bisogna prendere le derivate parziali, e guardare le loro immagini in $k(p) = A_p/pA_p$. A noi interessano i punti p su cui $(\mathcal{O}_X)_P$ è regolare, e per cui $A/P = K$, ossia che siano razionali. X è uno schema noetheriano, con X_i finite componenti irriducibili, dunque prendiamo d dimensione di X_i, e

$$\{\, p \in X_i(K) \mid (\mathcal{O}_X)_p \text{ regolare} \,\} = \{\, p \in X_i(K) \mid \dim_p X = d - J_f(p) \,\}$$

ma questa è una condizione aperta, in quanto coincide con il non annullarsi di determinanti dei minori della matrice Jacobiana. Pertanto questo insieme è aperto.

Definiamo adesso la regolarità per schemi

Definition 22.6. dato uno schema X localmente noetheriano, si dice **Regolare** se $(\mathcal{O}_X)_p$ è regolare per ogni $p \in X$

Lemma 22.7 *Uno schema X localmente noetheriano è regolare se e solo se ogni suo aperto affine è lo spettro di un anello regolare*

Riprendiamo ora gli esempi sopra. Abbiamo effettivamente dimostrato che

Theorem 22.8 *Se X è uno schema localmente di tipo finito su $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora*

$$\{\, p \in X \mid \{\, p\,\} \text{ chiuso, } (\mathcal{O}_X)_p \text{ regolare} \,\} \text{ è aperto}$$

In particolare, un punto chiuso è regolare se e solo se

$$\dim_p X = n - J_f(p)$$

Dimostrazione. nei campi algebricamente chiusi, i punti sono chiusi se e solo se razionali, dunque l'abbiamo già mostrato. □

Theorem 22.9 *Se X è uno schema localmente di tipo finito su $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora*

$$\{\, p \in X \mid (\mathcal{O}_X)_p \text{ regolare} \,\} \text{ è aperto}$$

Dimostrazione.

$$Z = \{\, p \in X \mid (\mathcal{O}_X)_p \text{ regolare} \,\} \subseteq \{\, p \in X \mid (\mathcal{O}_X)_p \text{ dominio} \,\}$$

dove l'ultimo è aperto, dunque ci possiamo ridurre ad uno schema integrale ed affine, in particolare

$$X = Spec(A) \qquad A = {}^{k[x_1, \dots, x_n]}\!\big/_{P}$$

dove $P = (f_1, \dots, f_r)$ è primo, e A è un dominio. Prendiamo la matrice Jacobiana M degli f_i, e chiamiamo J l'ideale di A generato dalle immagini dei minori di stazza massima in M. Grazie ai risultati sopra, sappiamo che un punto chiuso è singolare(non regolare) se e solo se contiene J, e preso un punto singolare q anche non chiuso, allora tutti i massimali m in cui è contenuto sono singolari(poiché localizzati di regolari sono regolari); di conseguenza $J \subseteq q$, e da ciò deduciamo che i punti singolari sono contenuti in $V(J)$.

Viceversa, preso q regolare, sia $Y = \overline{\{q\}}$, e $y \in Y$ un punto chiuso e regolare[1], avremo che y è regolare e chiuso su X, dunque $y \notin V(J)$. Concludiamo che $x \notin V(J)$, e dunque $V(J)^c = Z$. $\square$

Lemma 22.10 *Se X è uno schema ridotto di tipo finito su $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora X contiene almeno un punto regolare, dunque*

$$\{\, p \in X \mid \; (\mathcal{O}_X)_p \textit{ regolare} \} \;\; \textit{è denso}$$

Lemma 22.11 *Il Lemma 22.10 e il teorema 22.9 sono veri per qualsiasi campo.*

[1]esiste in ogni schema localmente finito su k e integrale

23 29-01-15 - Schemi Lisci

Lemma 23.1 *Dato X schema localmente di tipo finito su $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora*

- *Se $p \in X(\mathbb{K})$ e $X = Spec(A)$, con $A = {}^{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}\!/\!_{(f_1, \dots, f_m)}$, allora*

$$dim {}^{m_p}\!/\!_{m_p^2} = n - rk\ J_f(p) \geq dim_p X = dim(\mathcal{O}_X)_p$$

  dove $J_f(p)$ è il Jacobiano $\left({}^{\partial f_i}\!/\!_{\partial x_j}\right)$ valutato in $p \in \mathbb{K}^n$.

- *X regolare in $p \iff n - rk\ J_f(p) = dim_p X$*[1][2]

- *Se $X = Spec(A)$, allora $\{ p \in X(\mathbb{K}) \mid (\mathcal{O}_X)_p$ regolare$\}$ è aperto in $X(\mathbb{K}) = Specm(A)$*

- *$(\mathcal{O}_X)_p$ è regolare $\iff \overline{\{p\}}$ contiene un punto chiuso regolare*

L'ultimo punto, in particolare, ci dice che dato uno schema affine, possiamo testare la regolarità sui punti razionali, e tutti gli altri punti regolari saranno inclusi in uno di questi. In particolare, in caso di K-algebra con campo algebricamente chiuso, allora lo schema è regolare se e solo se lo è sui punti chiusi.

Lemma 23.2 *La suriettività è invariante per cambio base*

Dimostrazione. Dato $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$ suriettiva, prendiamo $q' \in Y'$, $q = \psi(q')$ e $p \in f^{-1}(q)$. Avremo

$$p \times_q q' = Spec(\mathbb{K}(p) \otimes_{\mathbb{K}(q)} \mathbb{K}(q')) \neq \emptyset$$

ma per commutatività

$$f'(p \times_q q') = q'$$

$$\begin{tikzcd}
p \times_q q' \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & q' \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "\psi"] & \\
& X \arrow[r, "f"] & Y & \\
p \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & q \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

□

NOTA: in situazioni del genere, ossia con un diagramma come quello sopra, in cui sono cartesiani il quadrato a destra, quello a sinistra e quello centrale, allora anche il quadrato grande è cartesiano.

Grazie a questo, riusciamo a dire facilmente che, dato un K-schema X, e data $\overline{K}$ la sua chiusura algebrica, allora $X_{\overline{K}} = X \times_K Spec(\overline{K}) \to X$ è suriettiva.

[1] questo vale anche per punti chiusi nel caso in cui $\mathbb{K}(p)$ sia separabile su $\mathbb{K}$

[2] Su campi non algebricamente chiusi, questo diventa la condizione di liscezza per X su p

Warning NON succede lo stesso con l'iniettività, per esempio l'inclusione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ induce il morfismo iniettivo $Spec(\mathbb{C}) \hookrightarrow Spec(\mathbb{R})$, ma tensorizzando per $\mathbb{C}$ si ottiene

$$Spec(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cong Spec(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \to Spec(\mathbb{C})$$

che non può essere iniettiva.

Un altro modo di vedere il risultato sopra, è prendendo X affine, con

$$X = Spec(A) \qquad A = {K[x_1, \dots, x_n]}/{I}$$

In questo caso,

$$X_{\overline{K}} = X \times_K Spec(\overline{K}) = Spec\left({K[x_1, \dots, x_n]}/{I} \otimes_K \overline{K}\right) = Spec\left({\overline{K}[x_1, \dots, x_n]}/{I}\right)$$

$$\begin{tikzcd}
P \times_X X_{\overline{K}} \arrow[r] \arrow[d] & Spec(K(p)) \arrow[d] \\
X_{\overline{K}} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Spec(\overline{K}) \arrow[r] & Spec(K)
\end{tikzcd}$$

Questo anello è intero su A, dunque per i teoremi di going up/down possiamo concludere di nuovo che la mappa $X_{\overline{K}} \to X$ è suriettiva. Inoltre sappiamo che controimmagini di massimali sono massimali, dunque preso $q \in X_{\overline{K}}$ con immagine $p \in X$ chiuso, allora q è pure chiuso, ed in particolare razionale. Infine

$$f : X_{\overline{K}} \to X \implies f^{-1}(p) \cong X_{\overline{K}} \times_X Spec(K(p)) \cong Spec(\overline{K} \otimes_K K(p))$$

e dato che $K(p)$ è finito su K, essendo p massimale, allora $\overline{K} \otimes_K K(p)$ è un anello artiniano su $\overline{K}$.

Warning è anche finito su $\overline{K}$, dunque è intero, ma nessuno ci dice che è un dominio. Per esempio, preso $K = \mathbb{R}$, $p \in Specm(\mathbb{R}[x])$, $p = (x^2 + 1)$, allora $K(p) = \mathbb{C}$, dunque $\overline{K} \otimes_K K(p) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

Definition 23.3. Uno schema X su $\mathbb{K}$ si dice **Liscio** in $p \in X$ se $X_{\overline{\mathbb{K}}} := X \times_{\mathbb{K}} Spec\, \overline{\mathbb{K}}$ è regolare in $\overline{p} \in f^{-1}(p)$, dove $f : X_{\overline{\mathbb{K}}} \to X$ è la proiezione

A prima vista potrebbe sembrare che la liscezza di un punto dipenda dalla scelta della controimmagine, ma adesso vediamo che è indipendente.

Lemma 23.4 *Se $X = Spec(A)$ è uno schema affine, con*

$$A = {\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}/{(f_1, \dots, f_m)}$$

e $p \in X$ un punto chiuso, allora X è liscio in p se e solo se tutti i punti in $f^{-1}(p)$ sono regolari, dove $f : X_{\overline{\mathbb{K}}} \to X$.

Dimostrazione. Chiamiamo $A \subseteq A \otimes_K \overline{K} = B$, e notiamo che $p \subseteq \overline{p}$. Si ha

$$\dim_{\overline{p}} X_{\overline{K}} = \dim B_{\overline{p}} = \dim A_p = \dim_p X \qquad rk\ J_f(p) = rk\ J_f(\overline{p})$$

grazie ai teoremi di going up/down, poiché B è intero su A. Avremo che

$$X \text{ è liscio in } p \iff X \text{ è regolare in } \overline{p} \iff$$

$$\iff rk\ J_f(p) = rk\ J_f(\overline{p}) = n - dim_{\overline{p}} X_{\overline{K}} = n - \dim_p X$$

dunque è indipendente dalla scelta di $\overline{p}$. □

Corollary 23.5 *Dati X e p del lemma sopra,*

$$X \textit{ liscio in } p \textit{ chiuso} \iff rk\ J_f(p) = n - \dim_p X$$

Example

- ▶ Preso $A = {}^{K[x]}\!/\!_{(p(x))}$, con $p(x)$ non costante, i suoi massimali sono i fattori irriducibili di $p(x)$, ed è un anello artiniano di dimensione 0. Se $q(x)$ è un fattore irriducibile di $p(x)$,

  $$n - dim_{(q(x))} X = 1 = J_f(q(x)) \iff (q(x), p'(x)) = 1$$

  In caso di campo perfetto, questo coincide con la condizione di regolarità(difatti, come vedremo dopo, se l'estensione di campi è separabile, allora regolare e liscio sono equivalenti).

Notiamo che testare la regolarità di $X_{\overline{K}}$, e dunque la liscezza di X, è fattibile applicando il criterio jacobiano sui punti razionali di $X_{\overline{K}}$(Nel caso affine sono i massimali, dunque se sono regolari, tutti i primi sono regolari). É da notare anche che immagini di razionali tramite $X_{\overline{K}} \to K$ NON sono razionali, perché stiamo intendendo la razionalità su CAMPI DIVERSI.

Theorem 23.6 *Se X è uno schema di tipo finito su $\mathbb{K}$, e p è un suo punto chiuso, allora*

- *X liscio in $p \implies (\mathcal{O}_X)_p$ regolare*
- *$(\mathcal{O}_X)_p$ regolare, $\mathbb{K}(p)/\mathbb{K}$ separabile $\implies X$ liscio in p*
- *Se $\mathbb{K}$ è perfetto, allora X regolare in $p \iff X$ liscio in p.*

Warning In generale, non è vero che un punto regolare è anche liscio. Per trovare un controesempio, dobbiamo porci su un campo non perfetto, che costruiamo prendendo un campo K di caratteristica p, con $\alpha \in K - K^p$, e

$$K' = {}^{K[x]}\!/\!_{x^p - \alpha} \qquad X = Spec(K')$$

X, essendo un campo, è regolare, ma in una chiusura algebrica $\overline{K}$, $\alpha = \mu^p$, dunque

$$X_{\overline{K}} = Spec\left({\overline{K}[x]}\big/{x^p - \alpha}\right) \cong Spec\left({\overline{K}[x]}\big/{(x-\mu)^p}\right) \cong Spec\left({\overline{K}[x]}\big/{x^p}\right)$$

che non è ridotto, e dunque non è regolare. X è pertanto regolare, ma non liscio. Notiamo che in questo caso lo jacobiano è nullo poiché la derivata di x^p è zero, $n = 1$, e la dimensione di un campo è zero, dunque il criterio jacobiano è, giustamente, non soddisfatto.

$$rk\ J_f(p) = 0 \neq 1 - 0 = n - \dim_p X$$

Questo è anche un esempio di schema X senza punti razionali, $X_{\overline{K}}$ con punto razionale $(x - \mu)$, e $f((x - \mu)) = (0)$ che non è razionale.

Definition 23.7. Uno schema X localmente di tipo finito su $\mathbb{K}$ è liscio sul campo se è liscio su ogni punto chiuso

Lemma 23.8 *X liscio su $\mathbb{K}$ $\iff$ $X_{\overline{\mathbb{K}}}$ regolare*

Theorem 23.9 (Criterio di Boer per la Piattezza) *Dato A un anello, M un A-modulo, allora*

$$M \text{ piatto } \iff \forall I \text{ ideale di } A, \quad I \otimes_A M \to M : a \otimes m \mapsto am \quad \text{iniettiva}$$

Lemma 23.10 *Dato M un A modulo,*

- *Se A è un dominio, allora M piatto $\implies$ M libero da torsione*
- *Se A è un PID, allora M piatto $\iff$ M libero da torsione*
- *Se M è piatto, e $A \to B$ è un omomorfismo di anelli, allora $B \otimes_A M$ è piatto su B*
- *Se M è piatto, e $S \subseteq A$ è moltiplicativamente chiuso, allora $S^{-1}M$ è piatto su $S^{-1}A$*
- *M piatto $\iff$ M_p piatto su A_p $\forall p \in Specm\ A$*
- *Se A è un dominio di Dedekind, allora M è piatto $\iff$ è libero da torsione*
- *Se A è localmente noetheriano, e M è finitamente generato e piatto, allora M è libero.*
- *Se A è noetheriano, allora sono equivalenti*
  - *M piatto*

- *M proiettivo*
- *M_p libero su A_p per ogni primo p in A*
- *M_m libero su A_m per ogni massimale m in A*

- *Se M è anche finitamente generato, allora la piattezza è anche equivalente a*
$$\exists \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq A \ : \ (f_1, \ldots, f_r) = A, \ M_{f_i} \text{ liberi su } A_{f_i}$$

Dimostrazione. Mostriamo solo l'ultimo. Preso un primo p, esiste un $f_i \notin p$, dunque M è piatto:

$$M_{f_i} \text{ libero su } A_{f_i} \implies M_p = M_{f_i} \otimes_{A_{f_i}} A_p \text{ libero su } A_p = A_{f_i} \otimes_{A_{f_i}} A_p$$

Viceversa, $M_p \cong A_p^n$, dunque esistono $\{x_1, \ldots, x_\in\}M$ che generano M_p, ma presi
$$K, Q \text{ kernel e cokernel di } \varphi : A^n \to M \implies K_p = Q_p = 0$$
e sono finitamente generati (stiamo usando la noetherianità per K). Dunque

$$\exists \ f \in A - p \ : \ fK = fQ = 0 \implies K_f = Q_f = 0 \implies A_f^n \cong M_f$$

Adesso basta ricoprire $Spec(A) = X$ con X_f e abbiamo finito. □

Nota: Se M_{f_i} sono liberi su A_{f_i}, allora per ogni primo che non contiene f_i, avremo che M_p è libero su A_p con lo stesso rango di M_{f_i}.

Lemma 23.11

- *$S^{-1}A$ è piatto su A per ogni S moltiplicativamente chiuso.*
- *Se $\varphi : A \to B$ è un omomorfismo di anelli, allora*
$$\varphi \text{ è piatto } \iff \forall q \in Spec\, B, \quad A_{\varphi^{-1}(q)} \to B_q \text{ è piatto}$$
- *Se*
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
è una sequenza esatta di A moduli, con M'' piatto, e N un A modulo, allora anche la sequenza
$$0 \to N \otimes_A M' \to N \otimes_A M \to N \otimes_A M'' \to 0$$
è esatta

Definition 23.12. Un A modulo M si dice **Fedelmente Piatto** se per ogni omomorfismo di A moduli $\varphi : N' \to N$ si ha
$$\varphi \text{ iniettivo } \iff Id \otimes \varphi : M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \text{ iniettivo}$$

Nota: la freccia verso destra è la condizione di piattezza.

Lemma 23.13 *Dato M un A modulo piatto, allora sono equivalenti*

1. *M fedelmente piatto*
2. *Se N è un A modulo, allora $M \otimes_A N = 0 \implies N = 0$*
3. *$\forall m \in Specm(A)$, $M \neq mM$*

Dimostrazione.

$1 \to 2$)

$$M \otimes_A N \hookrightarrow M \otimes_A 0 \implies N \hookrightarrow 0$$

$2 \to 1$) Preso $M \otimes_A N' \hookrightarrow M \otimes_A N$ e $K = Ker(N' \to N)$, allora $K \otimes_A N' \hookrightarrow 0$, e dunque $K = 0$.

$2 \to 3$)

$$M/_{mM} = M \otimes_A A/_m \neq 0$$

$3 \to 2$) preso $n \in N$, avremo

$$M \otimes_A N = 0 \implies M \otimes_A < n >= M \otimes_A A/_I = M/_{IM} = 0$$

ma esiste un massimale $I \subseteq m$, dunque

$$A/_I \twoheadrightarrow A/_m \implies M/_{IM} \twoheadrightarrow M/_{mM} \neq 0 \implies M/_{IM} \neq 0 \lightning$$

$\square$

Lemma 23.14 *Se $\varphi : A \to B$ è piatta, allora sono equivalenti*

1. *B fedelmente piatta*
2. *$f : Spec\ B \to Spec\ A$ suriettiva*
3. *$Specm(A) \subseteq Im\ f$*

Dimostrazione.

$1 \to 2$) Se esistesse un primo di p non nell'immagine di f, allora

$$p \in Spec(A) \implies f^{-1}(p) \cong Spec(B \otimes_A K(p)) = \emptyset \implies$$

$$\implies B \otimes_A K(p) = 0 \implies K(p) = 0 \lightning$$

$2 \to 3$) ovvio

$3 \to 1$) mostriamo che per ogni massimale m di A, $B \neq mB$

$$m \in Specm(A) \subseteq Im\ f \implies f^{-1}(m) \cong Spec\,(B \otimes_A K(m)) \neq \emptyset \implies$$

$$\implies B \otimes_A K(m) = B \otimes_A A/_m = B/_{mB} \neq 0 \implies B \neq mB$$

$\square$

Per esempio, questo ci dice che un'estensione intera e piatta di anelli è anche fedelmente piatta.[3]

Lemma 23.15 *Un omomorfismo locale piatto di anelli locali è fedelmente piatto.*

Dimostrazione. Se $\varphi : A \to B$ è locale, allora $\varphi^{-1}(m_B) = m_A$ e $Specm(A) \subseteq Im(f)$, pertanto, se φ è anche piatto, in particolare è fedelmente piatto. □

Lemma 23.16 *Ogni omomorfismo fedelmente piatto di anelli è iniettivo.*

Dimostrazione. Se ora prendiamo $\varphi : A \to B$ fedelmente piatto (ma non locali), allora

$$\ker(\varphi) \hookrightarrow A$$

$$\ker(\varphi) \otimes_A B \hookrightarrow A \otimes_A B$$

$$\ker(\varphi) \otimes_A B \hookrightarrow 0$$

$$\ker(\varphi) = 0$$

□

[3] Se i due anelli hanno anche lo stesso campo di frazioni, allora sono uguali

24 04-02-15 - Piattezza

Lemma 24.1 *Dato un omomorfismo di anelli $\varphi : A \to B$ fedelmente piatto, allora è esatta la successione*[1]

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{b \mapsto b\otimes 1 - 1\otimes b} B \otimes_A B$$

Dimostrazione. Poniamo di avere una *sezione* $\psi : B \to A$, ossia $\psi \circ \varphi = Id_A$. Prendiamo la mappa

$$\psi \otimes Id_B \ : \ B \otimes_A B \to A \otimes_A B = B \ : \ b_1 \otimes b_2 \mapsto \varphi\psi(b_1)b_2$$

Se $\beta \in B$, allora

$$1 \otimes \beta = \beta \otimes 1 \implies \psi \otimes Id_B(1 \otimes \beta) = \psi \otimes Id_B(\beta \otimes 1) = \varphi\psi(\beta) = \beta$$

Ciò vuol dire che β sta nell'immagine di φ, rendendo esatta la successione sopra. Tensorizzando per B, che è fedelmente piatto, l'esattezza si mantiene in entrambi i versi, e se $B' = B \otimes_A B$, allora

$$B' \otimes_B B' = B \otimes_A (B \otimes_A B)$$

dunque basta mostrare che $\varphi' : B \to B \otimes_A B$ ammette una sezione, ma

$$\varphi' \ : \ B = A \otimes_A B \to B \otimes_A B \ : \ b = 1 \otimes b \mapsto 1 \otimes b$$

dunque la sezione è $\psi'(b' \otimes b) = b$ □

Ricordiamo che se $X = Spec(A)$, e U è un aperto, allora

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ \, s : U \to \coprod_{p \in U} A_p \mid s(p) \in A_p \ \ \forall p \in U, s \text{ proviene da un } A_f \, \}$$

Theorem 24.2 *L'omomorfismo $\varphi : A \to H^0(X, \mathcal{O}_X)$ che manda un elemento a in s per cui $s(p) = a/1 \in A_p$ è un isomorfismo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, hook] & \prod \mathcal{O}_X(X_{f_i}) \arrow[r] & \prod \mathcal{O}_X(X_{f_i f_j}) \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & \prod A_{f_i} \arrow[r] \arrow[u, "\psi"] & \prod A_{f_i f_j} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Già sappiamo che φ è iniettiva, dunque mostriamone la suriettività. Prendiamo s una sezione globale, e $f_1, \dots, f_n$ che definiscono s, e per cui $(f_1, \dots, f_n) = A$. avremo che la successione sopra è esatta, e s sta nell'immagine di ψ. Se anche quella sotto fosse esatta, allora s verrebbe da A, poiché la sua immagine negli $A_{f_i f_j}$ è ze ro. Chiamando $B = \prod A_{f_i}$, sappiamo che $A \to B$ è piatta perché

[1] Se φ fosse stata piatta e iniettiva, comunque questo risultato sarebbe stato falso.

prodotto finito di localizzazioni, e dato che $Spec(B) \to Spec(A)$ è suriettivo, allora è anche fedelmente piatto. Ma ora

$$A_{f_i f_j} \cong A_{f_i} \otimes_A A_{f_j} \implies \prod A_{f_i f_j} \cong B \otimes_A B$$

dunque l'esattezza della riga sotto è data dal lemma precedente. □

Definition 24.3. $f : X \to Y$ è un morfismo di schemi **Piatto** se $\forall p \in X$, $(\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \to (\mathcal{O}_X)_p$ è piatta

Definition 24.4. $f : X \to Y$ è un morfismo di schemi **Fedelmente Piatto** se è piatto e suriettivo

Notiamo facilmente che se X e Y sono affini, allora i morfismi di schemi sono fedelmente/piatti se e solo se lo sono gli omomorfismi di anelli. Inoltre omomorfismi piatti locali sono iniettivi, dunque un morfismo piatto tra due schemi induce inclusioni tra le spighe.

Lemma 24.5 *dato un morfismo di schemi $f : X \to Y$, sono equivalenti*

- *f piatto*
- *U, V aperti affini per cui $f(U) \subseteq V \implies O_Y(V) \to O_X(U)$ piatto*
- *esistono U_i e V_i ricoprimenti affini aperti di X e Y per cui $f(U_i) \subseteq V_i$ e $O_Y(V_i) \to O_X(U_i)$ piatti*

Lemma 24.6 *Se X, Y sono localmente di tipo finito, o affini, su $\mathbb{K}$, allora $f : X \to Y$ è piatto se e solo se lo è per ogni p chiuso*

Warning Esistono schemi SENZA punti chiusi. Difatti un punto chiuso in un aperto affine NON è detto che sia chiuso nello schema

Lemma 24.7

1. *la piattezza è chiusa per composizione, cambio base, ed è locale sul dominio*
2. *Dato $X' = X \times_Y Y'$, con $f' : X' \to Y'$ piatto, e $\psi : Y' \to Y$ fedelmente piatto, allora $f : X \to Y$ è piatto.*
3. *un morfismo piatto di schemi integrali è dominante*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

1. la composizione di mappe piatte è piatta, ed è locale sul dominio, dunque possiamo assumere nel solito diagramma cartesiano che siano tutti schemi affini $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$, $Y' = Spec(B')$. Avremo $X' = Spec(A \otimes_B B') = Spec(A')$, ma se f è piatta, allora lo è $B \to A$, e la mappa $B \to B'$ fa diventare $B' \to A \otimes_B B'$ piatto, ossia $X' \to Y'$ è piatto.

2. mettendoci nel caso affine, prendiamo $M \hookrightarrow M'$ B-moduli. Avremo

$$B' \text{ piatto su } B \implies M \otimes_B B' \hookrightarrow M' \otimes_B B'$$

$$(M \otimes_B B') \otimes_{B'} (A \otimes_B B') \cong (M \otimes_B A) \otimes_B B'$$

$$A \otimes_B B' \text{ piatto su } B' \implies (M \otimes_B A) \otimes_B B' \hookrightarrow (M' \otimes_B A) \otimes_B B'$$

$$B' \text{ fedelmente piatto su } B \implies M \otimes_B A \hookrightarrow M' \otimes_B A$$

   e dunque A è piatto su B.

3. Preso $f : X \to Y$ piatto di schemi irriducibili, se chiamiamo p il punto generico di X,

$$(\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \to (\mathcal{O}_X)_p = K(X) \text{ è piatto e locale}$$

   dunque è fedelmente piatto, ossia iniettiva, e ciò porta l'ideale massimale $f(p)$ ad essere zero, e la spiga ad essere un campo. Pertanto $f(p)$ è il punto generico di Y, e il morfismo è dominante.

$\square$

Nota: La piattezza sugli schemi è invariante per cambio base, ma dato che lo è anche la suriettività, segue che anche la fedele piattezza è invariante per cambio base, ed è anche chiusa per composizione.

L'ultimo enunciato si può generalizzare a schemi noetheriani:

Lemma 24.8 *Se X è noetheriano, Y irriducibile, e $f : X \to Y$ piatto, allora ogni componente irriducibile di X domina Y*

Dimostrazione. La piattezza è locale, dunque possiamo supporre X irriducibile. Sia p punto generico di X, e come sopra

$$(\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \to (\mathcal{O}_X)_p \text{ è piatto e locale}$$

dunque fedelmente piatta ed iniettiva. In questo caso $(\mathcal{O}_X)_p$ non è un campo perché non è ridotto, ma comunque è un anello artiniano con un solo primo, che sarà massimale e nilpotente. Dato che l'applicazione è iniettiva, allora anche il massimale di $(\mathcal{O}_Y)_{f(p)}$ è composto solo da nilpotenti, ed in particolare avrà unu solo primo, da cui $f(p)$ si scopre essere il punto generico di Y. Dunque il morfismo è dominante. $\square$

L'inverso non è vero, ma vale che

Lemma 24.9 *Se Y è regolare 0-dimensionale, allora tutti i morfismi $X \to Y$ sono piatti.*

Dimostrazione. Un anello 0-dimensionale locale regolare(dominio) è un campo, dunque tutte le spighe di Y sono campi. Ma allora

$$(\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \to (\mathcal{O}_X)_p \text{ è iniettiva}$$

e rende la spiga di X uno spazio vettoriale su un campo, dunque un modulo libero, e pertanto piatto. □

Lemma 24.10 *Se X è noetheriano ridotto, e Y regolare irriducibile di dimensione 1, allora $f : X \to Y$ è piatto se e solo se ogni componente irriducibile di X domina Y*

Dimostrazione. una freccia è data dal lemma sopra. Ponendo X irriducibile, sappiamo che un morfismo di schemi integrali è dominante se e solo se le mappe tra le spighe sono iniettive. Prendiamo $p \in X$, e mostriamo che

$$\varphi : R = (\mathcal{O}_Y)_{f(p)} \hookrightarrow (\mathcal{O}_X)_p = A \text{ è piatta}$$

Se $f(p)$ è il punto generico, allora R è un campo, e come sopra, la mappa è piatta. Se invece R avesse dimensione 1, dato che è locale e normale, allora è un DVR per Theorem 20.7. In particolare è un PID, e sappiamo che i domini piatti su PID sono solo quelli senza torsione. Presi $\{p_1, \dots, p_n\}$ primi minimali di A, allora A ridotto $\implies$ $D(A) = \cup p_i$, dunque se per assurdo A avesse torsione, allora un elemento di R mappa in un divisore di zero diverso da zero, e i particolare il parametro t di R andrà in (WLOG) p_1. Ciò implica che

$$\varphi^{-1}(p_1) = (t) \implies \varphi' : R \hookrightarrow A_{p_1}$$

ma qui p_1 è composto da nilpotenti, e ciò è assurdo. □

Nota: un altra maniera per concludere la dimostrazione del lemma sopra sarebbe stato notare che i p_i sono punti generici di componenti irriducibili di X, ed in quanto tali, mappano nel punto generico di Y, che corrisponde a 0, dunque

$$\varphi^{-1}(p_i) = 0 \; \forall i \implies \varphi^{-1}(D(A)) = 0$$

.

Example

- Dato X la retta con due origini, e $Y = \mathbb{A}^1_K$, allora $X \to Y$ non è piatta, poiché una delle origini di X è una componente irriducibile che non domina Y
- Prendiamo la mappa

$$K[x] \subseteq K[x,y]/(xy, y^2) = A$$

che induce $X \to Y$. questa non è piatta perché A ha torsione su $K[x]$ che è un PID. Nonostante ciò, topologicamente la mappa $X \to Y$ è un omeomorfismo.

▶ La normalizzazione
$$A = {K[x,y]}\big/{(y^2 - x^2(x+1))} \to K[t]$$
$$x \mapsto t^2 - 1 \qquad y \mapsto t^3 - t$$
non è piatta. Infatti preso $m = (x, y)$ avremo
$$m \otimes_A K[t] \to K[t]$$
$$x \otimes_A t - y \otimes_A 1 \mapsto (t^2 - 1)t - (t^3 - t) = 0$$
che non è iniettiva, dunque la mappa non è piatta per criterio di Baer.

L'ultimo esempio è incluso in un teorema più potente:

Theorem 24.11 *Dato uno schema integrale X, e $\overline{X}$ la sua normalizzazione,*
$$\overline{X} \to X \text{ piatta} \iff \overline{X} = X$$

o anche la sua versione algebrica

Theorem 24.12 *Data $A \subseteq B$ estensione intera di domini con lo stesso campo di frazioni, allora*
$$A \subseteq B \text{ piatto} \iff B = A$$

Notiamo che un'estensione intera di domini, grazie al Lying Over, è suriettiva sugli spettri, dunque è piatta se e solo se è fedelmente piatta. Pertanto quest'ultimo risultato è un corollario del teorema più potente

Theorem 24.13 *Data $A \to B$ omomorfismo di domini con lo stesso campo di frazioni, allora*
$$A \to B \text{ fedelmente piatto} \iff B = A$$

Dimostrazione. un omomorfismo fedelmente piatto è iniettivo, e dato che A e B hanno lo stesso campo di frazioni K, allora $A \subseteq B \subseteq K$. Preso ora $b \in B - A$, sia
$$I = \{\, a \in A \mid ab \in A \,\}$$
e visto che $b \in K$, I non è zero. Preso $a \in I - \{0\}$, visto che $A \subseteq B$ è fedelmente piatta, lo è anche
$$A \otimes_A {A}\big/{aA} \cong {A}\big/{aA} \subseteq {B}\big/{aB} \cong B \otimes_A {A}\big/{aA}$$
dunque
$$aB \cap A = aA$$
Ma allora avremo
$$ab = a' \in A \cap aB = aA \implies ab = a' = aa'' \implies b = a'' \in A$$
da cui la tesi $B = A$. □

25 05-02-15 - Localmente Costanti

Dato A noetheriano, M A-modulo finitamente generato, allora definiamo una funzione $g : Spec(A) \to \mathbb{N}$ tale che

$p \mapsto rk_p M = dim_{k(p)}(M_p \otimes_{A_p} K(p)) =$ minimo numero generatori di M_p su A_p

Lemma 25.1 *Se M è un A-modulo finitamente generato (con A anche non noetheriano), allora la funzione g ha massimo locale su ogni punto di $Spec(A)$.*

Dimostrazione. Dato un primo $p \in Spec(A) = X$, sia $n = rk_p M$. Allora esistono $\{x_1, \dots, x_n\}$ elementi di M che generano M_p su A_p, ed avremo

$$\varphi \; : \; A^n \to M \; : \; e_i \mapsto x_i \qquad Q = coker \; \varphi \qquad Q_p = 0$$

Q è anche finitamente generato, poiché quoziente di M, dunque esiste un elemento di $f \in A - p$ per cui $fQ = 0$. Ma

$$Q_f = 0 \implies A_f^n \twoheadrightarrow M_f \text{ suriettiva } \implies \forall q \in X_f \;\; A_q^n \twoheadrightarrow M_q \text{ suriettiva}$$

dunque per ogni $q \in X_f$, avremo $rk_q(M) \le n = rk_p(M)$. □

Grazie all'ultimo punto del lemma 23.10, se un modulo è piatto e finitamente generato su un anello noetheriano, allora g è costante su finiti X_f. Ma ciò implica che

Lemma 25.2 *Dato A noetheriano, e M modulo piatto finitamente generato, allora g è localmente costante.*

Example

- preso $B = A/I$, allora $p \notin V(I) \implies B_p = 0$, mentre $p \in V(I) \implies B_p$ è generato su A_p da 1, dunque

$$rk_p(B) = \begin{cases} 0 & p \notin V(I) \\ 1 & p \in V(I) \end{cases}$$

  e questo in generale non è localmente costante, a meno che $V(I)$ non sia aperto.

- Se $I \subseteq N(A)$ allora g è costantemente pari ad 1, ma non è detto che il modulo sia piatto. Per esempio

$$A = K[x]/(x^2) \qquad I = (x) \qquad M = A/I = K$$

  non è libero, e visto che A è noetheriano, e M è finitamente generato, allora M non è piatto.(Lemma 23.10, punto 7).

▶ Riprendendo l'esempio sopra,

$$A = {K[x,y]}\big/{(y^2 - x^2(x+1))} \to K[t]$$

$$x \mapsto t^2 - 1 \qquad y \mapsto t^3 - t$$

non è piatta, infatti A è irriducibile, dunque tutti gli aperti comprendono il punto generico, e pertanto se fosse piatta, la funzione g sarebbe costante. Nel punto generico ha rango 1 poiché entrambi i localizzati sono $K(t)$, mentre nel punto $m = (x, y)$

$$f^{-1}(m) \cong Spec\left(K[t] \otimes_A {A}\big/{m}\right) = Spec\left({K[t]}\big/{mK[t]}\right) =$$

$$= Spec\left({K[t]}\big/{t^2 - 1}\right) \cong Spec\ K^2$$

Come visto negli esempi, per ricavare la piattezza del modulo partendo da g serve qualcosa in più:

Lemma 25.3 *Dato A noetheriano ridotto, e M modulo finitamente generato, se g è localmente costante, allora M è piatto*

Dimostrazione. Preso $p \in Spec(A) = X$, dimostriamo che M_p è libero su A_p. A_p è locale, e in particolare il suo spettro è connesso, dunque g è costante sui suoi primi, e poniamo $n = g(p)$. Prendiamo $\{p_1, \ldots, p_r\}$ primi minimali di A_p, con intersezione vuota grazie al fatto che è ridotto; sappiamo che A_{p_i} sono artiniani e ridotti, dunque campi. Dalla solita mappa $A^n \to M$ con K kernel, avremo che sono esatte

$$0 \to K_{p_i} \to A^n_{p_i} \to M_{p_i} \to 0$$

per ogni i, ma gli M_{p_i} sono spazi vettoriali su campi, dunque liberi e di rango n, pertanto $K_{p_i} = 0$. Ma[1]

$$Ker(A \to A_{p_i}) \subseteq p_i \implies Ker(A \to \prod A_{p_i}) \subseteq \cap p_i = 0 \implies$$

$$\implies K \hookrightarrow A^n \hookrightarrow \prod A^n_{p_i}$$

ma l'ultima mappa è equivalente a

$$K \to \prod K_{p_i} = 0$$

e pertanto $K = 0$, e M_p è libero su A_p. □

Dato ora un morfismo finito $f : X \to Y$ con Y localmente noetheriano, in particolare f è affine, dunque preso un affine aperto che contiene $q \in Y$, ci possiamo restringere a $f : Spec(A) \to Spec(B)$, con B noetheriano, così

$$f^{-1}(q) \cong Spec(K(q) \otimes_B A) = Spec(A_q)$$

[1] questo in particolare dice che ogni anello noetheriano ridotto è incluso in un prodotto finito di campi

ma A è un modulo su B finitamente generato, dunque A_q è un $K(q)$ spazio vettoriale finitamente generato, ed in particolare è un anello artiniano. In un certo senso, avremo che la cardinalità della fibra, con i punti contati con molteplicità, sarà la dimensione di A_q come spazio vettoriale:

$$\dim_{K(q)} A_q \sim |f^{-1}(q)|$$

Warning Questa formula non è esatta. Se prendiamo $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, questa induce $Spec(\mathbb{C}) \to Spec(\mathbb{R})$ che è un morfismo finito tra schemi noetheriani, ma preso q l'unico ideale di $\mathbb{R}$, allora $K(q) = \mathbb{R}$ e $f^{-1}(p) = Spec(\mathbb{C})$, ma $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$.

Example

- Preso
$$K[x] \to K[t] \; : \; x \mapsto p(t)$$
con p polinomio non costante, allora questa mappa è finita, poiché $K[t]$ è generato da $deg(p)$ elementi come $K[x]$ modulo. Preso $q = (x - a)$ ideale massimale e punto razionale di $K[x]$, allora
$$f^{-1}(q) = Spec\left({}^{K[t]}\!\big/_{(p(t) - a)} \right)$$
e se K è algebricamente chiuso, allora la dimensione come K spazio vettoriale coincide con il numero di primi dell'anello.

- Se
$$Y = Spec(A) = Spec\left({}^{K[x, y]}\!\big/_{(x^3 - y^2)} \right) \qquad X = Spec(K[t])$$
$$f : X \to Y \; : \; x \mapsto t^2 \quad y \mapsto t^3$$
prendiamo $p = (x, y)$ in Y, così
$$f^{-1}(p) = Spec\left({}^{K[t]}\!\big/_{(t^2)} \right)$$
che contiene solo un punto, con molteplicità 2, come infatti è la sua dimensione di spazio vettoriale su $K = K(p)$(generato da 1 e t).

- prendiamo
$$X = Spec(K[x, y]) \qquad Y = Spec(K[u, v])$$
$$f : X \to Y \; : \; u \mapsto x \quad v \mapsto xy$$
che è un morfismo dominante di schemi regolari integrali, ma non è piatta (notare che per il lemma 24.10 Y deve essere di dimensione 1). Infatti, tensorizzando per ${}^{K[u, v]}\!\big/_{(v)}$, dovrebbe rimanere piatta, ma otteniamo
$${}^{K[u, v]}\!\big/_{(v)} \cong K[u] \to K[x, y] \otimes_{K[u,v]} {}^{K[u, v]}\!\big/_{(v)} \cong {}^{K[x, y]}\!\big/_{(xy)}$$
in cui $K[u]$ è PID, e ${}^{K[x, y]}\!\big/_{(xy)}$ ha torsione, dunque non può essere piatto.

Lemma 25.4 *Dato A noetheriano Jacobson, e M modulo finitamente generato, con g localmente costante su $Specm(A)$, allora g è localmente costante*

Theorem 25.5 *Dato $f : X \to Y$ morfismo di schemi localmente noetheriani, con $p \in X$, $q = f(p)$, $X_q = f^{-1}(q) = Spec(k(q)) \times_Y X$, allora*

- $$dim\left(\mathcal{O}_{f^{-1}(q)}\right)_p \geq dim(\mathcal{O}_X)_p - dim(\mathcal{O}_Y)_q$$
- *Se f è piatta, vale l'uguale*
- *Se X, Y regolari, e vale l'uguale, allora f è piatta. Se X, Y è anche localmente di tipo finito su un campo, basta verificarlo per p chiusi.*

Questo risultato si può riformulare in termini algebrici nel *teorema della fibra*:

Theorem 25.6 *Dato un omomorfismo locale di anelli locali noetheriani $A \to B$, allora*

$$dim\left(B/m_A B\right) \geq dim\ B - dim\ A$$

con l'uguale se l'omomorfismo è piatto. Se A, B sono regolari, allora vale l'uguale se e solo se l'omomorfismo è piatto

26 11-02-15 - Mappe Liscie

Lemma 26.1 *Se $A \to B$ è un omomorfismo locale piatto di anelli noetheriani locali, allora*

- *B regolare $\implies$ A regolare*
- *B normale $\implies$ A normale*
- *$dim {}^{B}\!/_{m_A B} = dim\ B - dim\ A$*

Lemma 26.2 *Se $X \to Y$ è un morfismo fedelmente piatto di schemi localmente noetheriani, allora*

- *X regolare $\implies$ Y regolare*
- *X normale $\implies$ Y normale*

Lemma 26.3 *Dato A locale artiniano, k-algebra finitamente generata, allora A è un k-modulo finitamente generato.*

Dimostrazione. Dato m l'ideale massimale di A, ${}^{A}\!/_{m}$ è un campo che estende k ed è finitamente generato come algebra, dunque è anche finito. Avremo che $m^n = 0$, e tutti i ${}^{m^d}\!/_{m^{d+1}}$ sono spazi vettoriali finitamente generati su ${}^{A}\!/_{m}$ e dunque su k, ma visto che

$$A \hookrightarrow {}^{A}\!/_{m} \oplus {}^{m}\!/_{m^2} \oplus \cdots \oplus {}^{m^{n-1}}\!/_{m^n}$$

allora anche A è un k spazio vettoriale finitamente generato. □

Notiamo che se X ha dimensione zero, ed è localmente di tipo finito su un campo k, allora tutti i suoi punti sono chiusi, e le sue componenti connesse sono spettri di anelli artiniani locali di tipo finito su k, ossia, per lemma sopra, sono k spazi vettoriali finitamente generati, con un unico ideale primo. Avremo che

Lemma 26.4 *Dato X uno schema affine localmente di tipo finito su un campo K, e di dimensione 0, allora*

- *X regolare $\iff$ $X = Spec\, L$, con L/K estensione di campi finita*
- *X liscio su K $\iff$ $X = Spec\ L$, con L/K estensione di campi finita separabile*

Inoltre, è vero che se L/K è finita, allora è separabile se e solo se $\overline{K} \otimes L$ è ridotto, ossia prodotto finito di $\overline{K}$.

Theorem 26.5 *Dato X uno schema localmente di tipo finito su un campo K, e L un'estensione di K qualunque, allora*

$$X_L \text{ è liscio su } L \iff X \text{ è liscio su } K$$

Dimostrazione. Se X_L è liscio su L, allora $X_{\overline{L}}$ è regolare, e dato che la piattezza fedele è invariante per cambio base, e che $\overline{K} \subseteq \overline{L}$ è fedelmente piatta, allora $X_{\overline{L}} \to X_{\overline{K}}$ è fedelmente piatta, e dunque $X_{\overline{K}}$ è regolare, ovvero X è liscio.

Viceversa, poniamoci nel caso in cui $X = Spec(A)$ sia affine e liscio su K. Sappiamo che X è regolare, dunque tutte le spighe sono regolari, e in particolare sono domini. Ciò vuol dire che X è l'unione disgiunta delle sue componenti irriducibili, e pertanto possiamo metterci su una di esse e imporre A dominio. Grazie ai risultati sulla dimensione, allora

$$d = \dim A = trdeg \, {}^{Q(A)}\!/_{K} = \dim A_p \quad \forall \, p \in Specm(A)$$

Dunque, per il criterio Jacobiano, avremo

$$X_L = Spec\left({}^{L[x_1, \ldots, x_n]}\!/_{(f_1, \ldots, f_r)}\right) \text{ liscio su } p' \text{ chiuso} \iff$$
$$\iff rk \; J_f(p') = n - \dim(X_L)_i$$

dove l'ultima è la componente irriducibile che contiene p'. Dato inoltre che, se il $p \in X$ corrispondente è chiuso,

$$rk \; J_f(p') = rk \; J_f(p) = n - d$$

resta solo da dimostrare che la dimensione delle componenti irriducibili resta d. Chiamiamo $f : X_L \to X$, così sappiamo $f^{-1}(p) = Spec(K(p) \otimes_A L)$. Dato che p è chiuso, $k(p)/K$ è finito, allora $f^{-1}(p)$ è lo spettro di un artiniano, e tutti i punti in lui sono chiusi, dunque la dimensione della spiga $(\mathcal{O}_{f^{-1}(p)})_{p'}$ è zero. Dal teorema della fibra, dato che f è piatta, avremo

$$\dim \left(\mathcal{O}_{f^{-1}(p)}\right)_p' = 0 = \dim(\mathcal{O}_{X_L})_{p'} - \dim(\mathcal{O}_X)_p \implies \dim(\mathcal{O}_{X_L})_{p'} = d$$

Se L fosse algebrico su K, avremmo finito, altrimenti dobbiamo mostrare che per ogni p' chiuso di X_L, $f(p)$ è chiuso. Data $\{y_i\}$ una base di trascendenza di L su K, allora L è algebrico su $N = K(y_i)$ e spezziamo in $f : X_L \to X_N \to X$. basta mostrare dunque che $X_N \to X$ manda chiusi in chiusi. $N \otimes_K A$ è un dominio finitamente generato su N, e dunque ogni massimale ha la stessa altezza, e ciò conclude[1] □

Definition 26.6. Se Y è localmente noetheriano, e $f : X \to Y$ morfismo, allora f è liscio se

- f è localmente di tipo finito
- f piatto
- Le fibre sono lisce, ossia $f^{-1}(q)$ liscio su $k(q)$

Notiamo che se abbiamo uno schema X liscio su K, allora $X \to Spec(K)$ è liscio, poiché è localmente di tipo finito, piatto (ogni omomorfismo da un campo a un dominio è piatto), e l'unica fibra è liscia per definizione.

[1] da rivedere..

Lemma 26.7 *Se $B \to A$ è un omomorfismo locale piatto di locali noetheriani con B e ${}^{A}\!/_{m_B A}$ regolari, allora A è regolare*

Lemma 26.8 *$X \to Y$ liscio, Y regolare $\implies$ X regolare*

Dimostrazione. Dati $p \in X$, $A = (\mathcal{O}_X)_p$, $q = f(p)$, $B = (\mathcal{O}_Y)_q$, allora $\varphi : B \to A$ è piatto (per definizione) e locale, B è regolare e

$$f^{-1}(q) = Spec\left(A \otimes_B {}^{B}\!/_{m_B}\right) \implies {}^{A}\!/_{m_B A} \cong (\mathcal{O}_{f^{-1}(q)})_p$$

ma questo è liscio, dunque è regolare. Si conclude col lemma sopra. □

Lemma 26.9 *Gli embedding aperti sono lisci*

Dimostrazione. localmente sono omeomorfismi, dunque sono piatti, localmente di tipo finito, e la fibra di un punto q o è zero, o è $k(q)$ stesso, dunque è liscia. □

Lemma 26.10 *La liscezza è stabile per cambio base, locale sul dominio, e stabile per composizione*

Dimostrazione. localmente di tipo finito e la piattezza sono invarianti per cambio base, locali su dominio e stabili per composizione, e la condizione sulle fibre è locale sul dominio. Se ora $f : X \to Y$ è liscia, allora prendiamo $q' \in Y'$, $q = \psi(q')$, e vediamo che

$$\begin{tikzcd}
p \times_q q' \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & q' \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& X' \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "\psi"] & \\
& X \arrow[r, "f"] & Y & \\
p \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & q \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$$g^{-1}(q') = f^{-1}(q) \times_{K(q)} K(q')$$

Ma $f^{-1}(q)$ è liscia su $K(q)$, dunque $g^{-1}(q')$ è liscia su $K(q')$, concludendo che g è liscia. Se invece abbiamo la composizione

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

di mappe lisce, sia $h = g \circ f$, e $p \in Z$. avremo che, per cambio base, le mappe

$$X \times_Z Spec(K(p)) \xrightarrow{f'} Y \times_Z Spec(K(p)) \xrightarrow{g'} K(p)$$

sono ancora lisce, e

$$h^{-1}(p) \cong X \times_Z Spec(K(p)) \qquad g^{-1}(p) \cong Y \times_Z Spec(K(p))$$

Possiamo di nuovo cambiare base e metterci nella chiusura di $K(p)$, dove il secondo schema è regolare, ma per Lemma 26.8 anche il primo è regolare, dunque $h^{-1}(p)$ è liscio su $K(p)$. □

27 12-02-15 - Spazio Tangente

Lemma 27.1 *Dato $X' = X \times_Y Y'$, con $f' : X' \to Y'$ liscio, e $\psi : Y' \to Y$ fedelmente piatto, allora $f : X \to Y$ è liscio.*

Nota: l'abbiamo già fatto con la piattezza. Bisogna solo verificare la condizione sulle fibre.

Lemma 27.2 *Se f piatto tra schemi localmente di tipo finito su $\mathbb{K}$, per cui le fibre dei punti chiusi sono lisce, allora f è liscio*

Theorem 27.3 *Dato f localmente di tipo finito, con Y localmente noetheriano, allora la funzione*

$$g : X \to \mathbb{N} : p \mapsto dim_p f^{-1}(f(p))$$

è superiormente semicontinua.

Definition 27.4. Un morfismo di schemi liscio è **Étale** se ha le fibre 0-dimensionali.

Nel caso in cui un morfismo di schemi abbia le fibre d-dimensionali, con d costante, si dice che ha *dimensione relativa d*.

Example

- Presa $\varphi : K[x] \to K[t] \ : \ x \mapsto p(t)$, con $p(t)$ non costante, sia $f : X \to Y$ il morfismo corrispondente, e $q = (0) \in Y$. Se vediamo
$$K[t] \cong K[x,t] / (x - p(t))$$
allora avremo
$$f^{-1}(q) = Spec\left(K(q) \otimes_{K[x]} K[t]\right) = Spec\left(K(x) \otimes_{K[x]} K[x,t] / (x - p(t))\right) =$$
$$= Spec\, K(x)[t] / (x - p(t))$$
dove questo è un campo, ed è liscio su $K(x)$ se e solo se $x - p(t)$(che è irriducibile) non ha fattori multipli, ossia $(p'(t), x - p(t)) = 1$ ossia quando $k(t)/K(p)$ è separabile.
Ovviamente, tutte le altre fibre hanno dimensione zero, dunque f è étale se e solo è liscio. Ciò vuol dire inoltre che il morfismo[1]
$$\mathbb{A}^1_K - V(p'(t)) \to \mathbb{A}^1_K \text{ è étale}$$

Lemma 27.5 *La proprietà di étale è invariante per cambio base.*

[1] perché?

Definition 27.6. Dato X localmente di tipo finito su K campo, e $p \in X$, allora lo **Spazio Cotangente** relativo a p è

$$T_p^* X = {}^{m_p}\!/\!_{m_p^2}$$

dove m_p è l'ideale massimale di $(\mathcal{O}_X)_p$

Lo Spazio Cotangente è uno spazio vettoriale sia su $K(p)$ che su K, ma solitamente si prende p razionale, così $K(p) = K$.
Ricordiamo che se K è algebricamente chiuso e X affine, vale

$$X = Spec\ A \qquad A = {}^{K[x_1, \dots, x_n]}\!/\!_{(f_1, \dots, f_r)}$$

$$\dim T_p^* X = n - rk\ J_f(p) \geq \dim_p X$$

Dato che inoltre la dimensione è finita, avremo che lo spazio cotangente è isomorfo al suo duale, dunque su questi punti si definisce

Definition 27.7. Dato X localmente di tipo finito su K campo, e $p \in K(X)$, allora lo **Spazio Tangente** $T_p X$ relativo a p è il duale dello spazio cotangente

Example

- Preso $X = \mathbb{A}^n_K$, e $p = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \in X$, allora

$$T_p^* X = {}^{m_p}\!/\!_{m_p^2} =< x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n >_K$$

Per definirne il duale, notiamo che dato un polinomio $q(x)$ in m_p, ossia che si annulla su a, abbiamo bisogno di una funzione lineare che ci indichi il coefficiente di $x_i - a_i$ dell'immagine sullo spazio cotangente. Per fare ciò, basta sviluppare attorno ad a con la serie di Taylor

$$q(x) = q(a) + J_x(q)(a)^t \cdot (x_i - a_i)_i + r(x)$$

dove $q(a) = 0$, e $r(x) \in m_p^2$, dunque le funzioni cercate sono

$$T_p X =< {}^{\partial}\!/\!_{\partial x_1}(a), \dots, {}^{\partial}\!/\!_{\partial x_n}(a) >_K$$

Definition 27.8. Dato $f : X \to Y$ morfismo di K schemi localmente di tipo finito, con $p \in K(X)$, e $f(p) = q$, allora il **Differenziale** di f in p è il dualizzato della mappa tra gli spazi cotangenti indotta da

$$(\mathcal{O}_Y)_q \to (\mathcal{O}_X)_p$$

dunque è una mappa tra i tangenti

$$d_p f : T_p X \to T_p Y$$

Example

- Preso

$$X = Spec\ K[t] \qquad Y = Spec\ K[x] \qquad q = (t-a) \in X$$

e un morfismo $f : X \to Y$ che manda $x \mapsto p(t)$, con $p(t)$ non costante, allora

$$x - p(a) \mapsto p(t) - p(a) \in (t-a)$$

dunque $f(q) = (x - p(a))$, e otteniamo la mappa

$$(\mathcal{O}_Y)_{(x-p(a))} \to (\mathcal{O}_X)_{(t-a)} \quad \equiv \quad K[x]_{(x-p(a))} \to K[t]_{(t-a)}$$

che induce

$$< x - p(a) >_K \to < t - a >_K$$

Per descrivere questa mappa basta dare l'immagine di $x - p(a)$ in ${}^{m_q}\!/\!_{m_q^2}$, ossia dobbiamo prendere l'immagine, svilupparlo in serie di Taylor attorno a $t - a$ e tagliare gli ordini maggiori di 1. Notiamo inoltre che l'immagine non ha ordine 0.

$$p(t) - p(a) = b_1(t-a) + b_2(t-a)^2 + \dots \qquad b_1 = p'(a)$$

$$x - p(a) \mapsto p'(a)(t-a)$$

Dato che **la mappa duale, in notazione matriciale, è la trasposta**, otteniamo

$$< {}^{d}\!/\!_{dt}(a) >_K \xrightarrow{\cdot p'(a)} < {}^{d}\!/\!_{dx}(p(a)) >_K$$

- Se invece

$$Y = Spec\ K[t] \qquad X = Spec\ K[x_1, \dots, x_n] \qquad q = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \in X$$

$$f : X \to Y \qquad t \mapsto p(x) \qquad f(q) = (t - p(a))$$

$$< t - p(a) >_K \to < x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n >_K$$

Per descriverne l'immagine bisogna espandere come prima $p(x) - p(a)$, e ottenere

$$t - p(a) \mapsto \left({}^{\partial}\!/\!_{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1), \dots, {}^{\partial}\!/\!_{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \right)$$

Il duale sarà

$$< \partial/\partial x_1(a), \ldots, \partial/\partial x_n(a) >_K \to < d/dt(p(a)) >_K$$

e corrisponderà al prodotto scalare col vettore

$$\left(\partial p(x)/\partial x_1(a), \ldots, \partial p(x)/\partial x_n(a) \right)$$

In caso di mappa composta $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, abbiamo

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)} g \circ d_p f$$

28 18-02-15 - Differenziali e Mappe Lisce

Lemma 28.1 *Se Y regolare, $p \in X$ e $(\mathcal{O}_{f^{-1}f(p)})_p$ regolare, allora $(\mathcal{O}_X)_p$ è regolare.*

Theorem 28.2 *Sia $f : X \to Y$ morfismo di schemi localmente di tipo finito su K, in cui per ogni $q \in Y$ chiuso, la fibra $f^{-1}(q)$ è liscia. Allora f è liscia.*

Lemma 28.3 *Dato $f : X \to Y$ morfismo di schemi di tipo finiti su K, $p \in X(K)$, $q = f(p)$, $X_q = f^{-1}(q)$, e chiamiamo $J : X_q \hookrightarrow X$ l'immersione, allora $d_pJ : T_pX_q \to T_pX$ induce un isomorfismo $T_pX_q \cong Ker(d_pf)$. In particolare ho la sequenza esatta*

$$0 \to T_pX_q \xrightarrow{d_pJ} T_pX \xrightarrow{d_pf} T_qY$$

Lemma 28.4 *Dato K algebricamente chiuso, e $f : X \to Y$ morfismo di schemi regolari, allora*

- *f liscio $\iff$ $\forall p \in X$, d_pf è suriettiva*
- *f étale $\iff$ $\forall p \in X$, d_pf è un isomorfismo*

Dimostrazione. Sappiamo che vale la formula della fibra per ogni punto chiuso (e quindi razionale) in X

$$dim_p f^{-1}f(p) \geq dim_p X - dim_{f(p)} Y$$

inoltre

$$dim_p f^{-1}f(p) \leq dim_p T_p f^{-1}f(p)$$

con uguaglianza se e solo se $f^{-1}f(p)$ è regolare (e dunque liscio) su p. In particolare, f è liscio se e solo se

$$dim_p T_p f^{-1}f(p) = dim_p X - dim_{f(p)} Y = \dim T_pX - \dim T_qY$$

ma questo è vero se e solo se la sequenza del lemma sopra è esatta anche a destra, ossia d_pf suriettiva.

f è anche étale, se e solo se è liscia e le dimensioni delle fibre sono zero, che succede se e solo se d_pf è un isomorfismo. $\square$