

# Appunti di Teoria dei Giochi

Giovanni Barbarino

17 aprile 2020

# Indice

<b>1</b>	<b>Lotterie, Preferenze e Utilità</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Duopolio di Cournot</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Duopolio di Bertrand</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Giochi Non Cooperativi</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Giochi Dinamici</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Valore di Gioco</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Giochi Matriciali</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Teorema MinMax</b>	<b>13</b>
<b>9</b>	<b>Strategie Miste</b>	<b>16</b>
<b>10</b>	<b>Esistenza e Unicità di Equilibri</b>	<b>19</b>
<b>11</b>	<b>Strategie Dominanti e Dominate</b>	<b>23</b>
<b>12</b>	<b>Miglior Risposte</b>	<b>26</b>
<b>13</b>	<b>Giochi Potenziali</b>	<b>30</b>
<b>14</b>	<b>Algoritmi del Gradiente</b>	<b>32</b>
14.1	Disuguaglianza Variazionale . . . . .	32
14.2	Metodo di Proiezione . . . . .	33
14.3	Extragradiente . . . . .	34
14.4	Extragradiente con Iperpiano . . . . .	37
<b>15</b>	<b>Disuguaglianza di Ky Fan</b>	<b>38</b>
15.1	Rilassamento . . . . .	40
15.2	Ascesa di $V$ . . . . .	41
<b>16</b>	<b>Duopolio di Stackelberg</b>	<b>45</b>
<b>17</b>	<b>Giochi Sequenziali</b>	<b>46</b>
<b>18</b>	<b>Induzione a Ritroso</b>	<b>47</b>
<b>19</b>	<b>Giochi Leader Multifollower</b>	<b>51</b>
<b>20</b>	<b>Nash Bargaining</b>	<b>53</b>
<b>21</b>	<b>Giochi Cooperativi</b>	<b>56</b>
<b>22</b>	<b>Imputazioni e Nucleo</b>	<b>57</b>
<b>23</b>	<b>Gioco Ridotto di Davis Mashler</b>	<b>62</b>
<b>24</b>	<b>Giochi di Mercato</b>	<b>64</b>
<b>25</b>	<b>Eccesso</b>	<b>65</b>
<b>26</b>	<b>Shapley</b>	<b>68</b>

# 1 Lotterie, Preferenze e Utilità

Dato un giocatore e un "gioco", siano  $A_1, \dots, A_n$  una serie di eventi il cui realizzarsi è mutualmente esclusivo (incompatibili) ordinati in ordine di "preferenza" del giocatore.

**Definizione 1.** Chiamiamo **Lotteria**<sup>[extra1]</sup>

$$L = [(A_1, p_1), \dots, (A_n, p_n)]$$

un'associazione di probabilità agli eventi, ossia  $p_i \geq 0$  e  $\sum_i p_i = 1$ . Denotiamo con  $\mathcal{L}$  l'insieme delle lotterie.

Se per qualche  $i$  abbiamo  $p_i = 0$ , possiamo anche omettere l'evento relativo. Per esempio

$$[(A_1, p), (A_2, p), (A_n, 1 - 2p)] := [(A_1, p), (A_2, p), (A_3, 0), \dots, (A_{n-1}, 0), (A_n, 1 - 2p)].$$

Dato che il giocatore preferisce certi eventi ad altri, allora esisterà anche una **Relazione di Preferenza** tra le lotterie, ossia una relazione sulle lotterie con le seguenti proprietà:

- **Riflessiva:**  $L \leq L$
- **Transitiva:**  $L_1 \leq L_2, L_2 \leq L_3 \implies L_1 \leq L_3$
- **Completezza:**  $L_1 \leq L_2$  oppure  $L_2 \leq L_1$  per ogni coppia di lotterie.

NON è una relazione d'ordine poiché non ha la proprietà antiriflessiva, ossia se  $L_1 \leq L_2$  e  $L_2 \leq L_1$  allora non è detto che  $L_2 = L_1$ . Se quozientiamo per la relazione d'equivalenza

$$L_1 \sim L_2 \iff L_1 \leq L_2 \leq L_1$$

allora  $\leq$  diviene una relazione d'ordine. Mettiamo anche qualche altra proprietà sulle lotterie:

- **Monotonia:** Dato che il giocatore preferisce  $A_1$  a  $A_n$ , avremo che

$$[(A_1, p), (A_n, 1 - p)] \geq [(A_1, p'), (A_n, 1 - p')] \iff p \geq p'.$$

- **Continuità:** Sia  $\hat{L}_i := [(A_i, 1)]$ . Allora

$$\exists \mu_i \in [0, 1] : \hat{L}_i \sim [(A_1, \mu_i), (A_n, 1 - \mu_i)] \quad \forall i.$$

- **Composizione:** Ogni lotteria  $L = [(A_1, p_1), \dots, (A_i, p_i), \dots, (A_n, p_n)]$  è equivalente a

$$[(A_1, p_1 + p_i \mu_i), \dots, (A_i, 0), \dots, (A_n, p_n + (1 - \mu_i) p_i)].$$

Nota: se  $i = 1$  o  $i = n$ , la continuità è ovviamente soddisfatta, ed in quei casi  $\mu_1 = 1, \mu_n = 0$  e sono unici per monotonia. Inoltre si verifica che

$$\hat{L}_1 \geq \hat{L}_i \geq \hat{L}_n \quad \forall i.$$

**Teorema 1** (Teorema dell'Utilità Attesa). *Data una relazione di preferenza che rispetta le proprietà di Monotonia, Continuità e Composizione, allora esiste una funzione  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  per cui*

$$L_1 \geq L_2 \iff f(L_1) \geq f(L_2)$$

*Dimostrazione.* Data  $L_1 = [(A_1, p_1), \dots, (A_n, p_n)]$ , definiamo

$$f(L_1) := \sum_{i=1}^n p_i \mu_i.$$

Usando la composizione ripetutamente, otteniamo

$$L_1 \sim [(A_1, \sum_{i=1}^n p_i \mu_i), (A_n, \sum_{i=1}^n p_i (1 - \mu_i))] = \tilde{L}_1.$$

Data  $L_2 = [(A_1, q_1), \dots, (A_n, q_n)]$  avremo analogamente

$$L_2 \sim [(A_1, \sum_{i=1}^n q_i \mu_i), (A_n, \sum_{i=1}^n q_i (1 - \mu_i))] = \tilde{L}_2.$$

La monotonia ci dice che

$$L_1 \geq L_2 \iff \tilde{L}_1 \geq \tilde{L}_2 \iff f(L_1) = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i \geq \sum_{i=1}^n q_i \mu_i = f(L_2).$$

□

**Definizione 2.** Una funzione con le ipotesi del teorema 1 si dice **Funzione di Utilità**.

Avremo in particolare che  $L_1 \sim L_2$  se e solo se  $f(L_1) = f(L_2)$  ed inoltre  $L_1 \geq L_2$ ,  $L_1 \not\geq L_2$  implica che  $f(L_1) > f(L_2)$ .

Nel teorema, la funzione  $f$  ha valori in  $[0, 1]$ . ma se  $f$  è una funzione di utilità, allora  $af + b$  con  $a > 0$  è ancora una funzione di utilità.

**Definizione 3.** Una **Lotteria Composta** è

$$L_c = [(L_1, p_1), \dots, (L_m, p_m)]$$

dove  $L_i$  sono lotterie, e  $p_i$  sono componenti di un vettore di probabilità, dunque  $p_i \geq 0$  e  $\sum_i p_i = 1$ .  
In realtà questa è solo una notazione: se

$$L_i = [(A_1, r_{i,1}), \dots, (A_n, r_{i,n})]$$

allora  $L_c$  è una lotteria semplice del tipo

$$L_c \sim [(A_1, \sum_i p_i r_{i,1}), \dots, (A_n, \sum_i p_i r_{i,n})].$$

Usando la funzione di utilità  $f$  si ottiene

$$f([(L_1, \lambda), (L_2, 1 - \lambda)]) = \lambda f(L_1) + (1 - \lambda) f(L_2)$$

## 2 Duopolio di Cournot

Ci sono due Aziende/giocatori che sono le uniche produttrici di un bene e competono sul mercato. Supponiamo che (Duopolio di Cournot, 1838)[3]

- Il bene è Omogeneo: le produzioni delle due aziende sono indistinguibili,
- Quantità: La competizione viene fatta sulla quantità prodotta,
- Mercato: Il prezzo è fissato per entrambi dal 'Mercato', ed è uguale.

Un altro modello è (Duopolio di Bertrand, 1883)

- Il bene NON è omogeneo,
- Le quantità vendute sono determinate dal prezzo,

- La competizione viene fatta sui prezzi.

Focalizziamoci sul duopolio di Cournot. La produzione dell'azienda  $i$  sarà  $x_i \in \mathbb{R}_+$ . Inoltre c'è una funzione "costo"

$$c_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

che stabilisce il costo di produzione  $c_i(x_i)$ . La *funzione di domanda inversa* è

$$p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

dove  $p(z)$  è il massimo prezzo per unità che consente di vendere TUTTA la produzione  $z$  (e pertanto è il prezzo ideale a cui vendere). Il profitto della prima azienda sarà

$$\mu_1(x_1, x_2) = x_1 p(x_1 + x_2) - c_1(x_1)$$

e quello della seconda è

$$\mu_2(x_1, x_2) = x_2 p(x_1 + x_2) - c_2(x_2).$$

In questa situazione, le singole aziende devono determinare la propria produzione  $x_i$  senza sapere quella della rivale.

Dapprima, supponiamo che

- i costi di produzione siano identici e lineari  $c_i(x) = cx$ ,
- La funzione  $p$  decresca linearmente con la produzione  $p(z) = \max\{0, T - \alpha z\}$ .

In questo caso, possiamo scrivere

$$\mu_1(x_1, x_2) = x_1 \max\{0, T - \alpha(x_1 + x_2)\} - cx_1$$

e posso riscrivere  $\alpha = 1$  sostituendo  $T/\alpha$ ,  $c/\alpha$  e  $\mu_1/\alpha$  con  $T$ ,  $c$ ,  $\mu_1$

$$\mu_1(x_1, x_2) = x_1 \max\{0, T - x_1 - x_2\} - cx_1.$$

**Se  $x_2 = 0$** , ossia non esiste concorrente, allora bisogna massimizzare

$$x_1 \max\{0, T - x_1\} - cx_1.$$

Sicuramente  $T \geq x_1 \geq 0$  dunque il massimo della funzione è il massimo di  $-x_1^2 + (T - c)x_1$  che si trova in

$$x_1 = \max\left\{\frac{T - c}{2}, 0\right\}.$$

Dunque se  $T > c$  (cioè se posso vendere il bene ad un prezzo più alto del costo a cui l'ho prodotto), allora so come massimizzare il profitto.

**Se  $x_2 > 0$**  massimizziamo il profitto in funzione di  $x_2$ , ossia calcoliamo la **Migliore Risposta**. Prima di tutto, possiamo supporre  $x_2 < T$ , altrimenti il prezzo va a zero, e  $T > c$ , altrimenti non otterremmo mai guadagno. Avremo

$$r_1(x_2) = \arg \max_{T - x_2 \geq x_1 \geq 0} \{x_1(T - x_1 - x_2) - cx_1\}$$

La quadratica è facile da massimizzare:

$$-x_1^2 + x_1(T - x_2 - c) \longrightarrow r_1(x_2) = \max\left\{0, \frac{T - c - x_2}{2}\right\}.$$

Risulta dunque se  $T - c < x_2$  non otteniamo nessun guadagno a produrre. Allo stesso tempo, anche la seconda azienda può ottenere lo stesso ragionamento, scambiando gli indici. Pertanto

$$x_1 \geq T - c \implies r_2(x_1) = 0 \quad x_2 = 0 \implies r_1(x_2) = \frac{T - c}{2}$$

dunque la migliore scelta non è  $T - c$ , poiché la risposta dell'altra azienda rende non ottimale la prima. Ciò vuol dire che vorremmo soddisfare

$$x_1 = r_1(r_2(x_1)) = r_1\left(\frac{T - c - x_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(T - c - \frac{T - c - x_1}{2}\right) = \frac{T - c}{4} - \frac{x_1}{4}$$

$$\implies x_1 = \frac{T-c}{3} \implies \mu_1(x_1, r_2(x_1)) = \frac{(T-c)^2}{9}.$$

Secondo questo ragionamento, entrambe le aziende dovrebbero produrre  $(T-c)/3$ .

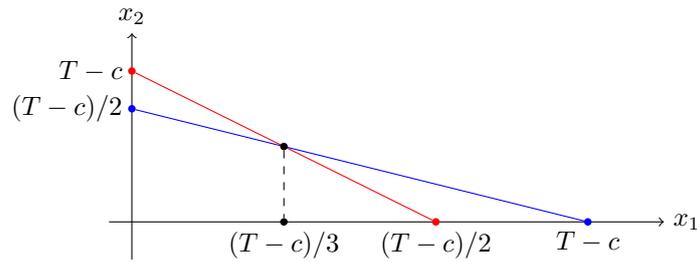


Figura 1: Grafico delle risposte  $r_1(x_2)$  e  $r_2(x_1)$ .

Diremo che lo Stato  $(x_1, x_2)$  è di **Equilibrio** se  $r_1(x_2) = x_1$  e  $r_2(x_1) = x_2$ . Più in là daremo una definizione formale di equilibrio.

Se le aziende si fossero messe d'accordo (Monopolio), potevano ottenere di meglio, spartendosi una produzione di  $(T-c)/2$  in due e ottenendo un profitto maggiore.

$$\mu((T-c)/4, (T-c)/4) = \frac{(T-c)^2}{8} > \frac{(T-c)^2}{9}.$$

La differenza tra il profitto nel Monopolio e il profitto nell'equilibrio si chiama *Prezzo dell'Anarchia*. Notiamo che però il prezzo  $p(z)$  nel caso del Duopolio è minore del caso del Monopolio, poiché  $(T-c)/4 < (T-c)/3$ . Dunque dal punto di vista del consumatore, il duopolio è più conveniente.

9-3-18

### 3 Duopolio di Bertrand

Duopolio in cui le aziende competono sul prezzo. La quantità prodotta è data dalla domanda del Mercato.

Di nuovo supponiamo il costo di produzione unitario costante e uguale per le due aziende  $c$ . Il prezzo sarà  $p_i$  e la produzione  $x_i$  dipende dai prezzi

$$x_i = q_i(p_1, p_2)$$

"quantità vendibile dalla azienda  $i$  se i prezzi sono  $p_1, p_2$ ". Il guadagno sarà

$$\mu_i(p_1, p_2) = q_i(p_1, p_2)(p_i - c).$$

Nel caso di **beni omogenei** allora si suppone che

$$q_1(p_1, p_2) = \begin{cases} Q - p_1 & p_1 < p_2 \\ \frac{Q - p_1}{2} & p_1 = p_2 \\ 0 & p_1 > p_2 \end{cases}$$

dove  $Q > c$ . Il ragionamento è lo stesso di 2, i dettagli sono lasciati per esercizio.

$$r_1(p_2) = \arg \max_{p_1 \geq c} \{\mu_1(p_1, p_2)\}$$

e viceversa. Dopo l'analisi si ricava che

$$r_1(p_2) = \begin{cases} c & p_2 = c \\ \frac{Q+c}{2} & p_2 > \frac{Q+c}{2} \\ \emptyset & p_2 < \frac{Q+c}{2} \end{cases}$$

Nell'ultimo caso il massimo non esiste perché la funzione da massimizzare è discontinua, per ogni  $p_1 < p_2$  il guadagno è crescente, ma a  $p_1 = p_2$  il guadagno cala, quindi sarebbe un  $p_2 - \varepsilon$  con  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Il caso di equilibrio sarebbe  $p_1 = p_2 = c$ , ma in questo caso nessuna delle due aziende guadagnerebbe.

Mettiamoci invece nel caso di **beni non omogenei**, ossia le due funzioni  $q_i$  sono differenti.

$$q_1(p_1, p_2) = \max\{0, Q - p_1 + qp_2\}$$

$$q_2(p_1, p_2) = \max\{0, Q + p_1 - qp_2\}$$

con  $Q > c$ ,  $q > 0$ . Nuovamente è possibile calcolare  $r_1$  che sarà

$$r_1(p_2) = (Q + qp_2 + c)/2$$

$$r_2(p_1) = (Q + qp_1 + c)/2$$

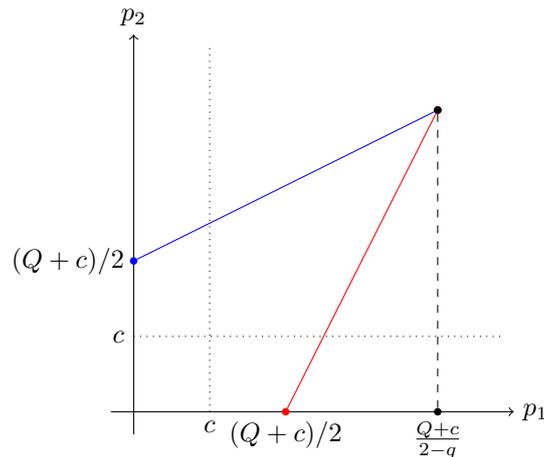


Figura 2: Grafico delle risposte  $r_1(p_2)$  e  $r_2(p_1)$ .

L'equilibrio si ottiene a  $p_1 = p_2 = \frac{Q+c}{2-q}$  se  $q < 2$ . Nel caso  $q \geq 2$ , le due rette non si incontrano, ossia i prezzi possono essere aumentati a piacimento da entrambe le aziende, e non esiste uno stato di equilibrio.

## 4 Giochi Non Cooperativi

Definiamo un **Gioco Strategico** o **Gioco in Forma Normale** [1] come un insieme contenente

- $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  giocatori,
- $S_i$  insieme di *strategie* per il giocatore  $i$ ,
- $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  insieme dei *profili di strategie*.
- $\mu_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  detta *funzione di utilità* o *payoff* del giocatore  $i$ .

Ogni giocatore mira a massimizzare sul proprio insieme di strategie  $S_i$  la sua funzione di utilità  $\mu_i$ . Useremo  $\boldsymbol{\mu}$  per indicare la funzione  $\boldsymbol{\mu} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  che ha come componenti le  $\mu_i$ .

In questi giochi non c'è un aspetto dinamico: la strategia deve essere scelta all'inizio e non può essere cambiata nel corso del gioco. Diremo che il gioco è **Finito** se  $S$  è un insieme finito.

Dato  $\boldsymbol{x} \in S$ ,  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$  allora denotiamo con  $\boldsymbol{x}_{-i} = (x_j)_{j \neq i}$ , ossia il vettore a cui ho tolto  $x_i$ . Allo stesso modo,

$$S_{-i} := \prod_{j \neq i} S_j.$$

Se "ignoriamo" la posizione degli elementi, possiamo usare le notazioni

$$\boldsymbol{x} = (x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \quad \mu_j(\boldsymbol{x}) = \mu_j(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})$$

**Definizione 4.** L'insieme delle **Risposte Ottime** o **Migliori** è definito come

$$r_i(\mathbf{x}_{-i}) = \arg \max_{y \in S_i} \mu_i(y, \mathbf{x}_{-i})$$

dunque è una funzione da  $S_{-i}$  a  $\mathcal{P}(S_i)$ .

La risposta migliore di un giocatore  $i$  è letteralmente la migliore strategia  $x_i \in S_i$  che può scegliere in risposta alle strategie degli altri  $\mathbf{x}_{-i} \in S_{-i}$ .

**Definizione 5.**  $x \in S$  si dice un **Punto di Equilibrio di Nash** se

$$x_i \in r_i(\mathbf{x}_{-i}) \quad \forall i.$$

Un equilibrio di Nash è pertanto una scelta di strategie da parte di tutti i giocatori in modo che se un giocatore  $i$  singolarmente cambiasse la propria strategia  $x_i$ , mantenendo fisse le strategie degli altri  $\mathbf{x}_{-i}$ , quel giocatore perderebbe in termini della propria funzione di utilità.

### Esempio

► **Dilemma del Prigioniero:**

2 prigionieri che possono confessare o non confessare. A seconda delle scelte, vengono imprigionati per gli anni di carcere riportati nella seguente tabella (con segno invertito). Le righe sono le diverse strategie del primo giocatore, le colonne sono le strategie del secondo. I numeri nelle celle  $a/b$  sono le utilità riferite al primo ( $a$ ) e al secondo ( $b$ ) giocatore se attuano le strategie della riga e colonna che individuano la cella.

	non conf	conf
non conf	-2/ -2	-7/0
conf	0/ -7	-5/ -5

L'unico equilibrio di Nash possibile è quando entrambi confessano. Questo è analogo al duopolio, in cui se i due giocatori "concorrono" allora l'esito è peggiore del caso "collaborativo", ossia quando nessuno dei due confessa.

► **Battaglia dei Sessi:**

Lei vuole andare al cinema, Lui allo stadio, ma vogliono comunque fare qualcosa insieme.

	partita	cinema
partita	2/1	0/0
cinema	0/0	1/2

In questo ci sono due equilibri, ossia quando vanno insieme nello stesso posto.

► **Caccia al Cervo:**

Due cacciatori vanno a caccia, ed ognuno decide se voler cacciare una lepre o un cervo. Una lepre è facile da catturare, dunque se un cacciatore decide che vuole una lepre, riuscirà a prenderla. Invece, un cervo è più difficile da catturare, e un cacciatore riesce a prenderlo se e solo se entrambi lavorano con lo stesso scopo, e un cervo diviso in due vale più di una lepre.

	cervo	lepre
cervo	2/2	0/1
lepre	1/0	1/1

In questo ci sono due equilibri, ossia quando decidono di cacciare lo stesso animale, ma uno dei due equilibri è preferibile all'altro per entrambi i giocatori, a differenza del caso prima.

► **Coordinamento:**

I giochi del tipo della Caccia al Cervo sono detti **Giochi di Coordinamento**, che sono nella forma

	*	*
*	$A/a$	$C/c$
*	$B/b$	$D/d$

con  $A > B$ ,  $C > D$ ,  $a > c$ ,  $d > c$  che ha come equilibri  $A/a$  e  $D/d$ .

Se inoltre  $A > D$ ,  $a > d$ , allora una strategia di collaborazione è preferibile all'altra, e questo viene detto **Gioco di Puro Coordinamento**.

► **Falco e Colomba:**

Allegoria per spartirsi il cibo: due persone possono comportarsi da Falco o Colomba, dove i Falchi sono violenti, mentre le Colombe no. I falchi rubano tutto il cibo alle colombe, due colombe condividono, mentre due falchi litigano tra loro perdendo tutto il cibo e ferendosi tra loro.

	Falco	Colomba
Falco	-2/-2	2/0
Colomba	0/2	1/1

Gli equilibri sono due, ma sono quelli in cui solo uno è un falco.

► **Chicken Game:**

Il gioco del Falco e della Colomba viene detto **Chicken Game**, ossia il tipico gioco in cui perde chi si ritira/spaventa per primo (come le gare di macchine in cui vince chi sterza dopo).

	Diritto	Sterza
Diritto	-1/-1	1/0
Sterza	0/1	0/0

► **Morra Cinese:**

	Sasso	Forbici	Carta
Sasso	0/0	1/-1	-1/1
Forbici	-1/1	0/0	1/-1
Carta	1/-1	-1/1	0/0

Non esiste equilibrio. Fosse stato Sasso-Forbici-Carta-Lizard-Spock sarebbe stato lo stesso, ma più divertente.

## 5 Giochi Dinamici

Abbiamo due oggetti, e due giocatori. Il primo giocatore propone una ripartizione dei due oggetti, e il secondo giocatore accetta o rifiuta. Se accetta, si ripartiscono gli oggetti nella maniera proposta, altrimenti se rifiuta, nessuno prende niente.

Il primo giocatore può essere Egoista(tutto a lui), Equo(uno per uno), o Generoso(tutto all'altro).

In questo caso il gioco è dinamico, poiché la strategia del secondo non è predeterminata, ma dipende dalla mossa del primo. I casi sono 6:

	Egoista	Equo	Generoso
Accetta	0/2	1/1	2/0
Rifiuta	0/0	0/0	0/0

che può essere espresso attraverso un grafo delle mosse (che in questo caso è un albero)

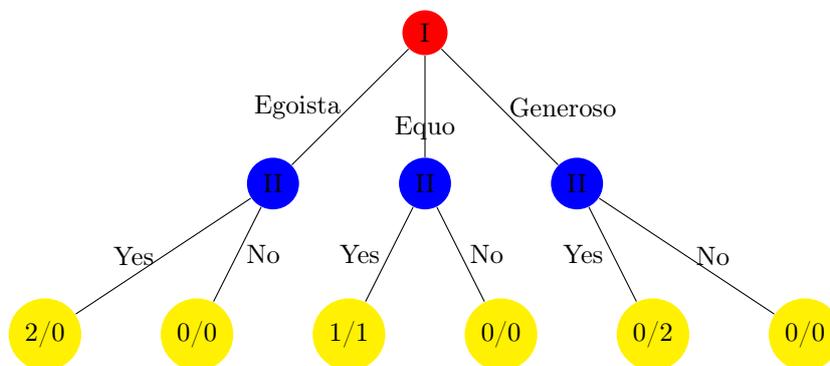


Figura 3: Albero delle mosse.

Questa rappresentazione è detta di **Gioco in Forma Estesa**, e ha senso farlo per giochi sequenziali. Il gioco in questione deve avere anche informazione *perfetta e completa*, ossia i giocatori hanno tutte le informazioni su tutti gli stati di gioco, mosse, e funzioni di utilità propria e dell'avversario.

L'albero è rappresentato dalla coppia  $(E, A)$  dove  $E$  sono i nodi, o *stati del gioco* e  $A$  sono gli archi, o *mosse* del gioco. L'albero è inoltre radicato in  $r \in E$ , ossia lo stato iniziale, e  $F \subseteq E$  è l'insieme delle sue foglie, o stati finali.

Definiamo inoltre:

- Una funzione che associa ad ogni stato non foglia il giocatore di turno  $f : E \setminus F \rightarrow N$ .
- Una funzione che associa ad ogni foglia i payoff dei giocatori  $p_i : F \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Chiamiamo  $E(i)$  i nodi in cui muove il giocatore  $i$ , ossia  $f^{-1}(i)$ .
- Siano  $FS(e)$  gli archi uscenti dal nodo  $e$ .
- Le strategie del giocatore  $i$  sono funzioni dai nodi in cui è di turno alle azioni

$$S_i = \{s : E(i) \rightarrow A \mid s(e) \in FS(e)\}$$

- L'output è una funzione  $o : S \rightarrow F$  che associa ad ogni profilo di strategie la foglia in cui finisce il gioco.
- Il guadagno è definito da

$$\mu_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = p_i(o(s_1, s_2, \dots, s_n)).$$

**Esercizio 1.** *Scrivere tutti gli elementi del gioco sopra. Inoltre scrivere la tabella di gioco in cui mettiamo come righe/colonne le strategie e individuare gli equilibri.*

15-3-18

## 6 Valore di Gioco

Ricordiamo le notazioni di un gioco in forma normale

- $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  giocatori,
- $S_i$  insieme di *strategie* per il giocatore  $i$ ,
- $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  insieme dei *profili di strategie*.
- $\mu_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  detta *funzione di utilità* o *payoff* del giocatore  $i$ .

Poniamo che il giocatore  $i$  scelga la strategia  $x_i \in S_i$ . Gli altri giocatori sceglieranno le strategie  $\mathbf{x}_{-i}$ , e poniamo che quest'ultimo realizzi il minimo (o inf) di

$$\mu(x_i, \mathbf{x}_{-i}), \quad w(x_i) := \inf_{\mathbf{x}_{-i}} \mu(x_i, \mathbf{x}_{-i}).$$

La funzione  $w(x_i)$  indica quanto guadagna al minimo il giocatore  $i$  se sceglie la strategia  $x_i$  (Nota: dovrebbe essere scritto  $w_i(x_i)$  per indicare il giocatore in questione, ma omettiamo il pedice per brevità).

**Definizione 6.**  $\bar{x}_i \in S_i$  si dice **Strategia di Sicurezza** o **Conservativa** se

$$\bar{x}_i \in \arg \max_{x_i \in S_i} w(x_i).$$

Inoltre il **Valore di Sicurezza** è

$$v_i = \sup_{x_i \in S_i} w(x_i).$$

Il valore di sicurezza indica quanto guadagna al minimo il giocatore  $i$  se sceglie la strategia di sicurezza, quindi è un valore che il giocatore può sempre ottenere se  $S_i$  è finito. Nel caso  $S_i$  sia infinito, allora ci si può avvicinare a piacere.

### Esempio

► Nel **Duopolio di Cournot** ricordiamo che

$$\mu_i(x_1, x_2) = x_i(\max\{0, T - x_1 - x_2\} - c).$$

Calcoliamo strategia/valore di sicurezza.

$$w_1(x_1) = \inf_{x_2 \geq 0} \{\mu_1(x_1, x_2)\} = -cx_1, \quad v_1 = \sup_{x_1 \geq 0} w_1(x_1) = 0, \quad \bar{x}_1 = 0.$$

"In ogni caso ci perdo, quindi meglio non fare niente".

**Definizione 7.** Un gioco a 2 giocatori si dice **Strettamente Competitivo** se per ogni coppia di profili di strategie  $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in S$  si ha

$$\mu_1(x_1, x_2) > \mu_1(x'_1, x'_2) \iff \mu_2(x_1, x_2) < \mu_2(x'_1, x'_2)$$

In questo tipo di giochi, i giocatori cercano sempre di attuare strategie diametralmente opposte tra loro, per aumentare la propria funzione di utilità, e un guadagno per un giocatore porta ad una perdita per l'altro. In questo senso si dice che il gioco è competitivo.

**Definizione 8.** Un gioco è a **Somma Nulla** se

$$\mu_1(x_1, x_2) = -\mu_2(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in S.$$

Nota: un gioco a somma nulla è sempre un gioco strettamente competitivo.

In questi giochi, possiamo definire  $\mu := \mu_1 = -\mu_2$  e dunque il giocatore 1 vuole massimizzare  $\mu$ , mentre il secondo vuole minimizzare  $\mu$ .

Calcoliamo una strategia di sicurezza in un gioco a somma nulla.

$$\begin{aligned} w_1(x_1) &= \inf_{x_2 \in S_2} \mu(x_1, x_2), & v_1 &= \sup_{x_1 \in S_1} \inf_{x_2 \in S_2} \mu(x_1, x_2) \\ w_2(x_2) &= \inf_{x_1 \in S_1} -\mu(x_1, x_2), & v_2 &= \sup_{x_2 \in S_2} \inf_{x_1 \in S_1} -\mu(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Abuso di Notazione:  $-v_2 \rightarrow v_2$ , così possiamo scrivere

$$v_2 = \inf_{x_2 \in S_2} \sup_{x_1 \in S_1} \mu(x_1, x_2)$$

**Lemma 1.**  $v_1 \leq v_2$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \sup_{y \in S_1} \mu(y, x_2) &\geq \mu(x_1, x_2) \geq \inf_{y \in S_2} \mu(x_1, y) \\ \implies v_1 &= \sup_{x_1 \in S_1} \inf_{y \in S_2} \mu(x_1, y) \leq \inf_{x_2 \in S_2} \sup_{y \in S_1} \mu(y, x_2) = v_2 \end{aligned}$$

□

Le Strategie di Sicurezza vengono dette anche **Strategie di minmax**.

**Definizione 9.** Se  $v_1 = v_2$  allora  $v := v_1 = v_2$  è detto **Valore del Gioco**.

Prendiamo  $(x_1^*, x_2^*)$  un equilibrio di Nash. Avremo

$$\mu(x_1, x_2^*) \leq \mu(x_1^*, x_2^*) \leq \mu(x_1^*, x_2) \quad \forall x_1 \in S_1, x_2 \in S_2,$$

che è un *punto di sella* della funzione  $\mu$ .

**Teorema 2.** Gli equilibri di Nash di un gioco a somma zero sono coppie di strategie di minmax. Se il Gioco ammette un valore (ossia  $v_1 = v_2$ ) allora le coppie di strategie minmax sono equilibri di Nash.

*Dimostrazione.* Sia  $(x_1^*, x_2^*)$  un equilibrio di Nash. Sappiamo che vale

$$\mu(x_1, x_2^*) \leq \mu(x_1^*, x_2^*) \leq \mu(x_1^*, x_2) \quad \forall x_1 \in S_1, x_2 \in S_2,$$

dunque

$$v_2 = \inf_{x_2 \in S_2} \sup_{x_1 \in S_1} \mu \leq -w_2(x_2^*) = \sup_{x_1 \in S_1} \mu(x_1, x_2^*) \leq \inf_{x_2 \in S_2} \mu(x_1^*, x_2) = w_1(x_1^*) \leq \sup_{x_1 \in S_1} \inf_{x_2 \in S_2} \mu = v_1$$

ma  $v_1 \leq v_2$  per Lemma 1, dunque sono tutte uguaglianze. In particolare  $x_1^*$  massimizza  $w_1$  e  $x_2^*$  massimizza  $w_2^*$ , dunque sono strategie di minmax.

Supponiamo ora  $(x_1^*, x_2^*)$  siano strategie di minmax, e che  $v_1 = w_1(x_1^*) = -w_2(x_2^*) = v_2$ . Dunque

$$\mu(x_1^*, x_2^*) \geq \inf_{x_2 \in S_2} \mu(x_1^*, x_2) = w_1(x_1^*) = -w_2(x_2^*) = \sup_{x_1 \in S_1} \mu(x_1, x_2^*) \geq \mu(x_1^*, x_2^*)$$

e pertanto  $v = \mu(x_1^*, x_2^*)$ . Inoltre

$$\mu(x_1^*, x_2) \geq \inf_{x_2 \in S_2} \mu(x_1^*, x_2) = w_1(x_1^*) = \mu(x_1^*, x_2^*) = -w_2(x_2^*) = \sup_{x_1 \in S_1} \mu(x_1, x_2^*) \geq \mu(x_1, x_2^*)$$

per ogni  $x_1, x_2$ , dunque  $(x_1^*, x_2^*)$  è un equilibrio di Nash. □

Notiamo che se esiste un equilibrio di Nash, allora il gioco ha un valore. Inoltre, dato che questo è unico, se ci sono due equilibri, allora hanno lo stesso valore.

**Esercizio 2.** Se  $(x_1^*, x_2^*)$  e  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  sono equilibri di Nash, allora anche  $(x_1^*, \hat{x}_2)$  e  $(\hat{x}_1, x_2^*)$  sono equilibri di Nash.

## 7 Giochi Matriciali

In un gioco a 2 giocatori, poniamo che  $S_1, S_2$  siano finiti  $S_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$ ,  $S_2 = \{1, 2, \dots, n_2\}$ . In questo caso posso scrivere max, min al posto di sup, inf.

**Definizione 10.** Dato un gioco a 2 giocatori con  $S_1, S_2$  finiti, chiamiamo

$$A = [\mu(x_i, x_j)]_{i,j}$$

la **Matrice del Gioco**, e indichiamo con  $a_{i,j}$  gli elementi della matrice. Questi vengono anche chiamati **Giochi Matriciali**.

Notiamo che se  $(i^*, j^*)$  è un equilibrio di Nash, allora

$$a_{i,j^*} \leq a_{i^*,j^*} \leq a_{i^*,j} \quad \forall i, j$$

ossia è l'elemento minimo nella sua riga e massimo nella sua colonna.

**Esempio**

► Sul gioco

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

i minimi sulle righe sono 2, 1, 3. I massimi sulle colonne sono 4, 7, 3, 6. In questo caso l'unico equilibrio e punto di minmax è  $a_{3,3} = 3$ . Se invece

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

allora i minimi sulle righe sono 2, 1, 3, i massimi sulle colonne sono 4, 7, 5, 6 e dunque non ci sono equilibri. Una maniera per trovarli è fare minmax su colonne, sulle righe e vedere se coincidono.

**Esercizio 3.** Trovare i punti di equilibrio di

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**Definizione 11.** Un gioco matriciale si dice **Simmetrico** se  $A$  è quadrata e antisimmetrica.

Nota: Ciò comporta che gli elementi sulla diagonale di  $A$  sono zeri.

**Esempio**

► Nella morra cinese,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Lemma 2.** Un gioco matriciale simmetrico ha un equilibrio di Nash se e solo se esiste  $i^*$  per cui

$$a_{i^*,j} \geq 0 \quad \forall j$$

e in tal caso  $(i^*, i^*)$  è un punto di equilibrio, e il valore è 0.

*Dimostrazione.* Il massimo sulle colonne è sempre  $\geq 0$ , il minimo sulle righe è sempre  $\leq 0$ , dunque l'unico equilibrio possibile è zero. Se esiste l'equilibrio, allora 0 è il minimo sulla sua riga, e pertanto tutti gli altri elementi della riga sono positivi.

Viceversa, se tutti gli altri elementi della riga sono positivi, allora per antisimmetria, gli elementi sulla colonna sono negativi, pertanto 0 è il massimo sulla colonna e il minimo sulla riga, ossia un equilibrio.  $\square$

## 8 Teorema MinMax

Per il prossimo teorema, ci serviranno le definizioni di funzioni e insiemi convessi/concavi e i seguenti lemmi, che citiamo senza dimostrare.

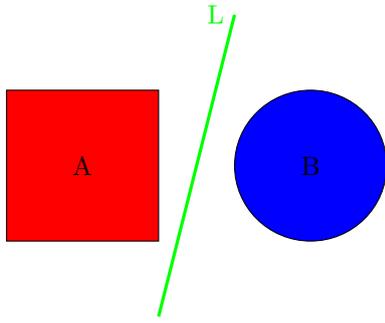
**Lemma 3.** Dati  $\{C_i\}_{i \in I}$  famiglia di compatti di  $\mathbb{R}^n$  con la proprietà dell'intersezione finita

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora l'intersezione di tutti è non vuota.

**Lemma 4.** Dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  convessi compatti, allora esiste  $L$  un iperpiano che separa  $A, B$ , ossia esistono  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$  per cui

$$A \subseteq \{x : v^T x < c\}, \quad B \subseteq \{x : v^T x > c\}.$$



**Teorema 3 (Minmax).** *Dato un gioco a due giocatori a somma nulla, supponiamo*

- $S_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $S_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ , convessi e compatti,
- $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$  continua,
- $\mu(\cdot, x_2) := x_1 \mapsto \mu(x_1, x_2)$  concava e  $\mu(x_1, \cdot) := x_2 \mapsto \mu(x_1, x_2)$  convessa per ogni  $x_1, x_2$ .

Allora

$$\max_{x_1 \in S_1} \min_{x_2 \in S_2} \mu(x_1, x_2) = \min_{x_2 \in S_2} \max_{x_1 \in S_1} \mu(x_1, x_2)$$

16-3-18

*Dimostrazione.* Notiamo che per Lemma 1, sappiamo

$$\max_{x_1} \min_{x_2} \mu(x_1, x_2) \leq \min_{x_2} \max_{x_1} \mu(x_1, x_2)$$

quindi ci basta dimostrare la disuguaglianza inversa. Sia  $c \in \mathbb{R}$  e  $x_2 \in S_2$ . Definiamo

$$H_{x_2}^c := \{x_1 \in S_1 : \mu(x_1, x_2) \geq c\}.$$

$x_2$  è fissato, e  $\mu(\cdot, x_2)$  è continua e concava, dunque  $H_{x_2}^c$  è chiuso, convesso ed è contenuto in  $S_1$  che è un compatto, dunque anche lui è compatto. Definiamo

$$C = \{c \in \mathbb{R} : H_{x_2}^c \neq \emptyset \forall x_2 \in S_2\}.$$

Dato che  $w = \min_{\mathbf{x} \in S} \mu(\mathbf{x})$  esiste perché  $S$  compatto, allora che  $H_{x_2}^w = S_1 \neq \emptyset \forall x_2 \in S_2$  e pertanto  $C$  non è vuoto. Sappiamo anche che  $c' < c \in C \implies c' \in C$ .

Se  $\{c^k\}_k \subseteq C$  è una successione, allora per ogni  $x_2$  esiste un  $x_1^k \in S_1$  per cui  $\mu(x_1^k, x_2) \geq c^k$ . Se  $c^k \rightarrow c$  e  $x_1^k \rightarrow \bar{x}$  (a meno di sottosuccessioni poiché  $S_1$  è compatto), allora  $\mu(\bar{x}, x_2) \geq c$ , dunque  $c \in C$  e  $C$  è chiuso. Da questo concludiamo che  $C = (-\infty, c^*]$ .

Se  $\bar{c} = \min_{x_2 \in S_2} \max_{x_1 \in S_1} \mu(x_1, x_2)$ , allora

$$\max_{x_1 \in S_1} \mu(x_1, x_2) \geq \bar{c} \forall x_2 \in S_2 \implies \bar{c} \in C \implies \bar{c} \leq c^*.$$

Preso

$$H := \bigcap_{x_2 \in S_2} H_{x_2}^{c^*}$$

poniamo che esista  $x_1^* \in H$ . Sappiamo che  $\mu(x_1^*, x_2) \geq c^* \forall x_2 \in S_2$ , dunque

$$\max_{x_1} \min_{x_2} \mu(x_1, x_2) \geq \min_{x_2} \mu(x_1^*, x_2) \geq c^* \geq \bar{c} = \min_{x_2} \max_{x_1} \mu(x_1, x_2)$$

che ci fa concludere. Vogliamo dunque dimostrare che  $H \neq \emptyset$  e pertanto basta dimostrare che gli  $H_{x_2}^c$  hanno la proprietà dell'intersezione finita. Facciamolo per induzione sul numero di elementi da intersecare. D'ora in poi  $H_{x_2} := H_{x_2}^{c^*}$ .

Se  $n = 2$ , siano  $H_{x_2} \cap H_{x_2'} = \emptyset$  per qualche  $x_2, x_2' \in S_2$ . Definiamo

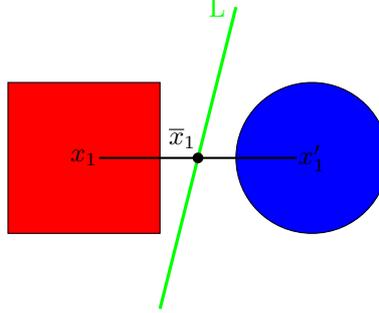
$$H(\lambda) := H_{\lambda x_2 + (1-\lambda)x_2'}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Se  $x_1 \notin H_{x_2} \cup H_{x_2}^*$ , allora

$$\begin{aligned} \mu(x_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2') &\leq \lambda\mu(x_1, x_2) + (1 - \lambda)\mu(x_1, x_2') < c^* \\ \implies x_1 &\notin H(\lambda). \end{aligned}$$

dunque  $H(\lambda) \subseteq H_{x_2} \cup H_{x_2}'$ .

Se esiste  $\lambda^* \in [0, 1]$  per cui  $x_1 \in H(\lambda^*) \cap H_{x_2} \neq \emptyset$  e  $x_1' \in H(\lambda^*) \cap H_{x_2}' \neq \emptyset$ . Il segmento che unisce  $x_1, x_1'$  è contenuto in  $H(\lambda^*)$ , poiché tutti gli  $H(\lambda)$  sono convessi in quanto sopralivelli di una funzione concava. Le due intersezioni sopra sono convessi, compatti, disgiunti, dunque si possono separare con un iperpiano.



L'intersezione  $\bar{x}_1$  tra l'iperpiano e il segmento  $[x_1, x_1']$  sta in  $H(\lambda^*)$ , ma non sta in nessuno tra  $H_{x_2}$  e  $H_{x_2}'$ , ottenendo l'assurdo. Dunque  $H(\lambda) \subseteq H_{x_2}$  oppure  $H(\lambda) \subseteq H_{x_2}'$ .

Prendiamo  $\bar{\lambda}$  per cui  $H(\bar{\lambda}) \subseteq H_{x_2}$  (o  $x_2'$ ). Avremo che  $H(\bar{\lambda}) \cap H_{x_2}' = \emptyset$  (o viceversa  $x_2$ ). Ma allora per ogni  $x_1' \in H_{x_2}'$  ( $x_2$ ) avremo

$$\mu(x_1', \bar{\lambda}x_2 + (1 - \bar{\lambda})x_2') < c^*,$$

ma  $\mu$  è continua, pertanto esiste un  $\varepsilon > 0$  per cui

$$|\lambda - \bar{\lambda}| < \varepsilon, \quad |x_1 - x_1'| < \varepsilon \implies \mu(x_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2') < c^*.$$

Possiamo dunque prendere un ricoprimento di  $H_{x_2}'$  ( $x_2$ ) fatto di intorni di  $x_1'$  per cui funziona la proprietà sopra, e possiamo estrarne un ricoprimento finito per la compattezza di  $H_{x_2}'$  ( $x_2$ ), da cui prendiamo il minimo degli  $\varepsilon$  per i finiti punti  $x_1'$  scelti, e otteniamo che

$$|\lambda - \bar{\lambda}| < \varepsilon \implies \mu(x_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2') < c^*, \quad \forall x_1 \in H_{x_2}'.$$

Concludiamo che  $H(\lambda) \subseteq H_{x_2}$  (o  $x_2'$ ) per ogni  $\lambda$  in un intorno aperto di  $\bar{\lambda}$

Consideriamo

$$A := \{\lambda \in [0, 1] : H(\lambda) \subseteq H_{x_2}\}, \quad B := \{\lambda \in [0, 1] : H(\lambda) \subseteq H_{x_2}'\}.$$

Abbiamo mostrato che  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = [0, 1]$  e che sono aperti in  $[0, 1]$ , ma  $[0, 1]$  è connesso, da cui uno tra  $A, B$  è vuoto. Notiamo  $1 \in A$ ,  $0 \in B$  dunque otteniamo un assurdo. Ciò implica finalmente che

$$H_{x_2} \cap H_{x_2}' \neq \emptyset \quad \forall x_2, x_2' \in S_2.$$

Per il passo induttivo, prendiamo  $n + 1$  punti  $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^{n+1}$ .

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} H_{x_2^i} = (H_{x_2^1} \cap H_3) \cap (H_{x_2^2} \cap H_3), \quad H_3 := \bigcap_{i=3}^{n+1} H_{x_2^i}$$

dove i due pezzi non sono vuoti per induzione, e per concludere si ripete lo stesso ragionamento del passo base, con

$$H(\lambda) = H_{\lambda x_2^1 + (1-\lambda)x_2^2} \cap H_3.$$

□

Nel risultato, potevamo sostituire convessità/concavità delle funzioni con la quasiconvessità/quasiconcavità, definite come

**Definizione 12.**  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è quasi convessa se e solo se

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{g(x), g(y)\}$$

**Esercizio 4.** Una funzione è quasiconvessa (quasiconcava) se e solo se tutti i sottolivelli (sopralivelli) sono convessi.

**Esercizio 5.** Trovare una funzione quasiconvessa (quasiconcava) non continua.

Nota: esistono funzioni non convesse in cui tutti i sottolivelli sono convessi, per esempio  $|x|$  oppure  $x^3$  su  $\mathbb{R}$ .

Il teorema dà informazioni sul valore di giochi continui, e i giochi matriciali non sono continui. Nonostante ciò, il teorema è nato pensando a giochi finiti.

## 9 Strategie Miste

Prendiamo un gioco finito  $\{N, S, \mu\}$  anche a più di 2 giocatori, con  $|S_i| = n_i$ .

**Definizione 13.** Le **Strategie Miste** per il giocatore  $i$  sono

$$\Delta_{S_i} := \left\{ \sigma : S_i \rightarrow [0, 1] : \sum_{x \in S_i} \sigma(x) = 1 \right\}$$

che si possono anche vedere come lo spazio simplettico dei vettori di probabilità (ossia a entrate nonnegative e a somma 1) in  $\mathbb{R}^{n_i}$ , che chiameremo anche  $\Delta_{n_i}$ . Denotiamo anche

$$\Delta := \prod_{i=1}^N \Delta_{S_i}.$$

Un elemento di  $\Delta$  è un vettore di funzioni, o una  $n$ -upla di vettori di probabilità di diverse dimensioni, dove  $n$  è il numero di giocatori, e lo indichiamo con  $\sigma$ . Come al solito,  $\sigma_{-i}$  sarà la collezione di tutti gli elementi di  $\sigma$  tranne  $\sigma_i$ . Chiamiamo anche

$$\pi_{-i} : S_{-i} \rightarrow [0, 1] \quad \pi_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) = \prod_{j \neq i} \sigma_j(x_j)$$

dove  $\mathbf{x} = [x_i, \mathbf{x}_{-i}]$ . Per calcolare l'utilità di una strategia mista, dobbiamo pensare che il giocatore  $i$  scelga la strategia  $x_i \in S_i$  con probabilità  $\sigma_i(x_i)$ . Dunque sarà

$$h_i(\sigma) := \sum_{\mathbf{x} \in S} \mu_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) \sigma_i(x_i) \pi_{-i}(\mathbf{x}_{-i})$$

e chiamiamo  $\mathbf{h}$  il vettore di queste funzioni. Chiamiamo  $r_i(\sigma_{-i})$  le risposte ottimali alle strategie miste  $\sigma_{-i}$ , che saranno in generale un sottoinsieme di  $\Delta_{n_i}$ .

**Definizione 14.** Dato un gioco finito  $\{N, S, \mu\}$ , allora la sua **Estensione in Strategie Miste** sarà

$$\{N, \Delta, \mathbf{h}\}$$

**Esercizio 6.** Le funzioni  $h_i$  sono multilineari sulle strategie miste, ossia

$$h_i(\lambda \sigma_j + (1 - \lambda) \sigma'_j, \sigma_{-j}) = \lambda h_i(\sigma_j, \sigma_{-j}) + (1 - \lambda) h_i(\sigma'_j, \sigma_{-j}) \quad \forall i, j$$

Prendiamo adesso un gioco finito a somma nulla a due giocatori, e la sua estensione in strategie miste. Abbiamo una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  del gioco. Scriviamo le utilità rispetto alle coppie di strategie miste  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ .  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  sono vettori di probabilità, e dato che il gioco è a somma nulla, avremo  $\mu_1 = -\mu_2$  e pertanto  $h_1 = -h_2$ .

$$h_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x} \in S} \mu_1(x_1, x_2) p_{x_1} q_{x_2} = \mathbf{p}^T A \mathbf{q}.$$

Il primo giocatore avrà  $\mathbf{p}^T A \mathbf{q}$  mentre il secondo  $-\mathbf{p}^T A \mathbf{q}$ , dunque consideriamo  $h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \mathbf{p}^T A \mathbf{q}$ . Notiamo che le ipotesi del teorema 3 sono rispettate.

### Esempio

► Nella morra cinese, la matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{p}^T A \mathbf{q} = q_1(p_2 - p_3) + q_2(p_3 - p_1) + q_3(p_1 - p_2).$$

Attuando una strategia di minmax, avremo

$$q_1(p_2 - p_3) + q_2(p_3 - p_1) + q_3(p_1 - p_2) \geq \min\{(p_2 - p_3), (p_3 - p_1), (p_1 - p_2)\}$$

$$w_1(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{q}} h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min\{(p_2 - p_3), (p_3 - p_1), (p_1 - p_2)\} \leq 0$$

$$\max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$$

e questo si raggiunge quando  $\mathbf{p} = \mathbf{e}/3$ , ossia ogni giocatore sceglie a caso tra le tre possibilità.

Ripetendo lo stesso ragionamento della Morra cinese in generale,

$$w_1(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{q}} h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} = \min_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^T A,$$

$$\max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^T A = \max_{\mathbf{p}} \max\{\mathbf{v} : \mathbf{v} \leq (\mathbf{p}^T A)_i, i = 1 : n_2\}.$$

Lo stesso ragionamento per il giocatore 2 porta a

$$\min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} A \mathbf{q} = \min_{\mathbf{q}} \min\{\mathbf{v} : \mathbf{v} \geq (A \mathbf{q})_i, i = 1 : n_1\}.$$

Questi sono problemi di programmazione lineare, e il teorema 3 ci dice che hanno lo stesso risultato. I due problemi sono uno il *duale* dell'altro, ossia si possono scrivere nella forma

$$(P) \max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \quad (D) \min\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} : \mathbf{y}^T A = \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0\}$$

Le due *regioni di ammissibilità* sono non vuote, dunque il *teorema di dualità forte* ci dice nuovamente che i risultati dei due problemi sono uguali. Questo redimostra il teorema 3 in caso di strategie miste.

**Esercizio 7.** Ogni estensione a strategie miste di un gioco finito a somma nulla a due giocatori ha un equilibrio di Nash.

22-3-18

Se  $\mathbf{p}^i \in \Delta_{n_i}$  sono visti come vettori di probabilità, allora la funzione  $h_i$  può anche essere riscritta come

$$h_i(\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^n) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_n=1}^{n_n} \mu_i(j_1, j_2, \dots, j_n) p_{j_1}^1 p_{j_2}^2 \dots p_{j_n}^n$$

da cui  $h_i$  è lineare in  $\mathbf{p}^j$  per ogni  $j$  (ossia le combinazioni convesse si comportano bene).

### Esempio

► Nella Battaglia dei Sessi

	partita	cinema
partita	2/1	0/0
cinema	0/0	1/2

e poniamo  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  i due vettori di probabilità, dove  $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$  e  $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$ . Le funzioni  $h_i$  sono

$$h_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2pq + (1 - p)(1 - q), \quad h_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = pq + 2(1 - p)(1 - q).$$

Questo non è un gioco a somma zero. Calcoliamo le funzioni di miglior risposta. Notiamo che

$$h_2 \leq \max\{p, 2(1-p)\}, \quad h_1 \leq \max\{2q, 1-q\}$$

dunque

$$r_2(\mathbf{p}) = \arg \max_{\mathbf{q}} \{h_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} = \begin{cases} (1, 0) & p > 2/3 \\ \text{qualsiasi} & p = 2/3 \\ (0, 1) & p < 2/3 \end{cases}$$

$$r_1(\mathbf{q}) = \arg \max_{\mathbf{p}} \{h_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} = \begin{cases} (1, 0) & q > 1/3 \\ \text{qualsiasi} & q = 1/3 \\ (0, 1) & q < 1/3 \end{cases}$$

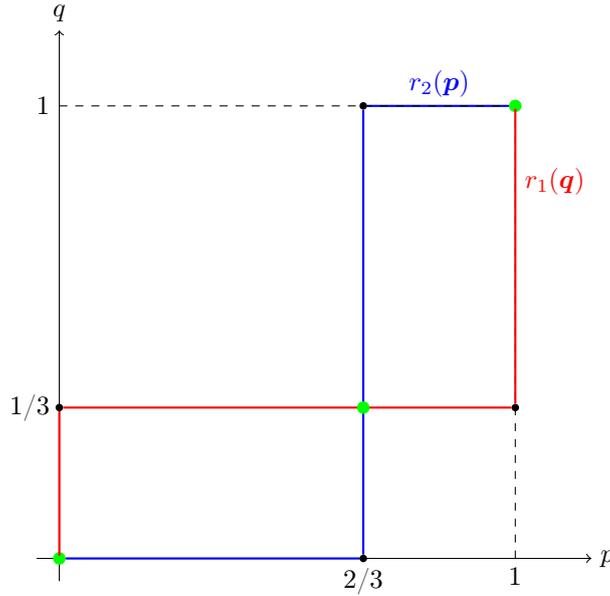


Figura 4: Grafico delle risposte  $r_1(\mathbf{q})$  e  $r_2(\mathbf{p})$ .

Gli equilibri del gioco originale  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$  sono restati equilibri, ed in più abbiamo anche l'equilibrio  $(2/3, 1/3)$ . Notiamo qua che le strategie non miste  $1, 0$  erano risposte ottimali a  $1/3$  per il secondo giocatore e a  $2/3$  per il primo. Questo non è casuale.

**Definizione 15.** Dato un giocatore  $i$ , le strategie miste che associano probabilità 1 ad una strategia  $s_i \in S_i$  e zero alle altre sono dette **Strategie Pure** associate agli  $s_i$ , e le indichiamo con  $\sigma_{s_i}$ .

**Lemma 5.** Se una strategia pura è un equilibrio di Nash nel gioco finito, allora è anche un equilibrio di Nash sulle strategie miste.

*Dimostrazione.* Dato  $\mathbf{s}^* \in S$  un equilibrio di Nash, abbiamo

$$\mu_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i \quad \forall i$$

Preso la strategia pura  $\sigma_{s_i^*}$  e una strategia mista  $\sigma_i \in \Delta_{S_i}$ , avremo

$$h_i(\sigma_i, \sigma_{\mathbf{s}_{-i}^*}) = \sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \sigma_i(s_i) \leq \sum_{s_i \in S_i} \mu_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \sigma_i(s_i) = \mu_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) = h_i(\sigma_{\mathbf{s}^*}).$$

□

**Lemma 6.** Una strategia mista  $\sigma^* \in \Delta$  è un equilibrio di Nash se e solo se per ogni giocatore  $i$  e per ogni strategia pura  $s \in S_i$  per cui  $\sigma_i^*(s) > 0$  abbiamo  $\sigma_s \in r_i(\sigma_{-i}^*)$ , ossia la strategia pura  $s$  è una risposta ottimale.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\sigma^*$  sia un equilibrio, e chiamiamo  $s_i \in S_i$  attiva se  $\sigma_i^*(s_i) > 0$ . Basta far vedere che  $h_i$  non cambia quando sostituiamo una strategia pura attiva alla mista per il giocatore  $i$ . Abbiamo

$$h_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu_i(s_i, s_{-i}) \pi_{-i}(s_{-i}) \sigma_i^*(s_i) = \sum_{s_i \in S_i} \theta(s_i) \sigma_i^*(s_i)$$

dove

$$\theta(s_i) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu_i(s_i, s_{-i}) \pi_{-i}(s_{-i}).$$

Dunque

$$h_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \leq \max_{\sigma_i^*(s_i) > 0} \theta(s_i) = \theta(\bar{s}_i) = h_i(\sigma_{\bar{s}_i}, \sigma_{-i}^*) \leq h_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*).$$

Questo ci dice che  $\theta(\bar{s}_i)$  è il valore dell'equilibrio  $\sigma^*$ . Ricordando che la somma degli  $\sigma_i^*(s)$  è 1, otteniamo che

$$h_i(\sigma^*) = \sum_{s_i \in S_i} \theta(s_i) \sigma_i^*(s_i) = \theta(\bar{s}_i) = \sum_{s_i \in S_i} \theta(\bar{s}_i) \sigma_i^*(s_i) \implies \sum_{s_i \in S_i} [\theta(\bar{s}_i) - \theta(s_i)] \sigma_i^*(s_i)$$

ma ogni addendo è nonnegativo poiché  $\theta(\bar{s}_i)$  è più grande dei  $\theta(s_i)$ , da cui ogni addendo deve annullarsi:

$$\sigma_i^*(s_i) > 0 \implies h_i(\sigma_{s_i}, \sigma_{-i}^*) = \theta(s_i) = \theta(\bar{s}_i) = h_i(\sigma^*)$$

e pertanto ogni strategia pura attiva è una risposta ottimale.

Viceversa, se tutte le pure attive sono ottime risposte a  $\sigma^*$ , allora devono avere lo stesso valore

$$\theta(s_i) = h_i(\sigma_{s_i}, \sigma_{-i}^*)$$

da cui

$$h_i(\sigma^*) = \sum_{\sigma_i^*(s_i) > 0} \theta(s_i) \sigma_i^*(s_i) = \theta(s_i) \geq h_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall \sigma_i$$

ossia  $\sigma^*$  è ottimale. □

## 10 Esistenza e Unicità di Equilibri

La mappa  $r : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  associa ad ogni strategia  $s$  il prodotto

$$r(s) = r_1(s_{-1}) \times r_2(s_{-2}) \times \cdots \times r_n(s_{-n})$$

dove i singoli pezzi possono essere insieme, anche vuoti. Un equilibrio di Nash è un *Punto Fisso* di  $R$ , o meglio

$$s^* \in r(s^*).$$

L'esistenza di un tale punto è dato dal teorema di Kakutani, ma bisogna sapere prima cosa sia una mappa chiusa riferito ad una *multifunzione*  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .

**Definizione 16.**  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  con  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **Chiusa** se il suo grafico

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in X \times X : y \in f(x)\}$$

è chiuso in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , ossia se  $f$  è "chiusa per successioni":

$$x_k \rightarrow x, \quad y_k \in f(x_k), \quad y_k \rightarrow y \implies y \in f(x).$$

**Teorema 4 (Kakutani).** Dato un sottoinsieme  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso compatto, consideriamo una multifunzione  $T : K \rightarrow \mathcal{P}(K)$  per cui  $T(x)$  è sempre non vuoto, convesso e chiuso. Se  $T$  è una mappa chiusa, allora ammette un punto fisso, ossia esiste  $x \in K$  per cui  $x \in T(x)$ .

(Senza Dimostrazione)

**Teorema 5** (N.Kaido-Isoda, 1955). *Supponiamo che per ogni  $1 \leq i \leq N$ ,*

- $S_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$  convesso compatto
- $\mu_i$  superiormente semicontinua
- $\mu_i(s_i, \cdot)$  inferiormente semicontinua per ogni  $s_i \in S_i$
- $r_i(\mathbf{s}_{-i})$  convesso per ogni  $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ .

Allora il gioco  $(N, S, \boldsymbol{\mu})$  ammette un equilibrio di Nash.

*Dimostrazione.* Notiamo che  $r(s)$  sono prodotti di convessi, dunque sono anche loro convessi, e sono non vuoti poiché  $r_i(\mathbf{s}_{-i})$  sono non vuoti, in quanto

$$r_i(\mathbf{s}_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} \{\mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})\}$$

ma il massimo esiste in quanto  $\mu_i$  è superiormente semicontinua (Weierstrass). Prendiamo  $x_k \in r_i(\mathbf{s}_{-i})$  e tali che  $x_k \rightarrow x$ . Ma allora

$$\begin{aligned} \mu_i(x_k, \mathbf{s}_{-i}) &\geq \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i \\ \implies \mu_i(x, \mathbf{s}_{-i}) &\geq \limsup_k \mu_i(x_k, \mathbf{s}_{-i}) \geq \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i \end{aligned}$$

per la semicontinuità superiore. Allora  $x \in r_i(\mathbf{s}_{-i})$  e l'insieme è pertanto chiuso.

Prendiamo  $x_k \in r_i(\mathbf{y}_k)$  con  $x_k \in S_i$  e  $\mathbf{y}_k \in S_{-i}$ , per cui  $x_k \rightarrow x$  e  $\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{y}$ . Sappiamo che

$$\begin{aligned} \mu_i(x_k, \mathbf{y}_k) &\geq \mu_i(s_i, \mathbf{y}_k) \quad \forall s_i \in S_i \\ \mu_i(x, \mathbf{y}) &\geq \limsup_k \mu_i(x_k, \mathbf{y}_k) \geq \limsup_k \mu_i(s_i, \mathbf{y}_k) \geq \liminf_k \mu_i(s_i, \mathbf{y}_k) \geq \mu_i(s_i, \mathbf{y}) \quad \forall s_i \in S_i \end{aligned}$$

per semicontinuità superiore e inferiore. Da ciò  $x \in r_i(\mathbf{y})$ , e pertanto  $r_i$  è una mappa chiusa, e anche  $r$  è chiusa. Applicando dunque Kakutani, trovo un punto fisso per  $r$ , e dunque un equilibrio di Nash.  $\square$

Nota: il Teorema 3 è un corollario di questo teorema.

**Corollario 1.** *Ogni estensione a strategie miste di un gioco finito ammette un equilibrio di Nash.*

*Dimostrazione.* Le funzioni  $h_i(\cdot, \boldsymbol{\sigma}_{-i})$  sono quasiconcave, dunque  $r_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i})$  è convesso, infatti se  $x, y \in r_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i})$  e  $\lambda \in [0, 1]$ , allora

$$h_i(\lambda x + (1 - \lambda)y, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) \geq \min\{h_i(x, \boldsymbol{\sigma}_{-i}), h_i(y, \boldsymbol{\sigma}_{-i})\} = h_i(x, \boldsymbol{\sigma}_{-i})$$

dunque anche  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in r_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i})$ . Applicando 5, otteniamo la tesi.  $\square$

E l'unicità?

23-3-18

---

### Esempio

- Prendiamo il gioco a due giocatori  $S_1 = S_2 = [0, 1]$  e  $\mu_1 = -s_1^2 + 2s_1s_2$ ,  $\mu_2 = -s_2^2 + 3s_1s_2$ . Le funzioni  $\mu_1, \mu_2$  sono parabole concave, e le funzioni di risposta sono

$$r_1(s_2) = s_2, \quad r_2(s_1) = \begin{cases} 3s_1/2 & 0 \leq s_1 \leq 2/3 \\ 1 & 2/3 \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

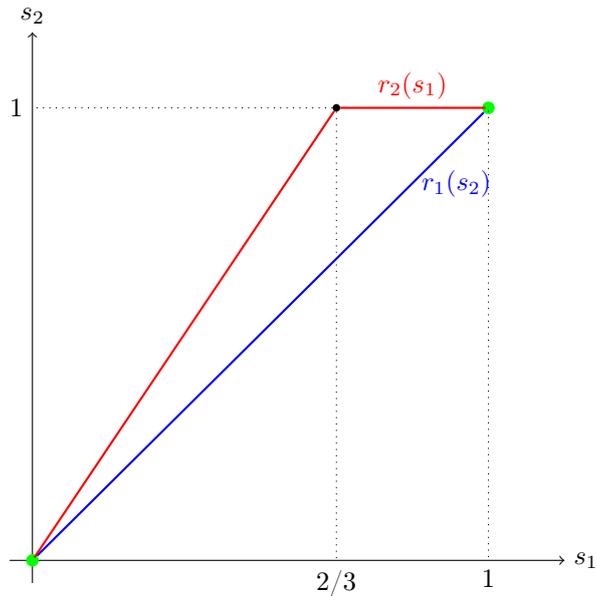


Figura 5: Grafico delle risposte  $r_1(s_2)$  e  $r_2(s_1)$ .

In questo caso  $r$  è una funzione e non una multifunzione, ed inoltre esistono due equilibri diversi.

Supponiamo  $r$  sia una funzione  $r : S \rightarrow S$  (e non una multifunzione). Sappiamo che gli equilibri sono tutti e soli i punti fissi. Alcuni richiami

- Ricordiamo che una *contrazione* è una funzione  $f$  per cui

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \rho \|x - y\|$$

con  $\rho < 1$ . Sappiamo che  $f$  ammette sempre un unico punto fisso se  $f : X \rightarrow X$  con  $X$  compatto.

- Una funzione  $f \in C^1$  è *strettamente concava* se e solo se

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (y - x) > 0 \quad \forall x \neq y \in \mathbb{R}^n$$

- Dato  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso, e  $f$  strettamente concava, allora

$$|\arg \max\{f(x) : x \in X\}| \leq 1$$

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *Fortemente Concava* di modulo  $\tau > 0$  se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \frac{\tau}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

- Dato  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso chiuso, e  $f$  fortemente concava con modulo  $\tau > 0$ , allora

$$|\arg \max\{f(x) : x \in X\}| = 1$$

- Una funzione  $f \in C^1$  è fortemente concava se e solo se

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (y - x) \geq \tau \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

**Esercizio 8.** Una funzione  $f$  è fortemente concava di modulo  $\tau$  se e solo se  $f + \frac{\tau}{2} \|\cdot\|^2$  è concava.

Tre risultati che useremo sono i seguenti.

**Lemma 7.** Una funzione  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g \in C^1$  è fortemente concava di modulo  $\tau$  se e solo se

$$g(y) \leq g(x) + \nabla g(x)^T (y - x) - \frac{\tau}{2} \|y - x\|^2 \quad \forall x, y.$$

*Dimostrazione.* Se vale la tesi, allora

$$g(y) \leq g(x) + \nabla g(x)^T(y-x) - \frac{\tau}{2}\|y-x\|^2 \quad g(x) \leq g(y) + \nabla g(y)^T(x-y) - \frac{\tau}{2}\|y-x\|^2$$

la cui somma è

$$0 \leq (\nabla g(x) - \nabla g(y))^T(y-x) - \tau\|y-x\|^2$$

e pertanto  $f$  è fortemente concava di modulo  $\tau$ .

Viceversa, usiamo la definizione di derivata direzionale, e notiamo che  $x + t(y-x) = (1-t)x + ty$ .

$$\begin{aligned} \nabla g(x)^T(y-x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + t(y-x)) - g(x)}{t} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t)g(x) + tg(y) + \frac{\tau}{2}(1-t)t\|x-y\|^2 - g(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} g(y) - g(x) + \frac{\tau}{2}(1-t)\|x-y\|^2 \\ &= g(y) - g(x) + \frac{\tau}{2}\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

□

**Lemma 8.** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un convesso chiuso,  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ , e  $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Supponiamo

- $g(\cdot, y)$  è fortemente concava di modulo  $\tau$
- $g \in C^1$  e  $\frac{d}{dx}g(x, y)$  Lipschitziana di modulo  $L$  in  $y$  per ogni  $x \in X$ .

Allora

$$z(y) := \arg \max\{g(x, y) : x \in X\}$$

è ben definito e

$$\|z(y_1) - z(y_2)\| \leq \frac{L}{\tau}\|y_1 - y_2\|.$$

**Lemma 9.**  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso chiuso,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  concava,  $f \in C^1$ . Allora

$$\bar{x} \in \arg \max\{f(x) : x \in X\}$$

se e solo se

$$\nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in X.$$

Torniamo ai giochi. Poniamo che  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$  sia fortemente concava di modulo  $\tau_i > 0$  indipendente da  $\mathbf{s}_{-i}$ . Poniamo inoltre che

$$\mu_i \in C^1, \quad \frac{d}{ds_i}\mu_i(s_i, \cdot) \text{ Lipschitz di modulo } L_i \quad \forall s_i \in S_i.$$

Per Lemma 8, abbiamo che

$$\begin{aligned} \|r(\mathbf{s}) - r(\mathbf{s}')\|^2 &= \sum_{i=1}^n \|r_i(\mathbf{s}_{-i}) - r_i(\mathbf{s}'_{-i})\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{L_i^2}{\tau_i^2} \|\mathbf{s}_{-i} - \mathbf{s}'_{-i}\|^2 \\ &\leq \max_i \frac{L_i^2}{\tau_i^2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{s}_{-i} - \mathbf{s}'_{-i}\|^2 = (n-1) \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|^2 \max_i \frac{L_i^2}{\tau_i^2} \end{aligned}$$

da cui  $r$  è una contrazione se

$$(n-1) \max_i \frac{L_i^2}{\tau_i^2} < 1.$$

**Definizione 17.** Dato un gioco  $G$  con  $\mu_i \in C^1$ , il gioco si dice **Strettamente Concavo in Diagonale** se

$$\sum_{i=1}^n (\nabla_i \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) - \nabla_i \mu_i(s'_i, \mathbf{s}'_{-i}))^T (s'_i - s_i) > 0 \quad \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{s}' \in S.$$

**Teorema 6** (Rosen, 1965). *Se un gioco  $G$  è strettamente concavo in diagonale, allora ammette al più un equilibrio di Nash.*

*Dimostrazione.* Dati due equilibri  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , allora, da Lemma 9,

$$\nabla_i \mu_i(x_i, \mathbf{x}_{-i})^T (s_i - x_i) \leq 0 \quad \forall s_i \in S_i, \quad \nabla_i \mu_i(y_i, \mathbf{y}_{-i})^T (s'_i - y_i) \leq 0 \quad \forall s'_i \in S_i.$$

Sommando tra loro e su tutti gli  $i$ , e sostituendo  $s'_i = x_i, s_i = y_i$  si ottiene che

$$\sum_{i=1}^n (\nabla_i \mu_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) - \nabla_i \mu_i(y_i, \mathbf{y}_{-i}))^T (y_i - x_i) \leq 0.$$

Applicando l'ipotesi si conclude che  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . □

Nota: se sostituisci  $\mu_i$  con  $t_i \mu_i$  e  $t_i > 0$ , allora gli equilibri non cambiano (perché non cambiano le risposte ottime), ma la condizione di strettamente concavo in diagonale viene cambiata. In particolare abbiamo più parametri con cui giostrarsi.

**Definizione 18.** *Se  $\mu_i \in C^2$  e  $S_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ , allora la funzione*

$$F(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \nabla_1 \mu_1(s_1, \mathbf{s}_{-1}) \\ \nabla_2 \mu_2(s_2, \mathbf{s}_{-2}) \\ \vdots \\ \nabla_n \mu_n(s_n, \mathbf{s}_{-n}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M \quad M = \sum_{i=1}^n n_i$$

*viene detta **Gradiente del Gioco**. La Jacobiana di  $F: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ .*

$$J_F(\mathbf{s}) = (\nabla_j \nabla_i \mu_i^T(\mathbf{s}))_{i,j}$$

*è una matrice  $\nabla_j \nabla_i \mu_i$  detta **Jacobiana del Gioco**.*

**Lemma 10.** *Se  $J_F(\mathbf{s}) + J_F(\mathbf{s})^T$  è definita negativa per ogni  $\mathbf{s} \in S$ , allora il gioco è strettamente concavo in diagonale.*

(Per la dimostrazione si usa il valor medio in forma integrale)

**Esercizio 9.** *Calcolare  $J_F$  per il gioco  $S_1 = S_2 = [0, 1]$  e  $\mu_1 = -s_1^2 + 2s_1 s_2$ ,  $\mu_2 = -s_2^2 + 3s_1 s_2$ . Vedere che non è mai strettamente concava in diagonale, neanche se sostituiamo  $\mu_i$  con multipli positivi  $t_i \mu_i$ .*

## 11 Strategie Dominanti e Dominate

**Definizione 19.**  $\bar{s}_i \in S_i$  si dice **Dominante** se

$$\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall s_i, \mathbf{s}_{-i}.$$

*Questa è **Strettamente Dominante** se vale con  $>$ .*

Se un giocatore avesse una strategia strettamente dominante, allora giocherebbe sempre quella, e due strategie dominanti hanno la stessa utilità per il giocatore  $i$ .

**Definizione 20.** *Il profilo di strategie  $\mathbf{s}$  si dice (strettamente) **Dominante** se ogni  $s_i$  è (strettamente) dominante per il giocatore  $i$ .*

Un profilo di strategie dominanti è un equilibrio di Nash, e un profilo strettamente dominante è l'unico equilibrio di Nash. I viceversa sono falsi.

**Esempio**

- Nel dilemma del prigioniero

	non conf	conf
non conf	-2/ -2	-7/0
conf	0/ -7	-5/ -5

il profilo (confesso,confesso) è strettamente dominante, e pertanto è l'unico equilibrio di Nash.

- Se lo altero in

	non conf	conf
non conf	-2/ -2	-7/0
conf	-3/ -7	-5/ -5

allora (confesso,confesso) non è neanche dominante, ma è comunque l'unico equilibrio di Nash.

**Definizione 21.**  $\bar{s}_i \in S_i$  si dice **Strettamente Dominata** se esiste  $s_i^* \in S_i$  per cui

$$\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) < \mu_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall \mathbf{s}_{-i}.$$

$\bar{s}_i \in S_i$  si dice **Debolmente Dominata** se esiste  $s_i^* \in S_i$  per cui

$$\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) \leq \mu_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall \mathbf{s}_{-i}$$

ed esiste un  $\mathbf{s}_{-i}^*$  per cui

$$\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}^*) < \mu_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*).$$

Notiamo che un giocatore non giocherà mai una strategia dominata. Questo ci suggerisce che per trovare un equilibrio, possiamo

- cercare strategie dominanti,
- eliminare strategie dominate,

ed iterare.

**Esempio**

- Prendiamo

	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	4/3	7/4	5/3	3/1
(2)	1/5	5/7	2/1	2/5
(3)	3/4	4/3	5/7	6/2

Per il primo giocatore, la strategia (riga)2 è dominata da (riga)1, e per il secondo (colonna)4 è dominata da (colonna)2, da cui si possono eliminare e si ottiene

	(1)	(2)	(3)
(1)	4/3	7/4	5/3
(3)	3/4	4/3	5/7

Adesso (riga)3 è dominata da (riga)1, e (colonna)1 è dominata da (colonna)3, dunque

	(2)	(3)
(1)	7/4	5/3

Qua si conclude che i giocatori giocano (riga)1,(colonna)2. Andando a verificare, effettivamente è un equilibrio. Notiamo però che anche (3,3) è un equilibrio di Nash, che non abbiamo identificato dall'algoritmo.

**Esercizio 10.** Costruire un gioco a 2 giocatori di questo tipo in cui questo algoritmo non si riduce mai ad una sola strategia (Morra Cinese?)

Formalizziamo la strategia di eliminazione successiva di strategie applicata sopra:

**Algoritmo 1** (Algoritmo Eliminazione Dominate).

1. Poniamo  $S_i^0 := S_i$  per ogni giocatore  $i$ . Poniamo  $k = 0$ .

2. Definiamo il  $k$ -esimo gioco  $G^k$  come

$$G^k := (N, \{S_i^k\}_{i \in N}, \mu)$$

3. Aggiorniamo gli  $S_i^k$  eliminando le strategie dominate ad ogni passo

$$S_i^{k+1} := \{x \in S_i^k : x \text{ non dominata in } S_i^k\}$$

4. Dato  $S^{k+1} = \prod_{i \in N} S_i^{k+1}$ , se  $|S^{k+1}| \leq 1$ , allora termina.

5.  $k = k + 1$  e torniamo a 2.

In questo algoritmo, non abbiamo specificato se vogliamo togliere le strategie debolmente o strettamente dominate. Vorremo sapere se alla fine ci rimangono equilibri di Nash, e quanti ce ne restano. La prima cosa che possiamo notare è che se gli  $S_i$  sono non vuoti, allora ad ogni passo gli  $S_i^k$  non possono essere vuoti, perché due strategie  $s_i^*$ ,  $\bar{s}_i$  non possono essere dominate l'una dall'altra.

**Definizione 22.** Un gioco  $G' = (N, \{T_i\}_i, \mu)$  è detto **Restrizione** di  $G = (N, \{S_i\}_i, \mu)$  con  $\emptyset \neq T_i \subseteq S_i$  per ogni  $i$ .

L'algoritmo ritorna dunque un gioco  $G'$  che è restrizione dell'originale  $G$ .

**Lemma 11.** Sia  $G' = (N, \{T_i\}_i, \mu)$  la restrizione di  $G = (N, \{S_i\}_i, \mu)$  ottenuta eliminando una sola volta le strategie strettamente dominate. Allora

- Se  $\mathbf{s}^* \in S$  è un equilibrio per  $G$ , allora  $\mathbf{s}^*$  appartiene a  $T = \prod_i T_i$  ed è un equilibrio per  $G'$
- Se  $G$  è finito, e  $\mathbf{s}^* \in T$  è un equilibrio per  $G'$ , allora  $\mathbf{s}^*$  è pure un equilibrio per  $G$

*Dimostrazione.* Notiamo che se  $\mathbf{s}^* \in T$ , allora è ovvio che sia un equilibrio per  $G'$ . Se per assurdo  $s_i^* \notin T_i$ , allora era strettamente dominata da un  $\bar{s}_i$ , e ciò vuol dire che  $\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}^*) > \mu_i(\mathbf{s}^*)$ , da cui  $\mathbf{s}^*$  non può essere un equilibrio, assurdo.

Se per assurdo  $\mathbf{s}^*$  non fosse un equilibrio di  $G$ , allora esisterebbe un giocatore  $i$  e una strategia  $\bar{s}_i \in S_i$  per cui  $\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}^*) > \mu_i(\mathbf{s}^*)$ . Dato che  $\mathbf{s}^*$  è un equilibrio in  $G'$ , allora  $\bar{s}_i$  è strettamente dominata da un'altra strategia  $s_i$ , e possiamo prendere  $s_i \in T_i$  per transitività della relazione di dominanza. Ma allora, ricordandoci che  $\mathbf{s}^*$  è equilibrio in  $T$ ,

$$\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}^*) < \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \leq \mu_i(\mathbf{s}^*)$$

assurdo. □

Notiamo che se al posto di  $G$  finito poniamo che gli  $S_i$  siano compatti, e che le  $\mu_i$  siano semicontinue superiori, allora il secondo punto della tesi non cambia.

Inoltre, se eliminiamo le debolmente dominate al posto delle strettamente dominate, il secondo punto del lemma vale ancora, mentre il primo no.

Dato che l'algoritmo ripete l'operazione del lemma molte volte, otteniamo che

- Eliminando le strategie strettamente dominate, il gioco ristretto finale contiene esattamente gli stessi equilibri del gioco iniziale
- Eliminando le strategie debolmente dominate, gli equilibri del gioco ristretto finale sono equilibri del gioco iniziale, ma si possono perdere equilibri.

## Esempio

► Prendiamo

	(1)	(2)	(3)
(1)	1/ - 1	-1/1	-1/ - 1
(2)	-1/1	1/ - 1	-1/ - 1
(3)	-1/ - 1	-1/ - 1	-1/ - 1

Non ci sono strategie fortemente dominate, mentre la terza riga e la terza colonna sono entrambe debolmente dominate. L'unico equilibrio però è il profilo di strategie (3, 3), che viene eliminato al primo passo dell'algoritmo. Il gioco ridotto non presenta equilibri.

Ci possono anche essere giochi con equilibri senza però strategie debolmente dominate.

### Esempio

►

	(1)	(2)
(1)	2/1	0/0
(2)	0/1	2/0
(3)	1/1	1/2

Qui l'algoritmo non modifica il gioco, ma (1, 1) è un equilibrio. In questo gioco, il primo giocatore non ha motivo di giocare la strategia della terza riga, nonostante non sia dominata.

**Definizione 23.** Una strategia  $s_i \in S_i$  si dice **Mai Miglior Risposta (MMR)** se per ogni  $s_{-i}$  si ha  $s_i \notin r_i(s_{-i})$ .

Una strategia strettamente dominata, per esempio, è sempre una MMR. Possiamo quindi analizzare l'algoritmo, dove al posto di eliminare le strettamente dominate, eliminiamo le MMR.

Si può notare che entrambi i punti del Lemma 11 valgono ancora, dunque è un altro metodo per restringere il gioco.

## 12 Miglior Risposte

Un'altra classe di algoritmi cerca gli equilibri saltando da una strategia ad una "migliore" seguendo un certo criterio. Ricordiamo che la multifunzione di miglior risposta  $r : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  è definita come

$$r(s) = r_1(s_{-1}) \times r_2(s_{-2}) \times \dots \times r_n(s_{-n})$$

e gli equilibri sono tutti e soli i punti fissi di  $R$ .

**Algoritmo 2** (Migliori Risposte Successive).

1. Iniziamo da un profilo  $s^0 \in S$  casuale, e poniamo  $k = 0$
2. Scegliamo un  $s^{k+1} \in r(s^k)$
3. Se  $s^{k+1} = s^k$  ci fermiamo
4. Poniamo  $k = k + 1$  e torniamo a 2.

**Warning:** nello step 2, aggiungiamo la condizione "se  $s^k \in r(s^k)$ , allora ci fermiamo", poiché altrimenti si potrebbe ciclare tra equilibri.

Se  $r$  è una contrazione, allora questo algoritmo converge.

### Esempio

► Prendiamo il dilemma del prigioniero

	non conf	conf
non conf	-2/-2	-7/0
conf	0/-7	-5/-5

In questo caso,  $r$  è sempre una funzione, e l'albero dell'algoritmo è

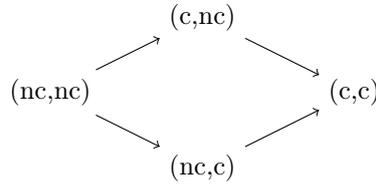


Figura 6: Grafico dell'algoritmo MRS sul dilemma del prigioniero.

Quindi l'algoritmo MRS converge all'equilibrio.

► Invece, sulla battaglia dei sessi

	partita	cinema
partita	2/1	0/0
cinema	0/0	1/2

l'algoritmo si spezza in tre loop:

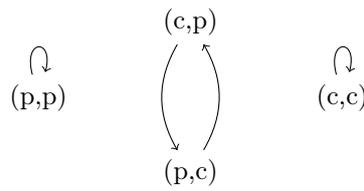


Figura 7: Grafico dell'algoritmo MRS sulla battaglia dei sessi.

dunque se non parti da un equilibrio, non arriverai mai ad un equilibrio.

Un altro algoritmo aggiorna le strategie una componente alla volta:

**Algoritmo 3** (MRS Asincrono).

1. Iniziamo da un profilo  $\mathbf{s}^0 \in S$  casuale, e poniamo  $k = 0$

2. Ordinatamente rispetto a  $i = 1, \dots, n$ , scegliamo

$$s_i^{k+1} \in r_i(s_1^{k+1}, \dots, s_{i-1}^{k+1}, s_{i+1}^k, \dots, s_n^k)$$

3. Se  $\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k$  ci fermiamo

4. Poniamo  $k = k + 1$  e torniamo a 2.

**Warning:** nello step 2, aggiungiamo la condizione "se  $s_i^k \in r_i(s_1^{k+1}, \dots, s_{i-1}^{k+1}, s_{i+1}^k, \dots, s_n^k)$ , allora  $s_i^{k+1} = s_i^k$ ", in modo da aumentare ad ogni ciclo la funzione utilità (questo dettaglio servirà solo per il Teorema 7).

**Esempio**

► Ritornando alla battaglia dei sessi

	partita	cinema
partita	2/1	0/0
cinema	0/0	1/2

stavolta l'algoritmo asincrono MRS converge agli equilibri:

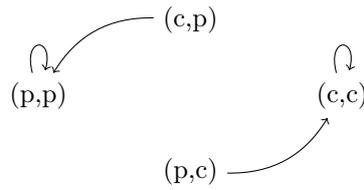


Figura 8: Grafico dell'algoritmo MRS sulla battaglia dei sessi.

Notiamo inoltre che se l'ordine dei giocatori viene cambiato, anche l'output dell'algoritmo cambia, ma comunque converge ad equilibri.

- Se invece analizziamo il gioco a strategie miste della battaglia dei sessi, con i due algoritmi MRS e Asincrono, otteniamo

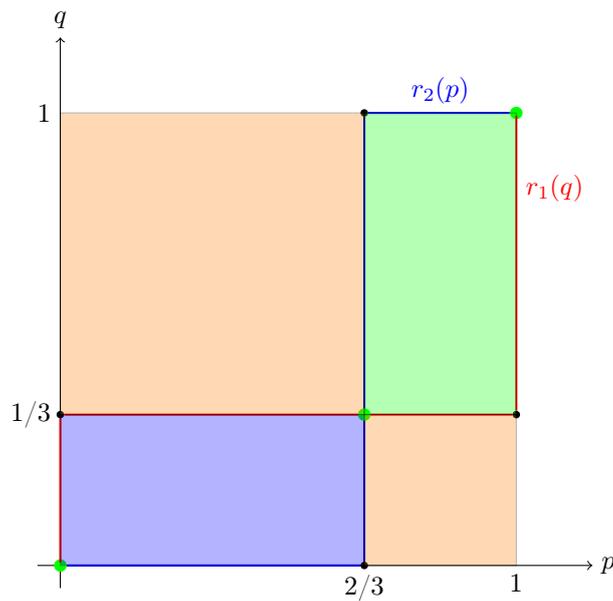


Figura 9: Grafico delle risposte  $r_1(q)$  e  $r_2(p)$  e aree per l'algoritmo RMS.

L'algoritmo MRS, se parte da un punto  $(p, q)$  nelle aree rosa, ciclerà tra  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ , emulando il ciclo che avevamo già nel gioco originale. Se parte dall'area verde finisce sull'equilibrio  $(1, 1)$ , mentre se parte dall'area blu arriva all'equilibrio  $(0, 0)$ . Nel caso in cui il punto iniziale stia sulla retta  $p = 2/3$  o sulla retta  $q = 1/3$ , allora l'andamento è incerto poiché  $R$  è una multifunzione, ma quasi certamente ricadrà in uno dei tre casi precedenti, anche partendo dall'equilibrio  $(1/3, 2/3)$ .

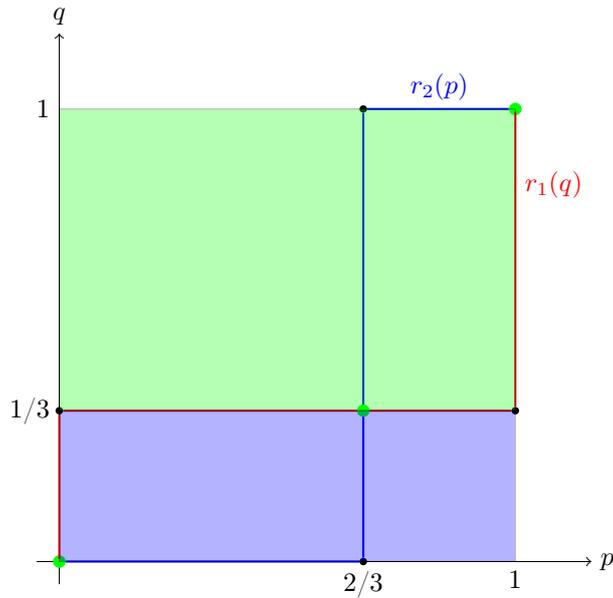


Figura 10: Grafico delle risposte  $r_1(q)$  e  $r_2(p)$  e aree per l'algoritmo Asincrono RMS.

L'algoritmo asincrono MRS, invece, non cicla con probabilità 1. Se si parte dall'area verde, converge a  $(1, 1)$ , mentre se parte dall'area blu, converge a  $(0, 0)$ .

Notiamo che se il gioco è finito, allora questi due algoritmi devono necessariamente ciclare o convergere ad un equilibrio. Se non è finito, può ancora ciclare, ma si ha il seguente risultato:

**Lemma 12.** *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  chiuso, e poniamo che le funzioni  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$  siano continue per ogni  $i$ . Se RMS o RMS Asincrono genera una sequenza infinita  $\{\mathbf{s}^k\}$  che converge a  $\mathbf{s}^*$ , allora  $\mathbf{s}^*$  è un equilibrio.*

*Dimostrazione.* Dimostriamolo per RMS, e l'altro è simile. Sappiamo che  $\mu_i(s_i^{k+1}, \mathbf{s}_{-i}^k) \geq \mu_i(s_i^k, \mathbf{s}_{-i}^k)$  per ogni  $s \in S_i$ , e passando al limite  $\mu_i(s_i^*) \geq \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*)$  per ogni  $s \in S_i$  e per ogni  $i$ , da cui  $\mathbf{s}^*$  è un equilibrio.  $\square$

6-4-18

### Esempio

- Portiamo come ulteriore esempio il Duopolio di Cournot.

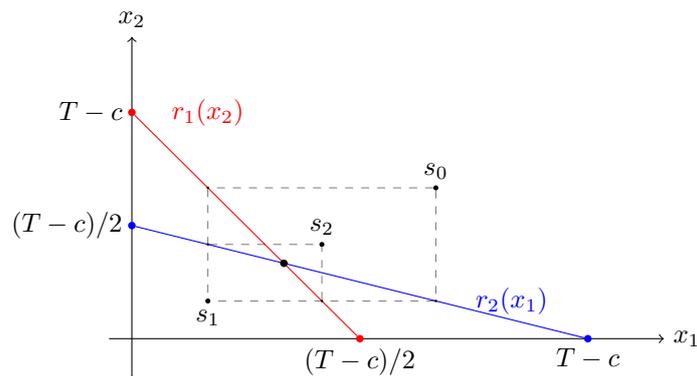


Figura 11: Grafico delle risposte  $r_1(x_2)$  e  $r_2(x_1)$ , e primi tre passi del metodo MRS

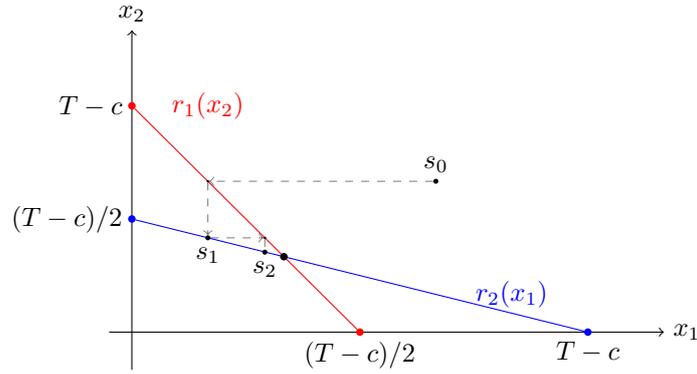


Figura 12: Grafico delle risposte  $r_1(x_2)$  e  $r_2(x_1)$ , e primi tre passi del metodo MRS Asincrono

Possiamo notare che il metodo asincrono è più veloce. Inoltre, in questo caso, entrambi gli algoritmi convergono.

### 13 Giochi Potenziali

**Definizione 24.** Dato un gioco  $G$ , una funzione  $P : S \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **Potenziale esatto** se

$$\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) - \mu_i(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) = P(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) - P(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall i, \quad \forall \hat{s}_i, \bar{s}_i \in S_i, \quad \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}.$$

Se tale funzione esiste, allora  $G$  viene chiamato **Gioco Potenziale**.

Possiamo notare che se  $P$  è un potenziale, anche  $P + a$  è un potenziale, ossia è definito a meno di costanti. In realtà, se  $P, Q$  sono due potenziali dello stesso gioco, vale anche che  $P - Q$  è costante.

**Lemma 13.** Dato un gioco  $G$  con  $S_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$  convessi chiusi, e con funzioni di utilità  $C^1(S)$ , allora presa una funzione  $P \in C^1(S)$ , questa è un potenziale esatto per  $G$  se e solo se

$$\nabla_i \mu_i \equiv \nabla_i P \quad \forall i \in N.$$

*Dimostrazione.* Usiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} P(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) - P(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) &= \int_0^1 \nabla_i P(\hat{s}_i + t(\bar{s}_i - \hat{s}_i), \mathbf{s}_{-i})^T (\bar{s}_i - \hat{s}_i) dt \\ \mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) - \mu_i(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) &= \int_0^1 \nabla_i \mu_i(\hat{s}_i + t(\bar{s}_i - \hat{s}_i), \mathbf{s}_{-i})^T (\bar{s}_i - \hat{s}_i) dt \end{aligned}$$

Se  $P$  è un potenziale, i membri sinistri delle due espressioni sono uguali, e ciò porta all'uguaglianza dei gradienti. Viceversa, se i gradienti sono uguali, allora  $P$  è un potenziale.  $\square$

La battaglia dei sessi e il duopolio di Cournot sono entrambi giochi potenziali.

**Esempio**

- nella battaglia dei sessi,

$$\begin{array}{c|cc} & \text{partita} & \text{cinema} \\ \hline \text{partita} & 2/1 & 0/0 \\ \hline \text{cinema} & 0/0 & 1/2 \end{array} \rightarrow P = \begin{array}{c|cc} & \text{partita} & \text{cinema} \\ \hline \text{partita} & 1 & 0 \\ \hline \text{cinema} & -1 & 1 \end{array}$$

- Nel caso del duopolio, ricordiamo che

$$\mu_i(x_1, x_2) = x_i(T - x_1 - x_2) - cx_i.$$

e pertanto  $\nabla_i \mu_i(x_1, x_2) = T - x_1 - x_2 - x_i - c$ . Una funzione che ha questi gradienti è

$$P(x_1, x_2) = (T - c)(x_1 + x_2) - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2.$$

**Lemma 14.** *I massimi della funzione potenziale sono equilibri.*

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{s}^*$  è un massimo di  $P$ , allora preso un  $i$  e un  $s_i \in S_i$ , avremo

$$\mu_i(\mathbf{s}^*) - \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) = P(\mathbf{s}^*) - P(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq 0$$

da cui  $\mathbf{s}^*$  è un equilibrio. □

Il viceversa non vale, ossia non tutti gli equilibri sono massimi del potenziale.

### Esempio

► Il gioco potenziale

$$\begin{array}{c|cc} & (1) & (2) \\ \hline (1) & 3/2 & 0/0 \\ \hline (2) & 0/0 & 1/2 \end{array} \longrightarrow P = \begin{array}{c|cc} & (1) & (2) \\ \hline (1) & 2 & 0 \\ \hline (2) & -1 & 1 \end{array}$$

ha come equilibri le due strategie coordinate, ma solo una delle due è un massimo globale.

**Definizione 25.** Una funzione  $P : S \rightarrow \mathbb{R}$  per un gioco  $G$  è un **Potenziale Ordinale** se

$$\mu_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) - \mu_i(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) > 0 \iff P(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) - P(\hat{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) > 0 \quad \forall i, \quad \forall \hat{s}_i, \bar{s}_i \in S_i, \quad \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}.$$

Si può verificare che il Lemma 14 continua a valere anche per questi tipo di giochi. Inoltre esistono giochi che ammettono questo tipo di potenziale, pur non essendo giochi potenziali.

### Esempio

► Un esempio è

$$\begin{array}{c|cc} & (1) & (2) \\ \hline (1) & 1/1 & 2/3 \\ \hline (2) & 2/1 & 3/2 \end{array} \longrightarrow P = \begin{array}{c|cc} & (1) & (2) \\ \hline (1) & 1 & 2 \\ \hline (2) & 2 & 3 \end{array}$$

► Un altro esempio è l'**oligopolio di Cournot**, che è simile al duopolio, ma con  $n > 2$  giocatori. In questo caso,

$$\mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) = s_i \rho \left( \sum_j s_j \right) - c s_i.$$

dove  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione qualunque, e  $S_i = (0, +\infty)$  per ogni  $i$ . Un potenziale ordinale è

$$P(\mathbf{s}) = \left( \rho \left( \sum_j s_j \right) - c \right) \prod_i s_i.$$

Difatti

$$\mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) - \mu_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) = s_i \rho \left( \sum_i s_i \right) - s_i^* \rho \left( s_i^* + \sum_{j \neq i} s_j \right) - c(s_i - s_i^*).$$

$$P(s_i, \mathbf{s}_{-i}) - P(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) = \left[ s_i \rho \left( \sum_i s_i \right) - s_i^* \rho \left( s_i^* + \sum_{j \neq i} s_j \right) - c(s_i - s_i^*) \right] \prod_{j \neq i} s_j.$$

e dato che  $s_j > 0$  per ogni  $j$ , avremo che le due quantità hanno lo stesso segno.

**Teorema 7.** *Sia  $G$  un gioco finito con potenziale ordinale o esatto. Allora l'algoritmo MRS Asincrono individua un equilibrio in un numero finito di mosse.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che se l'algoritmo termina, allora ha trovato un equilibrio. Ad ogni step 2. dell'algoritmo

$$s_i^{k+1} \in r_i(s_1^{k+1}, \dots, s_{i-1}^{k+1}, s_{i+1}^k, \dots, s_n^k)$$

la funzione utilità aumenta se  $s_i^{k+1} \neq s_i^k$ , altrimenti rimane uguale. Dato che stiamo cambiando una variabile alla volta, avremo che anche  $P$  rimarrà costante o aumenterà in relazione a  $\mu_i$ . Da ciò

$$P(\mathbf{s}^k) \leq P(s_1^{k+1}, s_2^k, \dots, s_n^k) \leq \dots \leq P(s_1^{k+1}, \dots, s_{n-1}^{k+1}, s_n^k) \leq P(\mathbf{s}^{k+1}),$$

ma se  $\mathbf{s}^{k+1} \neq \mathbf{s}^k$ , allora una delle disuguaglianze è stretta.  $P$  dunque aumenta strettamente ad ogni ciclo dell'algoritmo, ma dato che  $S$  è finito, allora  $P$  può assumere finiti valori, da cui il gioco non può entrare in un ciclo e deve terminare.  $\square$

12-4-18

## 14 Algoritmi del Gradiente

### 14.1 Disuguaglianza Variazionale

Ricordiamo le caratterizzazioni di massimi per funzioni  $f \in C^1$  su  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso e chiuso. Sappiamo che

$$\bar{\mathbf{x}} \text{ massimo locale di } f \iff \nabla f(\bar{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X$$

e se  $f$  è concava, il Lemma 9 ci dice che il massimo è globale e unico. Prendiamo dunque  $G$  un gioco con  $S_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  convessi e chiusi,  $\mu_i \in C^1$ , e ricordiamo che il *Gradiente del Gioco* è dato da

$$F(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} -\nabla_1 \mu_1(s_1, \mathbf{s}_{-1}) \\ -\nabla_2 \mu_2(s_2, \mathbf{s}_{-2}) \\ \vdots \\ -\nabla_n \mu_n(s_n, \mathbf{s}_{-n}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M \quad M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

D'ora in poi ci riferiremo al problema

$$F(\mathbf{x})^T(\mathbf{s} - \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S \tag{VI}$$

come **Disuguaglianza Variazionale** o (VI).

**Teorema 8.** *Dato un gioco  $G = (N, S, \boldsymbol{\mu})$  con  $S_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  convessi e chiusi e  $\mu_i \in C^1$  per ogni  $i$ , allora*

1. *Se  $\mathbf{s}^*$  è un equilibrio, allora risolve (VI)*
2. *Se le  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$  sono concave per ogni  $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$  e ogni  $i$ , allora*

$$\mathbf{s}^* \text{ risolve (VI)} \implies \mathbf{s}^* \text{ è un equilibrio}$$

*Dimostrazione.* Poniamo che  $\mathbf{s}^*$  sia un equilibrio. Allora è un massimo di  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i}^*)$  per ogni  $i$ , da cui

$$\nabla_i \mu_i(\mathbf{s}^*)(s_i - s_i^*) \leq 0 \quad \forall s_i \in S_i \implies F(\mathbf{s}^*)^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S.$$

Viceversa, se le  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i}^*)$  sono concave, prendiamo  $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i}^*)$ , e otteniamo

$$F(\mathbf{s}^*)^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}^*) = -\nabla_i \mu_i(\mathbf{s}^*)(s_i - s_i^*) \geq 0 \quad \forall s_i \in S_i \implies \nabla_i \mu_i(\mathbf{s}^*)(s_i - s_i^*) \leq 0 \quad \forall s_i \in S_i$$

da cui  $s_i^*$  è l'unico massimo di  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i}^*)$ . Dato che vale per ogni  $i$ , allora  $\mathbf{s}^*$  è un equilibrio.  $\square$

## 14.2 Metodo di Proiezione

Ricordiamo che su  $\mathbb{R}^n$  (e in generale su spazi di Hilbert), la proiezione  $P_S$  su un chiuso convesso  $S$  è definita come

$$P_S(\mathbf{y}) = \arg \min\{\|\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2 : \mathbf{s} \in S\}$$

e dato che la norma quadra è fortemente convessa, esiste un'unica proiezione. In questo caso abbiamo anche la definizione equivalente

$$\mathbf{z} \in P_S(\mathbf{y}) \iff (\mathbf{y} - \mathbf{z})^T(\mathbf{s} - \mathbf{z}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S.$$

Ricordiamo anche che la proiezione è Lipschitz con costante 1, ovvero

$$\|P_S(\mathbf{y}) - P_S(\mathbf{z})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$$

anche detta *Non Espansiva*. Notiamo che, preso un  $t > 0$ ,

$$\bar{\mathbf{s}} \in P_S(\bar{\mathbf{s}} - tF(\bar{\mathbf{s}})) \iff \bar{\mathbf{s}} \text{ risolve (VI)}$$

e ciò ci dice che  $\bar{\mathbf{s}}$  è un equilibrio sotto le giuste ipotesi su  $\mu_i$  e  $S_i$  date dal Teorema 8. Intuitivamente, se ci muoviamo lungo il gradiente, le nostre utilità crescono, ma se ci troviamo già in un equilibrio, vuol dire che stiamo uscendo da  $S$ , e la proiezione del nuovo punto ci riporta sull'equilibrio.

Inoltre, questo ci dice che vogliamo cercare i punti fissi della mappa  $\psi$  definita come

$$\psi(\mathbf{s}) := P_S(\mathbf{s} - tF(\mathbf{s}))$$

che esisterebbero sicuramente se  $\psi$  fosse una contrazione. Questo ci porta al seguente algoritmo:

### Algoritmo 4 (Proiezione).

1. Fissiamo  $t > 0$ ,  $\mathbf{s}^0 \in S$ ,  $k = 0$
2. Generiamo  $\mathbf{s}^{k+1} = P_S(\mathbf{s}^k - tF(\mathbf{s}^k))$
3. Se  $\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k$  ci fermiamo
4. Poniamo  $k = k + 1$  e torniamo a 2.

Ricordiamo che stiamo ancora lavorando sotto ipotesi di convessità e chiusura degli  $S_i$ , e sotto concavità di  $\mu_i$ .

**Teorema 9.** *Supponiamo che*

- $F$  sia Lipschitziana di modulo  $L$  su  $S$
- $F$  sia fortemente monotona di modulo  $\tau > 0$  su  $S$ , cioè

$$(F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}'))^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \geq \tau\|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|^2 \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S$$

Se  $t < 2\tau/L^2$  allora  $\mathbf{s}^k$  generati dall'algoritmo di proiezione convergono all'unico equilibrio del gioco.

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che sotto queste ipotesi  $\psi$  è una contrazione. Presi  $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \|P_S(\mathbf{s} - tF(\mathbf{s})) - P_S(\mathbf{s}' - tF(\mathbf{s}'))\|^2 &\leq \|\mathbf{s} - \mathbf{s}' - t(F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}'))\|^2 \\ &= \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|^2 + t^2\|F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}')\|^2 - 2t(F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}'))^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \\ &\leq (1 + t^2L^2 - 2t\tau)\|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|^2 < \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|^2. \end{aligned}$$

□

Notiamo che la proiezione  $P_S$  su  $S$  è il prodotto delle proiezioni

$$P_S(\mathbf{x}) = P_{S_1}(x_1) \times P_{S_2}(x_2) \times \cdots \times P_{S_n}(x_n)$$

dunque lo step 2. dell'algoritmo di Proiezione si scrive in componenti come

$$s_i^{k+1} = P_{S_i}(s_i^k + t\nabla_i(s_i^k, \mathbf{s}_{-i}^k)) \quad \forall i.$$

Questo non è altro che un algoritmo del gradiente proiettato con passo costante  $t$ . In generale, sappiamo che

**Lemma 15.** *Il gradiente proiettato applicato ad una funzione  $f$  differenziabile con  $\nabla f$  Lipschitz di modulo  $L < 2/t$  converge ad un massimo globale di  $f$ .*

Notiamo che se una funzione  $F$  è sia  $L$  Lipschitz che  $\tau$  fortemente monotona, allora

$$L\|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\| \geq \|F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}')\| = \frac{\|F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}')\| \cdot \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|}{\|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|} \geq \frac{|(F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}'))^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}')|}{\|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|} \geq \tau\|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|$$

da cui

$$L \geq \tau \implies \frac{2\tau}{L^2} \leq \frac{2}{L}$$

e ciò dimostra di nuovo il Teorema 9, poiché  $t < 2\tau/L^2 \implies t < 2/L \implies L < 2/t$ . Le ipotesi si possono comunque ancora modificare.

- Invece di richiedere  $F$  Lipschitz di modulo  $L$ , possiamo richiedere che le  $\nabla_i \mu_i$  siano Lipschitz di modulo  $L_i$ , e ottenere che  $F$  è Lipschitz di modulo  $\sqrt{\sum_i L_i^2}$ :

$$\|F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}')\|^2 = \sum_i \|\nabla_i \mu_i(\mathbf{s}) - \nabla_i \mu_i(\mathbf{s}')\|^2 \leq \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|^2 \sum_i L_i^2$$

- La forte monotonia si riscrive in componenti come

$$\tau\|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|^2 \leq (F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}'))^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}') = \sum_i (\nabla_i \mu_i(\mathbf{s}') - \nabla_i \mu_i(\mathbf{s}))(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_i).$$

Sotto questa ipotesi, il gioco viene detto **Fortemente Concavo in Diagonale** e implica in particolare che tutte le  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$  sono fortemente concave  $\forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$  e per ogni  $i$ . Il viceversa non vale.

Ricordiamo che per Definizione 17, un gioco fortemente concavo in diagonale è anche strettamente concavo in diagonale. una variante di Lemma 10 è che se  $J_F(\mathbf{s}) + J_F(\mathbf{s})^T$  è definita negativa per ogni  $\mathbf{s}$ , e il massimo autovalore è  $-\tau < 0$ , allora il gioco è fortemente concavo in diagonale di modulo  $\tau$ .

### 14.3 Extragradiente

Indeboliamo le ipotesi, e formuliamo un altro algoritmo

**Algoritmo 5** (Extragradiente).

1. Fissiamo  $t > 0$ ,  $\mathbf{s}^0 \in S$ ,  $k = 0$
2.  $\hat{\mathbf{s}}^k = P_S(\mathbf{s}^k - tF(\mathbf{s}^k))$
3. Se  $\hat{\mathbf{s}}^k = \mathbf{s}^k$  fermiamo l'algoritmo
4.  $\mathbf{s}^{k+1} = P_S(\mathbf{s}^k - tF(\hat{\mathbf{s}}^k))$
5. Poniamo  $k = k + 1$  e torniamo allo step 2.

Togliendo le ipotesi di concavità e compattezza/chiusura, possiamo avere più di un equilibrio, e più di una soluzione di  $F(\mathbf{x})^T(\mathbf{s} - \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S$ . Per dimostrare un risultato di convergenza per questo algoritmo, abbiamo bisogno di un po' di lemmi.

**Teorema 10.** *Se  $F$  continua e  $S$  compatto, allora (VI) ammette almeno una soluzione.*

*Dimostrazione.* la mappa  $\psi$  è continua e manda  $S$  in  $S$ , dunque per il teorema di punto fisso di Brouwer, esiste un punto fisso, che coincide con una soluzione dell'equazione.  $\square$

**Lemma 16** (Minty). *Se  $F$  è monotona, allora*

$$F(\bar{\mathbf{s}})^T(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S \implies F(\mathbf{s})^T(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S$$

*Dimostrazione.*

$$F(\mathbf{s})^T(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) \geq F(\bar{\mathbf{s}})^T(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) \geq 0$$

□

**Lemma 17.** *Dato  $t > 0$ , allora*

$$P_S(\mathbf{s} - tF(\hat{\mathbf{s}})) = \arg \min_{\mathbf{y} \in S} \left\{ F(\hat{\mathbf{s}})^T(\mathbf{y} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2t} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2 \right\}$$

*Dimostrazione.*

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{s} + tF(\hat{\mathbf{s}})\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2 + 2tF(\hat{\mathbf{s}})^T(\mathbf{y} - \mathbf{s}) + t^2\|F(\hat{\mathbf{s}})\|^2$$

dunque

$$\arg \min_{\mathbf{y} \in S} \left\{ F(\hat{\mathbf{s}})^T(\mathbf{y} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2t} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2 \right\} = \arg \min_{\mathbf{y} \in S} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{s} + tF(\hat{\mathbf{s}})\|^2 \right\} = P_S(\mathbf{s} - tF(\hat{\mathbf{s}}))$$

□

**Lemma 18.** *Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fortemente convessa di modulo  $\tau$ ,  $X$  chiuso e convesso, e  $\bar{\mathbf{x}}$  il minimo di  $f$  su  $X$ , allora*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\tau}{2} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $f$  è fortemente convessa se

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}) - \frac{\tau}{2} \lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Ponendo  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}$ , e notando che ogni combinazione convessa di  $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}$  sta in  $X$  per convessità, e che  $\bar{\mathbf{x}}$  è il minimo di  $f$  su  $X$ , avremo

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{\tau}{2} \lambda(1 - \lambda) \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall \mathbf{x} \in X$$

$$0 \leq \lambda \left[ f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{\tau}{2} (1 - \lambda) \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \right] \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall \mathbf{x} \in X$$

Ponendo  $\lambda \neq 0$ , possiamo semplificarlo, e otteniamo

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\tau}{2} (1 - \lambda) \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad \forall \lambda \in (0, 1], \quad \forall \mathbf{x} \in X$$

$$f(\mathbf{x}) \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\tau}{2} (1 - \lambda) \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 = f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\tau}{2} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in X$$

□

13-4-18

Siamo finalmente pronti ad enunciare e dimostrare il teorema di convergenza.

**Teorema 11.** *Supponiamo che*

- $S$  è chiuso e convesso
- (VI) ammette una soluzione  $\bar{\mathbf{s}} \in S$
- $F$  sia Lipschitziana di modulo  $L$  su  $S$
- $F$  sia monotona su  $S$ , cioè

$$(F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{s}'))^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \geq 0 \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in S$$

- $0 < t < 1/L$

Allora  $\mathbf{s}^k$  generate dall'algoritmo dell'extragradiente convergono ad una delle soluzioni di (VI).

*Dimostrazione.* Notiamo che la funzione che minimizziamo nel Lemma 17 (che chiamiamo  $g(\mathbf{y})$ ) è fortemente convessa in  $\mathbf{y}$  di parametro  $1/t$ , e si può testare con il gradiente:

$$\nabla g(\mathbf{y}) = F(\hat{\mathbf{s}}) + \frac{1}{t}(\mathbf{y} - \mathbf{s}) \implies (\nabla g(\mathbf{x}) - \nabla g(\mathbf{y}))^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{t}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

Se  $S$  è chiuso e convesso, allora per Lemma 18, dato  $\mathbf{u} = P_S(\mathbf{s} - tF(\hat{\mathbf{s}}))$  il minimo di  $g$ ,

$$\begin{aligned} F(\hat{\mathbf{s}})^T(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2t}\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2 = g(\mathbf{x}) &\geq g(\mathbf{u}) + \frac{1}{2t}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 = F(\hat{\mathbf{s}})^T(\mathbf{u} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2t}\|\mathbf{u} - \mathbf{s}\|^2 + \frac{1}{2t}\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in S \\ \implies 2tF(\hat{\mathbf{s}})^T(\mathbf{x} - \mathbf{u}) &\geq \|\mathbf{u} - \mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in S \end{aligned}$$

Notiamo che questa formula si può applicare anche al passo 2. dell'algoritmo, ma dobbiamo stare attenti alla notazione. L'algoritmo recita

$$\hat{\mathbf{s}}^k = P_S(\mathbf{s}^k - tF(\mathbf{s}^k))$$

dunque dobbiamo sostituire  $\mathbf{u} \rightarrow \hat{\mathbf{s}}^k$ ,  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}^k$ ,  $\hat{\mathbf{s}} \rightarrow \mathbf{s}^k$ , e poniamo anche  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s}^{k+1}$ , ottenendo

$$2tF(\mathbf{s}^k)^T(\mathbf{s}^{k+1} - \hat{\mathbf{s}}^k) \geq \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + \|\mathbf{s}^{k+1} - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 - \|\mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{s}^k\|^2$$

Sia  $\bar{\mathbf{s}}$  una soluzione di (VI). Facciamo lo stesso per il passo 4.

$$\mathbf{s}^{k+1} = P_S(\mathbf{s}^k - tF(\hat{\mathbf{s}}^k))$$

sostituendo  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{s}^{k+1}$ ,  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}^k$ ,  $\hat{\mathbf{s}} \rightarrow \hat{\mathbf{s}}^k$ , e poniamo anche  $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{s}}$ , ottenendo

$$2tF(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}) \geq \|\mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{s}^k\|^2 + \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2$$

ma in questa possiamo applicare il Lemma 16 e ottenere

$$2tF(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}) = 2tF(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\bar{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}^k) + 2tF(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}) \leq 2tF(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}).$$

Sommando le due disuguaglianze ottenute dai passi 2. e 4. otteniamo

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2 + \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + \|\mathbf{s}^{k+1} - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 &\leq 2t(F(\hat{\mathbf{s}}^k) - F(\mathbf{s}^k))^T(\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}) \\ &\text{(Cauchy-Schwartz)} \leq 2t\|F(\hat{\mathbf{s}}^k) - F(\mathbf{s}^k)\| \cdot \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}\| \\ &\text{(Lipschitz)} \leq 2tL\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\| \cdot \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}\| \\ &\text{(} t < 1/L \text{)} \leq 2\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\| \cdot \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}\| \\ \implies \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2 - \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}\|^2 &\geq \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + \|\mathbf{s}^{k+1} - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 - 2\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\| \cdot \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}\| \\ &= (\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\| - \|\mathbf{s}^{k+1} - \hat{\mathbf{s}}^k\|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Concludiamo che  $\|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2 \geq \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}\|^2$  e pertanto  $\|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2$  converge ad un valore  $r \geq 0$ . Se ora riprendiamo prima di semplificare il fattore  $tL$ , possiamo scriverlo come

$$\begin{aligned} -\|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}\|^2 + \|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2 &\geq \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + \|\mathbf{s}^{k+1} - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 - 2tL\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\| \cdot \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^{k+1}\| \\ \text{(Cauchy-Schwartz)} &\geq (1 - tL)(\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + \|\mathbf{s}^{k+1} - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2) \geq 0 \end{aligned}$$

ma visto che  $\|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2$  e  $\|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^{k+1}\|^2$  convergono allo stesso valore  $r$ , e che  $1 - tL > 0$ , otteniamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 = 0.$$

Abbiamo già mostrato che  $\|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2$  decresce con  $k$ , e pertanto la sequenza degli  $\mathbf{s}^k$  sta tutta in un limitato, e ha una sottosuccessione  $\mathbf{s}^{k_i}$  convergente a  $\tilde{\mathbf{s}}$ , che appartiene a  $S$  per chiusura. Dato che  $\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2$  tende a zero, allora anche  $\hat{\mathbf{s}}^{k_i}$  converge a  $\tilde{\mathbf{s}}$ . Riprendendo il passo 2. per  $k_i$ , usando il fatto che  $P_S$  e  $F$  sono funzione continue, passiamo al limite e otteniamo

$$\hat{\mathbf{s}}^{k_i} = P_S(\mathbf{s}^{k_i} - tF(\mathbf{s}^{k_i})) \implies \tilde{\mathbf{s}} = P_S(\tilde{\mathbf{s}} - tF(\tilde{\mathbf{s}}))$$

da cui  $\tilde{\mathbf{s}}$  è una delle soluzioni che volevamo trovare. Questo ci dice che  $\|\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^k\|^2$  non solo decresce, ma va anche a zero, dato che c'è una sottosuccessione convergente, così come  $\|\bar{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2$ . Questo conclude che l'algoritmo converge ad una delle soluzioni di

$$F(\mathbf{x})^T(\mathbf{s} - \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S$$

□

## 14.4 Extragradiente con Iperpiano

Notiamo che nel caso di  $S = \mathbb{R}^n$ , le soluzioni di

$$F(\mathbf{x})^T(\mathbf{s} - \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S$$

coincidono con le soluzioni di  $F(\mathbf{x}) = 0$ . In questo caso

**Lemma 19.** *Dati  $\hat{\mathbf{s}}^k, \mathbf{s}^k$  dall'algoritmo dell'extragradiente, poniamo che  $F$  sia monotona. Allora gli iperpiani*

$$H_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{s}}^k) = 0\}$$

*separano  $\mathbf{s}^k$  dalle soluzioni di  $F(\mathbf{x}) = 0$  se  $t$  è abbastanza piccolo.*

*Dimostrazione.* Presa  $\mathbf{x}$  per cui  $F(\mathbf{x}) = 0$ , per monotonia e Lemma 16, sappiamo che  $F(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{s}}^k) \leq 0$ . Inoltre, essendo  $S = \mathbb{R}^n$ , le proiezioni sono funzioni identità, e pertanto

$$\hat{\mathbf{s}}^k = \mathbf{s}^k - tF(\mathbf{s}^k) \implies \frac{1}{t}F(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k) = F(\hat{\mathbf{s}}^k)^TF(\mathbf{s}^k).$$

Notiamo che se  $t \rightarrow 0$ , allora  $\hat{\mathbf{s}}^k \rightarrow \mathbf{s}^k$ , e pertanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}F(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k) = \|F(\mathbf{s}^k)\|^2 \geq 0$$

Se  $F(\mathbf{s}^k) = 0$ , allora  $\hat{\mathbf{s}}^k = \mathbf{s}^k$  e dunque  $\mathbf{s}^k \in H_k$ . Altrimenti  $F(\mathbf{s}^k) > 0$  e per  $t$  piccolo avremo che anche  $F(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k) > 0$ . In ogni caso,  $F(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k) \geq 0$ , dunque  $H_k$  separa  $\mathbf{s}^k$  da ogni radice di  $F$ .  $\square$

Notiamo che se  $F(\hat{\mathbf{s}}^k) \neq 0$ , allora

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k - tF(\hat{\mathbf{s}}^k) \in H_k \iff t = \frac{F(\hat{\mathbf{s}}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k)}{\|F(\hat{\mathbf{s}}^k)\|^2}$$

e questo ci dà l'idea per il prossimo algoritmo.

Rimettiamoci nel caso  $S$  convesso e chiuso, e ridefiniamo gli iperpiani come

$$H_k := \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{z}^k)^T(\mathbf{s} - \mathbf{z}^k) = 0\}$$

dove  $\mathbf{z}^k = \theta^k \hat{\mathbf{s}}^k + (1 - \theta^k)\mathbf{s}^k$  e  $\theta^k \in (0, 1)$  soddisfa

$$\|\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 \leq 2tF(\mathbf{z}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k).$$

**Lemma 20.** *Esiste un intervallo non vuoto  $(0, \gamma) \subseteq (0, 1)$  di valori di  $\theta^k$  per cui vale*

$$\|\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 \leq 2tF(\mathbf{z}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k).$$

*Dimostrazione.* Notiamo che se  $\mathbf{s}^k = \hat{\mathbf{s}}^k$ , allora ogni  $\theta^k$  va bene. Supponiamo quindi che siano diversi, e ricordiamo che  $\hat{\mathbf{s}}^k = P_S(\mathbf{s}^k - tF(\mathbf{s}^k))$ . Data la convessità e chiusura di  $S$ , la proiezione è composta da un solo punto, e

$$\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k + tF(\mathbf{s}^k)\|^2 < \|\mathbf{s} - \mathbf{s}^k + tF(\mathbf{s}^k)\|^2 \quad \forall \mathbf{s} \in S : \mathbf{s} \neq \hat{\mathbf{s}}^k.$$

Sviluppando i quadrati, e sostituendo  $\mathbf{s} = \mathbf{s}^k$ , otteniamo

$$\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + 2tF(\mathbf{s}^k)^T(\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k) < 0 \implies \|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 < 2tF(\mathbf{s}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k)$$

Se definiamo la funzione

$$G(\theta) = 2tF(\theta\hat{\mathbf{s}}^k + (1 - \theta)\mathbf{s}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k)$$

allora  $G$  è continua, e  $\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 < G(0)$ . Per teorema di permanenza del segno, esiste un intorno  $(0, \gamma)$  per cui

$$\|\hat{\mathbf{s}}^k - \mathbf{s}^k\|^2 < G(\theta) \quad \forall \theta \in (0, \gamma)$$

e pertanto tutti gli  $\theta^k \in (0, \gamma)$  soddisfano

$$\|\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 \leq 2tF(\mathbf{z}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k).$$

$\square$

**Lemma 21.** Se  $F$  è monotona, allora  $H_k$  separa  $\mathbf{s}^k$  dalle radici di  $F$ .

*Dimostrazione.*

$$F(\mathbf{z}^k)^T(\mathbf{s}^k - \mathbf{z}^k) = \theta^k F(\mathbf{z}^k)^T(\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k) \geq \frac{\theta^k}{2t} \|\mathbf{s}^k - \hat{\mathbf{s}}^k\|^2 \geq 0.$$

Preso  $\bar{\mathbf{s}}$  che risolve (VI), per monotonia e Lemma 16, sappiamo che  $F(\mathbf{z}^k)^T(\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{z}^k) \leq 0$ . Dunque  $H_k$  separa  $\mathbf{s}^k$  dalle soluzioni.  $\square$

**Algoritmo 6** (Extragradiente con Iperpiano).

1. Fissiamo  $t > 0$ ,  $\mathbf{s}^0 \in S$ ,  $k = 0$
2.  $\hat{\mathbf{s}}^k = P_S(\mathbf{s}^k - tF(\mathbf{s}^k))$
3. Se  $\hat{\mathbf{s}}^k = \mathbf{s}^k$  fermiamo l'algoritmo
4.  $\mathbf{s}^{k+1} = P_S(P_{H_k}(\mathbf{s}^k))$
5. Poniamo  $k = k + 1$  e torniamo allo step 2.

Notiamo che nello step 4. è sottintesa la scelta di un  $\theta^k$  e  $\mathbf{z}^k$ . Se scegliamo all'inizio  $\theta \in (0, 1)$ , allora per Lemma 20 esisterà sempre un esponente  $n_k$  per cui  $\theta^k = \theta^{n_k}$  andrà bene, e possiamo sempre prendere  $n_k$  crescenti in  $k$ .

Notiamo inoltre che fare  $P_S(P_{H_k}(\cdot))$  è molto diverso dal fare  $P_{S \cap H_k}(\cdot)$ . Per esempio, con la seconda proiezione, arriviamo sempre sull'iperpiano, mentre con la prima non è detto.

**Teorema 12.** Poniamo che

- $S$  convesso e chiuso
- (VI) ammette una soluzione in  $S$
- $F$  continua e monotona
- $t > 0$

In questo caso la successione  $\mathbf{s}^k$  generata dall'algoritmo dell'extragradiente con iperpiano converge ad una soluzione di (VI).

## 15 Disuguaglianza di Ky Fan

Ritorniamo a considerare il gioco  $G = (N, S, \mu)$ . Definiamo

**Definizione 26.** La **Funzione Aggregata di Nikaido-Isoda**  $f : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  è data da

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) := \sum_i \mu_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) - \mu_i(v_i, \mathbf{s}_{-i})$$

che rappresenta la somma delle perdite se passo da  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{v}$ . Il problema

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

è chiamato **Problema di Equilibrio o Disuguaglianza di Ky Fan**.

**Lemma 22.** Dato  $\bar{\mathbf{s}} \in S$ , sono equivalenti

1.  $\bar{\mathbf{s}}$  è un equilibrio
2.  $f(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S$
3.  $\bar{\mathbf{s}} \in \arg \min\{f(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{v}) | \mathbf{v} \in S\}$

*Dimostrazione.*

1.  $\implies$  2.)

$$\mu_i(\bar{s}_i, \bar{s}_{-i}) - \mu_i(v_i, \bar{s}_{-i}) \geq 0 \quad \forall i \implies f(\bar{s}, \mathbf{v}) = \sum_i \mu_i(\bar{s}_i, \bar{s}_{-i}) - \mu_i(v_i, \bar{s}_{-i}) \geq 0$$

2.  $\implies$  3.) Dato che  $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = 0$  per ogni  $\mathbf{s}$ , allora

$$0 = f(\bar{s}, \bar{s}) \leq f(\bar{s}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

3.  $\implies$  1.) Dato  $\mathbf{v} = (v_i, \bar{s}_i)$ , avremo che

$$0 = f(\bar{s}, \bar{s}) \leq f(\bar{s}, \mathbf{v}) = \mu_i(\bar{s}_i, \bar{s}_{-i}) - \mu_i(v_i, \bar{s}_{-i}) \quad \forall v_i \in S_i \quad \forall i$$

che è la definizione di equilibrio.  $\square$

Quindi la funzione  $f$  non ha bisogno di ulteriori ipotesi per dare un equilibrio, al contrario di (VI). In realtà, quest'ultimo è un caso particolare in cui

$$f(\bar{s}, \mathbf{v}) = F(\bar{s})^T(\mathbf{v} - \bar{s}).$$

**Definizione 27.** Chiamiamo *Gap* o *Funzione di Merito* la quantità

$$V(\mathbf{s}) := \inf_{\mathbf{v} \in S} f(\mathbf{s}, \mathbf{v}).$$

Notiamo che a priori  $V(\mathbf{s})$  potrebbe valere  $-\infty$ . In generale, sarà negativo per ogni  $\mathbf{s}$  poiché  $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = 0$ .

**Lemma 23.**  $\bar{s} \in S$  è un equilibrio, se e solo se  $V(\bar{s}) = 0$ . In questo caso  $\bar{s}$  è un massimo di  $V(\mathbf{s})$ .

*Dimostrazione.* Per Lemma 22,  $\bar{s}$  è un equilibrio se e solo se  $f(\bar{s}, \mathbf{v}) \geq 0$  per ogni  $\mathbf{v}$ , ma dato che  $f(\bar{s}, \bar{s}) = 0$ , allora

$$f(\bar{s}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S \iff V(\bar{s}) = 0.$$

In questo caso,  $V(\bar{s}) = 0 \geq V(\mathbf{s})$  per ogni  $\mathbf{s} \in S$ .  $\square$

Se  $\bar{s}$  è un massimo di  $V(\mathbf{s})$ , questo non basta a renderlo un equilibrio, poiché può ancora succedere che  $V(\bar{s}) < 0$ . Ciò vuol dire che la funzione  $V$  mi descrive la lontananza dall'equilibrio (e per questo è detta Gap).

Abbiamo mostrato che il problema di trovare un equilibrio equivale ad un problema di massimizzazione, ma se  $V$  non è concava, diventa un problema di ottimizzazione in cui ci sono massimi locali, e pertanto è NP-hard.

19-4-18

Supponiamo ora che per ogni  $\mathbf{s} \in S$  esista un unico minimo  $z(\mathbf{s})$  di  $f(\mathbf{s}, \cdot)$ . Per esempio, ciò accade se le  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$  sono fortemente concave, ossia  $f$  è fortemente convessa in  $\mathbf{v}$ . In questo caso, avremo  $V(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s}))$ .

**Lemma 24.** Dato  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  compatto, e  $f$  continua, allora  $z(\mathbf{s})$  è continua.

*Dimostrazione.* Data una sequenza  $\mathbf{s}^k \rightarrow \bar{\mathbf{s}}$  dentro  $S$ , supponiamo per assurdo che  $\mathbf{z}^k = z(\mathbf{s}^k)$  non converga a  $\bar{\mathbf{z}} = z(\bar{\mathbf{s}})$ , ossia che esista un  $\varepsilon > 0$  per cui, definitivamente, si ha  $|\mathbf{z}^k - \bar{\mathbf{z}}| > \varepsilon$ . Dato che  $S$  è compatto, allora esiste una sottosuccessione  $\mathbf{z}^{k_l}$  convergente a  $\hat{\mathbf{z}} \neq \bar{\mathbf{z}}$ , ma  $f$  è continua, da cui

$$f(\bar{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{z}}) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(\mathbf{s}^{k_l}, z(\mathbf{s}^{k_l})) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} f(\mathbf{s}^{k_l}, \mathbf{v}) = f(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

e  $\hat{\mathbf{z}} = z(\bar{\mathbf{s}}) = \bar{\mathbf{z}}$  per unicità del minimo, assurdo.  $\square$

**Lemma 25.** Dato  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  convesso chiuso, e  $f \in C^1$  tale che  $f(\bar{\mathbf{s}}, \cdot)$  sia convessa, allora sono equivalenti

1.  $\bar{\mathbf{s}} \in S$  è un equilibrio

2.  $\nabla_2 f(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}})^T(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{s} \in S$

*Dimostrazione.* Notiamo che

$$\nabla_2 f(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{s}}) = (-\nabla_i \mu_i(\bar{\mathbf{s}}))_i = F(\bar{\mathbf{s}})$$

pertanto la tesi chiede se gli equilibri siano tutte e sole le soluzioni di (VI), che è l'enunciato del Teorema 8.  $\square$

Riprendiamo  $z(\mathbf{s})$  e notiamo che coincide con la migliore risposta  $r(\mathbf{s})$ .

$$\begin{aligned}
z(\mathbf{s}) &= \arg \min \{ f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in S \} = \arg \min \left\{ \sum_i \mu_i(\mathbf{s}) - \mu_i(v_i, \mathbf{s}_{-i}) : \mathbf{v} \in S \right\} \\
&= \arg \min \left\{ \sum_i -\mu_i(v_i, \mathbf{s}_{-i}) : \mathbf{v} \in S \right\} \\
&= \arg \max \left\{ \sum_i \mu_i(v_i, \mathbf{s}_{-i}) : \mathbf{v} \in S \right\} \\
&= \prod_i \arg \max \{ \mu_i(v_i, \mathbf{s}_{-i}) : v_i \in S_i \} = \prod_i r_i(\mathbf{s}_{-i}) = r(\mathbf{s})
\end{aligned}$$

Quand'è che esiste una soluzione alla disuguaglianza di Ky Fan?

**Teorema 13.** *La disuguaglianza di Ky Fan ammette almeno una soluzione se*

- $S$  è compatto e convesso
- $f$  è continua
- $f(\mathbf{s}, \cdot)$  è (quasi) convessa per ogni  $\mathbf{s} \in S$

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$z(\mathbf{s}) = \arg \min \{ f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in S \}.$$

Questo è non vuoto poiché  $f$  è continua su un compatto, ed è anche convesso, poiché è un sottografico di  $f(\mathbf{s}, \cdot)$  che è (quasi) convesso. Inoltre, prendiamo una sequenza  $\mathbf{s}^k \rightarrow \mathbf{s}$  in  $S$ , e una sequenza  $\mathbf{z}^k \in z(\mathbf{s}^k)$  che converge a  $\mathbf{z}$ . Allora per continuità di  $f$ ,

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{s}^k, \mathbf{z}^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{s}^k, \mathbf{v}) = f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in S \implies \mathbf{z} \in z(\mathbf{s}).$$

Questo ci dice che  $z(\cdot)$  è una mappa chiusa, e che anche  $z(\mathbf{s})$  è sempre un chiuso. Grazie al Teorema di Kakutani 4, possiamo concludere che  $z$  ha un punto fisso, ossia esiste  $\bar{\mathbf{s}} \in S$  per cui  $\bar{\mathbf{s}} \in z(\bar{\mathbf{s}})$ , e per Lemma 22, questo risolve la disuguaglianza di Ky Fan.  $\square$

## 15.1 Rilassamento

Ciò porta alla formulazione di un nuovo algoritmo

**Algoritmo 7** (Rilassamento).

1. Prendiamo  $\mathbf{s}^0 \in S$ ,  $k = 0$  e una sequenza  $\{t_k\}_k \subseteq [0, 1]$
2.  $\mathbf{z}^k = \arg \min \{ f(\mathbf{s}^k, \mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in S \}$
3. Se  $\mathbf{z}^k = \mathbf{s}^k$  fermiamo l'algoritmo
4.  $\mathbf{s}^{k+1} = (1 - t_k)\mathbf{s}^k + t_k\mathbf{z}^k$
5. Poniamo  $k = k + 1$  e torniamo allo step 2.

**Teorema 14.** *Se supponiamo che*

- $S$  è compatto e convesso
- $f$  è continua
- $f(\mathbf{s}, \cdot)$  è fortemente convessa di modulo  $\alpha > 0$  per ogni  $\mathbf{s} \in S$
- $f(\cdot, \mathbf{v})$  è concava per ogni  $\mathbf{v} \in S$
- $t_k$  converge a 0

- $\sum_{i=1}^{\infty} t_k = \infty$

allora esiste un punto di accumulazione della sequenza  $\mathbf{s}^k$  generata dall'algoritmo di rilassamento che risolve Ky Fan.

*Dimostrazione.* Dalle ipotesi, sappiamo che  $z(\mathbf{s})$  è ben definito come elemento di  $S$ , e nell'algoritmo  $z(\mathbf{s}^k) = \mathbf{z}^k$ . Grazie a Lemma 24, sappiamo anche che  $z(\mathbf{s})$  è continua, e pertanto  $V(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s}))$  è pure continua.

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{s}^{k+1}) &= f(\mathbf{s}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) = f((1-t_k)\mathbf{s}^k + t_k\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^{k+1}) \\
&\quad (\text{concavità}) \geq (1-t_k)f(\mathbf{s}^k, \mathbf{z}^{k+1}) + t_kf(\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^{k+1}) \\
(f(\mathbf{s}^k, \mathbf{s}^k) = 0 \text{ and } f(\mathbf{s}^k, \mathbf{z}^{k+1}) \geq f(\mathbf{s}^k, \mathbf{z}^k)) &\geq (1-t_k)f(\mathbf{s}^k, \mathbf{z}^k) + t_kf(\mathbf{s}^k, \mathbf{s}^k) + t_kf(\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^{k+1}) \\
&\quad (\text{forte convessità}) \geq f(\mathbf{s}^k, (1-t_k)\mathbf{z}^k + t_k\mathbf{s}^k) + \frac{\alpha}{2}(1-t_k)t_k\|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + t_kf(\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^{k+1}) \\
&\geq V(\mathbf{s}^k) + \frac{\alpha}{2}(1-t_k)t_k\|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + t_kf(\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^{k+1})
\end{aligned}$$

Osserviamo che  $\mathbf{z}^k, \mathbf{s}^k \in S$  che è un compatto, dunque sono entrambi limitati in norma. In particolare  $\|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\| \leq \|\mathbf{z}^k\| + \|\mathbf{s}^k\|$  è limitato, e pertanto

$$\|\mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{s}^k\| = t_k\|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\| \rightarrow 0.$$

Dato che  $z(\mathbf{s})$  è continua su un compatto, in particolare è uniformemente continua, e

$$\|\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k\| = \|z(\mathbf{s}^{k+1}) - z(\mathbf{s}^k)\| \rightarrow 0.$$

Inoltre, anche  $f$  è continua su un compatto, pertanto uniformemente continua, e vale anche  $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = 0$ , da cui

$$f(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^k) = f(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^k) - f(\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^k) \rightarrow 0.$$

Prendiamo una costante  $\varepsilon > 0$  ed un indice  $\bar{k}$  per cui  $t_k < 1/2$  e  $|f(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^k)| < \varepsilon$  per ogni  $k \geq \bar{k}$ . Otteniamo che

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{s}^{k+1}) &\geq V(\mathbf{s}^k) + \frac{\alpha}{2}(1-t_k)t_k\|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2 + t_kf(\mathbf{z}^k, \mathbf{z}^{k+1}) \\
&\geq V(\mathbf{s}^{\bar{k}}) + \sum_{j=\bar{k}}^k \frac{\alpha}{2}(1-t_j)t_j\|\mathbf{z}^j - \mathbf{s}^j\|^2 + t_jf(\mathbf{z}^j, \mathbf{z}^{j+1}) \\
&\geq V(\mathbf{s}^{\bar{k}}) + \sum_{j=\bar{k}}^k t_j [\alpha\|\mathbf{z}^j - \mathbf{s}^j\|^2 - \varepsilon]
\end{aligned}$$

$\sum_j t_j = \infty$ , dunque  $\|\mathbf{z}^j - \mathbf{s}^j\|^2$  non può essere definitivamente più grande di  $2\varepsilon/\alpha$ , altrimenti  $V(\mathbf{s}^k) \geq V(\mathbf{s}^{\bar{k}}) + \varepsilon \sum_{j=\bar{k}}^k t_j \rightarrow \infty$ , mentre  $V(\mathbf{s}) \leq 0$  per ogni  $\mathbf{s}$ . Possiamo perciò estrarre una sottosuccessione  $k_l$  per cui

$$\|\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}\| \rightarrow 0.$$

Dato che siamo su un compatto, possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione (che, con un abuso di notazione, continuiamo ad indicare  $k_l$ ) convergente a  $\bar{\mathbf{s}}$ , da cui

$$z(\bar{\mathbf{s}}) = \lim_l z(\mathbf{s}^{k_l}) = \lim_l \mathbf{z}^{k_l} = \lim_l \mathbf{s}^{k_l} = \bar{\mathbf{s}}$$

e pertanto  $\bar{\mathbf{s}}$  risolve Ky Fan. □

## 15.2 Ascesa di $V$

Poniamo ora che  $f$  sia  $C^1$  con  $S$  compatto. Un risultato importante ci dice che anche  $V$  è  $C^1$  e che il suo gradiente si può calcolare a partire da quello di  $f$ .

**Lemma 26.** *Data  $f \in C^1$  tale che esista un unico minimo  $z(\mathbf{s}) = \arg \min f(\mathbf{s}, \cdot)$  per ogni  $\mathbf{s} \in S$  compatto di  $\mathbb{R}^n$ , allora*

$$\nabla V(\mathbf{s}) = \nabla_1 f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})).$$

*Dimostrazione.* Data una direzione  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  dimostriamo che le derivate direzionali di  $V$  lungo  $\mathbf{d}$  esistono e sono quelle giuste:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{s} + t\mathbf{d}) - V(\mathbf{s})}{t} &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{s} + t\mathbf{d}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d})) - f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s}))}{t} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{s} + t\mathbf{d}, z(\mathbf{s})) - f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s}))}{t} \\ &= \nabla_1 f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) \cdot \mathbf{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{s} + t\mathbf{d}) - V(\mathbf{s})}{t} &= \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{s} + t\mathbf{d}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d})) - f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s}))}{t} \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{s} + t\mathbf{d}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d})) - f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d}))}{t} \end{aligned}$$

Usando il teorema del valor medio, sappiamo che esiste  $\tau \in [0, t]$  per cui

$$\frac{f(\mathbf{s} + t\mathbf{d}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d})) - f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d}))}{t} = \nabla_1 f(\mathbf{s} + \tau\mathbf{d}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d})) \cdot \mathbf{d}$$

e usando che  $f$  è  $C^1$ , ossia le sue derivate sono continue, e che  $z(\mathbf{s})$  è continua,

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{s} + t\mathbf{d}) - V(\mathbf{s})}{t} &\geq \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{s} + t\mathbf{d}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d})) - f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d}))}{t} \\ &= \liminf_{t \rightarrow 0} \nabla_1 f(\mathbf{s} + \tau\mathbf{d}, z(\mathbf{s} + t\mathbf{d})) \cdot \mathbf{d} \\ &= \nabla_1 f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) \cdot \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Questo conclude che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{s} + t\mathbf{d}) - V(\mathbf{s})}{t} = \nabla_1 f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) \cdot \mathbf{d} \quad \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$$

e pertanto il gradiente di  $V$  esiste, e

$$\nabla V(\mathbf{s}) = \nabla_1 f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})).$$

□

**Warning:** Se  $f \in C^1$ , NON è detto che  $z(\mathbf{s})$  sia  $C^1$ . Per esempio, prendiamo il gioco a somma zero a due giocatori  $S_i = [0, 3]$ ,  $\mu_1(x, y) = -\mu_2(x, y) = (x + y - 5)^2$ . In questo caso le  $\mu_i$  sono  $C^1$ , dunque lo è anche  $f$ , che si esprime come

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \mu_1(\mathbf{s}) - \mu_1(v_1, s_2) + \mu_2(\mathbf{s}) - \mu_2(s_1, v_2) = -(v_1 + s_2 - 5)^2 + (s_1 + v_2 - 5)^2.$$

In questo caso

$$z_2(s) = \arg \min \{ (s_1 + v_2 - 5)^2 \mid v_2 \in [0, 3] \} = \begin{cases} 5 - s_1 & 2 \leq s_1 \leq 3 \\ 3 & 0 \leq s_1 \leq 2 \end{cases}$$

$$z_1(s) = \arg \min \{ -(v_1 + s_2 - 5)^2 \mid v_1 \in [0, 3] \} = 0$$

dunque  $z(\mathbf{s})$  è continuo, ma non  $C^1$ , mentre  $V(\mathbf{s})$  è ancora  $C^1$ .

$$V(\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) = -(s_2 - 5)^2 + (s_1 + z_2(s) - 5)^2 = \begin{cases} -(s_2 - 5)^2 & 2 \leq s_1 \leq 3 \\ -(s_2 - 5)^2 + (s_1 - 2)^2 & 0 \leq s_1 \leq 2 \end{cases}$$

Adesso che sappiamo il gradiente, cerchiamo una direzione lungo la quale la funzione cresca.

**Teorema 15.** Sotto le ipotesi di Teorema 14, se  $f \in C^1$  allora

$$\nabla V(\mathbf{s})^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) \geq \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2 \quad \forall \mathbf{s} \in S$$

*Dimostrazione.* Dato che  $f(\cdot, \mathbf{v})$  è concava, e  $f(\mathbf{s}, \cdot)$  è fortemente convessa di modulo  $\alpha$  (Lemma 18),

$$\begin{aligned} 0 &= f(z(\mathbf{s}), z(\mathbf{s})) \leq f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) + \nabla_1 f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s}))^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) \\ &= f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) + \nabla V(\mathbf{s})^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) \\ 0 &= f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) \geq f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) + \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2 \\ \implies \nabla V(\mathbf{s})^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) &\geq -f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) \geq \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2. \end{aligned}$$

□

Da ciò ricaviamo che  $z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}$  è sempre una direzione di crescita stretta per  $V$ , fino a che non arriviamo alla soluzione  $z(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ .

20-4-18

Questo ci porta al seguente algoritmo

**Algoritmo 8** (Ascesa per  $V$ ).

1. Prendiamo  $\mathbf{s}^0 \in S$ ,  $k = 0$
2.  $\mathbf{z}^k = \arg \min\{f(\mathbf{s}^k, \mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in S\}$
3. Se  $\mathbf{z}^k = \mathbf{s}^k$  fermiamo l'algoritmo
4.  $\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k + t_k(\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k)$
5. Poniamo  $k = k + 1$  e torniamo allo step 2.

La differenza con l'algoritmo di Rilassamento è la scelta di  $t_k$ , che qui sarà  $t_k = \beta^p$  con  $\beta \in (0, 1)$  e  $p$  il più piccolo intero positivo che soddisfi

$$V(\mathbf{s}^k + \beta^p(\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k)) \geq V(\mathbf{s}^k) + \frac{\alpha}{2} \eta \beta^p \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2$$

dove  $\eta \in (0, 1)$  è fisso. In un certo senso, vogliamo essere certi di guadagnare su  $V$  una quantità proporzionale al passo.

**Teorema 16.** Sotto le ipotesi di Teorema 14 e  $f \in C^1$ , allora è sempre possibile trovare ad ogni passo dell'algoritmo di ascesa un  $p \in \mathbb{N}$  che soddisfi

$$V(\mathbf{s}^k + \beta^p(\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k)) \geq V(\mathbf{s}^k) + \frac{\alpha}{2} \eta \beta^p \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2$$

*Dimostrazione.* Grazie al Teorema 15, sappiamo che

$$\nabla V(\mathbf{s}^k)^T (\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k) \geq \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2.$$

Dal teorema del valor medio di Lagrange, esiste un  $\tau_p \in [0, \beta^p]$  per cui

$$V(\mathbf{s}^k + \beta^p(\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k)) - V(\mathbf{s}^k) = \beta^p \nabla V(\mathbf{s}^k + \tau_p(\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k))^T (\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k)$$

e se neghiamo la tesi, otteniamo

$$\nabla V(\mathbf{s}^k + \tau_p(\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k))^T (\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k) < \frac{\alpha}{2} \eta \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2$$

per ogni  $p$ , ma  $\tau_p \rightarrow 0$  e  $\nabla V$  è continua, pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \eta \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2 &\geq \nabla V(\mathbf{s}^k)^T (\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k) \geq \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2 \\ \implies (\eta - 1) \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\|^2 &\geq 0 \implies \|\mathbf{z}^k - \mathbf{s}^k\| = 0 \implies \mathbf{z}^k = \mathbf{s}^k. \end{aligned}$$

Ma se  $\mathbf{z}^k = \mathbf{s}^k$  allora l'algoritmo si ferma allo step 3., mentre noi siamo allo step 4., assurdo. □

**Teorema 17.** *Supponiamo che*

- $S$  è compatto
- $f \in C^1$
- $f(\mathbf{s}, \cdot)$  è fortemente convessa di modulo  $\alpha > 0$  per ogni  $\mathbf{s} \in S$
- $f(\cdot, \mathbf{v})$  è concava per ogni  $\mathbf{v} \in S$

Allora ogni punto di accumulazione della successione  $\mathbf{s}^k$  generata dall'algoritmo di ascesa di  $V$  risolvono Ky Fan.

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{\mathbf{s}}$  un punto di accumulazione per  $\mathbf{s}^k$  e di convergenza per la sottosuccessione  $\mathbf{s}^{k_l}$ , e  $\bar{z} = z(\bar{\mathbf{s}})$ . Dato che  $z$  è continua allora  $\bar{z}$  è limite di  $z^k$ . Chiamiamo  $\mathbf{d}^{k_l} = \mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}$ , e  $\bar{\mathbf{d}} = \bar{z} - \bar{\mathbf{s}}$ , così  $\mathbf{d}^{k_l}$  convergono a  $\bar{\mathbf{d}}$ . Sia inoltre  $V^k = V(\mathbf{s}^k)$ . Grazie al Teorema 16 i  $V^k$  sono non decrescenti, e dato che  $k_{l+1} \geq k_l + 1$ , abbiamo che

$$0 = \lim_l V^{k_{l+1}} - V^{k_l} \geq \limsup_l V^{k_{l+1}} - V^{k_l} \geq \limsup_l \frac{\alpha}{2} \eta \beta^p \|\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}\|^2 \geq 0 \implies \lim_l \beta^p \|\mathbf{d}^{k_l}\|^2 = 0$$

dove  $p$  dipende da  $l$ . Se  $\mathbf{d}^{k_l} \rightarrow 0$ , allora  $\bar{z} = \bar{\mathbf{s}}$  e abbiamo finito. Altrimenti, esiste una sottosuccessione dei  $\beta^p$  che converge a zero. Dato che  $p$  l'abbiamo preso il più piccolo possibile, avremo che

$$\begin{aligned} \beta^{p-1} \nabla V(\mathbf{s}^{k_l} + \tau_p(\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}))^T (\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}) &= V(\mathbf{s}^{k_l} + \beta^{p-1}(\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l})) - V^{k_l} < \frac{\alpha}{2} \eta \beta^{p-1} \|\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}\|^2 \\ \implies \nabla V(\mathbf{s}^{k_l} + \tau_p(\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}))^T (\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}) &< \frac{\alpha}{2} \eta \|\mathbf{z}^{k_l} - \mathbf{s}^{k_l}\|^2 \end{aligned}$$

dove  $\tau_p \in [0, \beta^{p-1}]$ . prendendo la sottosuccessione con i  $\beta^p$  che tendono a zero, per continuità, e per Teorema 15, otteniamo

$$\frac{\alpha}{2} \|\bar{z} - \bar{\mathbf{s}}\|^2 \leq \nabla V(\bar{\mathbf{s}})^T (\bar{z} - \bar{\mathbf{s}}) \leq \frac{\alpha}{2} \eta \|\bar{z} - \bar{\mathbf{s}}\|^2$$

da cui  $\bar{z} = \bar{\mathbf{s}}$ . □

Notiamo che  $V(\mathbf{s}) = \min f(\mathbf{s}, \cdot)$  è minimo di funzioni concave, quindi è anch'essa concava. La concavità di  $f(\cdot, \mathbf{v})$  si può comunque indebolire richiedendo solo che

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) + \nabla_1 f(\mathbf{s}, \mathbf{v})^T (\mathbf{v} - \mathbf{s}) \geq 0$$

che basta per avere

$$\nabla V(\mathbf{s})^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) \geq \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2.$$

Un'altra modifica che si può fare è scambiare le ipotesi in

- $f(\mathbf{s}, \cdot)$  convessa
- $f(\cdot, \mathbf{v})$  fortemente concava.

Infatti l'unico punto in cui utilizziamo le concavità e convessità è Teorema 15, ma si riesce ad arrivare lo stesso alla stessa formula utilizzando Lemma 7, in modo che

$$\begin{aligned} 0 &= f(z(\mathbf{s}), z(\mathbf{s})) \leq f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) + \nabla_1 f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s}))^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) - \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2 \\ &= f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) + \nabla V(\mathbf{s})^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) - \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2 \\ 0 &= f(\mathbf{s}, \mathbf{s}) \geq f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) \\ \implies \nabla V(\mathbf{s})^T (z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}) &\geq -f(\mathbf{s}, z(\mathbf{s})) + \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2 \geq \frac{\alpha}{2} \|z(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\|^2. \end{aligned}$$

Ritornando ai giochi, cosa c'è bisogno per soddisfare le ipotesi del teorema?

- per avere  $f(\mathbf{s}, \cdot)$  fortemente convessa, abbiamo bisogno di  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$  fortemente concave
- La concavità di  $f(\cdot, \mathbf{v})$  non è banale da ottenere. Prendiamo  $\mu_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$  fortemente concave e analizziamo dei casi particolari:

- Se  $\sum_i \mu_i(\mathbf{s}) = c$  costante, e ci sono 2 giocatori, allora

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = c - \mu_1(v_1, s_2) - \mu_2(s_1, v_2) = -c + \mu_2(v_1, s_2) + \mu_1(s_1, v_2)$$

che è concava in  $\mathbf{s}$ .

- Se  $\sum_i \mu_i(\mathbf{s}) = c$  costante, e ci sono  $n > 2$  giocatori, bisogna richiedere che  $\mu_i(s_i, \cdot)$  siano convesse, per ottenere  $f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = c - \sum_i \mu_i(v_i, \mathbf{s}_{-i})$  che è concava in  $\mathbf{s}$ .
- Se le  $\mu_i$  sono a variabili separabili, ossia  $\mu_i(\mathbf{s}) = g_i(s_i) + h_i(\mathbf{s}_{-i})$  allora le  $g_i$  sono fortemente concave, e  $f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \sum_i g_i(s_i) - g_i(v_i)$  è concava in  $\mathbf{s}$ .
- Nell'*oligopolio*  $\mu_i(\mathbf{s}) = s_i[\rho(\sum_j s_j) - c]$  con  $S_i = [0, \infty]$  e  $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , allora bisogna richiedere  $t \mapsto t\rho(t)$  concava e  $\rho$  fortemente convessa per avere

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \left( \sum_j s_j \right) \rho \left( \sum_j s_j \right) + \sum_i c(s_i - v_i) - v_i \rho \left( v_i + \sum_{j \neq i} s_j \right)$$

fortemente convessa in  $\mathbf{v}$  e concava in  $\mathbf{s}$ .

## 16 Duopolio di Stackelberg

Ricordiamo il setup del duopolio di Cournot:

$$\mu_i(s_1, s_2) = s_i \max\{0, T - (s_1 + s_2)\} - cs_i, \quad T > c, \quad S_i = [0, +\infty) \quad \forall i = 1, 2$$

Aggiungiamo l'ipotesi di **Sequenzialità**, ossia le due aziende non scelgono la strategia contemporaneamente, ma agiscono l'una dopo l'altra. La prima azienda sa che se sceglie la strategia  $s_1$ , la seconda sceglierà sicuramente  $r_2(s_1)$  che è

$$r_2(s_1) = \max \left\{ 0, \frac{T - c - s_1}{2} \right\}.$$

La prima azienda pertanto punterà a massimizzare  $\mu_1(s_1, r_2(s_1))$ .

$$\begin{aligned} \mu_1(s_1, r_2(s_1)) &= s_1 \max\{0, T - (s_1 + r_2(s_1))\} - cs_1 \\ &= \begin{cases} s_1 \max\{0, T - (s_1 + \frac{T-c-s_1}{2})\} - cs_1 & s_1 \leq T - c \\ s_1 \max\{0, T - s_1\} - cs_1 & s_1 > T - c \end{cases} \\ &= \begin{cases} s_1 \frac{T-c-s_1}{2} & s_1 \leq T - c \\ s_1(T - c) - s_1^2 & T \geq s_1 > T - c \\ -cs_1 & s_1 > T \end{cases} \end{aligned}$$

Notiamo che solo il primo caso da un valore positivo, dunque dobbiamo massimizzare una parabola, che ha massimo in  $(T - c)/2$ . Le strategie scelte saranno quindi

$$\bar{s}_1 = \frac{T - c}{2}, \quad \bar{s}_2 = r_2(s_1) = \frac{T - c}{4}.$$

Confrontiamo questo risultato con i casi di monopolio e con il duopolio di Cournot

	produzione ( $s_1 + s_2$ )	prezzo unitario ( $T - s_1 - s_2$ )	Utilità dei singoli ( $\mu_i$ )
Cournot	$2(T - c)/3$	$(T + 2c)/3$	$\mu_1 = \mu_2 = (T - c)^2/9$
Stackelberg	$3(T - c)/4$	$(T + 3c)/4$	$\mu_1 = (T - c)^2/8, \quad \mu_2 = (T - c)^2/16$
Monopolio	$(T - c)/2$	$(T + c)/2$	$\mu_1 = \mu_2 = (T - c)^2/8$

Possiamo notare che in termini di guadagno per i giocatori, il caso del monopolio e il primo giocatore nel caso di Stackelberg ottengono i profitti maggiori, seguiti da Cournot, mentre il secondo giocatore di Stackelberg guadagna meno di tutti. La produzione di beni nel caso di Stackelberg è al massimo, e al minimo nel monopolio. Il prezzo unitario è, come si ci poteva aspettare, al contrario, ossia massimo nel caso del monopolio, e minimo in Stackelberg.

In questo caso, chiamiamo il giocatore che agisce per primo **Dominante** o **Leader**.

## 17 Giochi Sequenziali

In generale, in un gioco a 2 giocatori del genere sequenziale, il primo cercherà sempre di massimizzare

$$\mu_1(s_1, r_2(s_1))$$

dove l'espressione diventa più complicata se  $r_2(s_1)$  è un insieme e non un solo elemento in  $S_2$ . Mettiamoci nel caso che  $r_2(s_1)$  da sempre e solo un elemento.

**Lemma 27.** Se  $\bar{s}_1 \in \arg \max\{\mu_1(s_1, r_2(s_1)) \mid s_1 \in S_1\}$ , e  $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  è un equilibrio del gioco, allora

$$\mu_1(\bar{s}_1, r_2(\bar{s}_1)) \geq \mu_1(\hat{s})$$

*Dimostrazione.*

$$\mu_1(\bar{s}_1, r_2(\bar{s}_1)) \geq \mu_1(\hat{s}_1, r_2(\hat{s}_1)) = \mu_1(\hat{s}).$$

□

Questo lemma ci dice che al primo giocatore conviene scegliere  $\bar{s}_1$  al posto di un equilibrio  $\hat{s}_1$ , e per questo viene detto dominante.

### Esempio

► Prendiamo il gioco

	(1)	(2)
(1)	2/2	4/1
(2)	1/0	3/1

In questo caso, (1), (1) è l'unico equilibrio, ma il giocatore 1 guadagna solo 2. Nel gioco sequenziale, se il giocatore 1 sceglie la strategia (2), allora guadagna 3, poiché il giocatore 2 sceglie la strategia (2).

►

	(1)	(2)	(3)
(1)	2/2	4/1	3/0
(2)	1/0	3/1	1/1

In questo caso, (1), (1) continua ad essere l'unico equilibrio, dove il giocatore guadagna 2, ma la funzione  $r_2(s_1)$  restituisce due elementi se  $s_1 = (2)$ . Non è chiaro dunque cosa succede se il primo giocatore sceglie (2), poiché potrebbe guadagnare 3 come 1.

Quest'ultimo esempio ci dice che in generale ci possono essere più risultati di una scelta del primo giocatore, a seconda della scelta del secondo. Le due versioni sono

**Ottimistica** In questo caso il primo giocatore spera per il meglio e vuole

$$\max\{\mu_1(s_1, s_2) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in r_2(s_1)\}$$

**Pessimistica** In questo caso il primo giocatore vuole tenersi al sicuro e gioca

$$\max\{\min\{\mu_1(s_1, s_2) \mid s_2 \in r_2(s_1)\} : s_1 \in S_1\}$$

La seconda si chiama anche **Strategia di Stackelberg**, che si può riassumere in: cerco di guadagnare il più possibile, aspettandomi però che l'altro mi ostacoli. Questa si può riscrivere anche come

$$\max\{t \mid t \leq \mu_1(s_1, s_2) \quad \forall s_1 \in S_1, \forall s_2 \in r_2(s_1)\}$$

che viene anche detto problema di **Ottimizzazione Bilivello**.

26-4-18

Prendiamo un gioco a due giocatori dove i giocatori agiscono uno dopo l'altro. Poniamo  $S_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$  convessi chiusi e  $\mu_2(s_1, \cdot)$  concava per ogni  $s_1 \in S_1$ . Se la funzione è anche differenziabile, otteniamo

$$s_2 \in r_2(s_1) \iff \nabla_2 \mu_2(s_1, s_2)^T (v_2 - s_2) \leq 0 \quad \forall v_2 \in S_2.$$

Nel caso di visione ottimistica, il problema diventerebbe dunque

$$\max\{\mu_1(s_1, s_2) \mid s_1 \in S_1, \nabla_2 \mu_2(s_1, s_2)^T (v_2 - s_2) \leq 0 \quad \forall v_2 \in S_2\}$$

e questo viene chiamato problema di ottimizzazione **Semi-Infinita** poiché bisognerebbe controllare ogni volta un numero continuo di disuguaglianze.

Nel caso pessimistico, otteniamo invece

$$\max\{t \mid t \leq \mu_1(s_1, s_2) \quad \forall s \in S : \nabla_2 \mu_2(s_1, s_2)^T (v_2 - s_2) \leq 0 \quad \forall v_2 \in S_2\}.$$

## 18 Induzione a Ritroso

Abbiamo già mostrato che in generale gli equilibri di Nash non sono soluzioni dei giochi sequenziali. Per esempio, prendiamo  $\gamma > 0$  e

	(1)	(2)
(1)	2/2	4/1
(2)	1/0	3/γ

In questo caso, (1), (1) è l'unico equilibrio, ma il gioco sequenziale termina con il profilo di strategie (2), (1). In realtà anche un gioco sequenziale si può rappresentare in forma "simultanea", poiché il secondo giocatore può scegliere all'inizio una strategia del tipo "Se il giocatore 1 gioca (1) io gioco  $x$ , mentre se gioca (2) io gioco  $y$ " dove  $x, y \in S_2$  sono tutte le coppie di possibili strategie. In particolare, il secondo giocatore avrà  $|S_2|^{|S_1|}$  strategie.

	(1 → 1), (2 → 1)	(1 → 1), (2 → 2)	(1 → 2), (2 → 1)	(1 → 2), (2 → 2)
(1)	2/2	2/2	4/1	4/1
(2)	1/0	3/γ	1/0	3/γ

Notiamo che ora la strategia che porta a  $3/\gamma$  è diventata un equilibrio del gioco, assieme al vecchio equilibrio  $2/2$ . I giochi sequenziali sono descritti più facilmente tramite l'albero delle mosse, piuttosto che con una matrice.

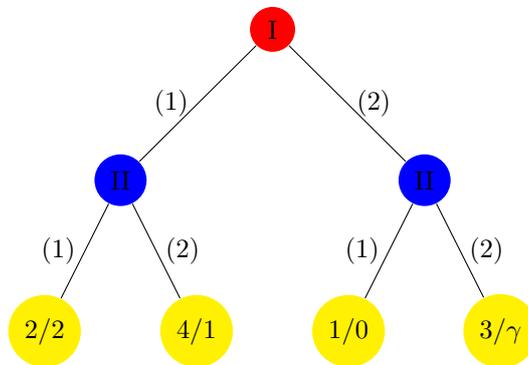


Figura 13: Albero delle mosse.

Possiamo attuare degli algoritmi su grafi per ottenere la soluzione che vogliamo. In particolare possiamo cominciare togliendo le scelte non razionali, ossia le scelte in cui il giocatore di turno ci perde. Questo metodo è detto **Induzione a Ritroso**[5],[2] se cominciamo a cancellare nodi e archi partendo dal livello più basso.

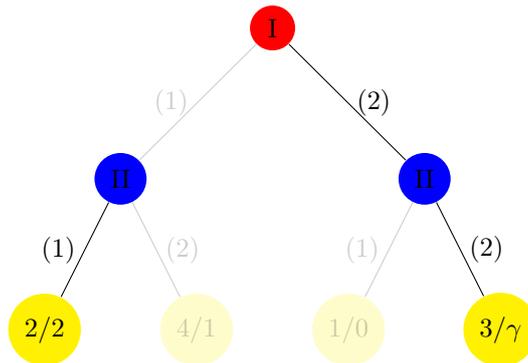


Figura 14: Albero delle mosse dopo l'eliminazione di mosse tramite l'induzione a ritroso.

In questo caso, i nodi  $4/1$  e  $1/0$  non convengono al secondo giocatore, dunque vengono eliminati. Restano  $2/2$  e  $3/\gamma$ , ma solo il secondo interessa al primo giocatore. Una volta finita l'eliminazione di nodi e archi, se c'è un nodo ancora connesso con la radice, allora è un equilibrio del gioco.

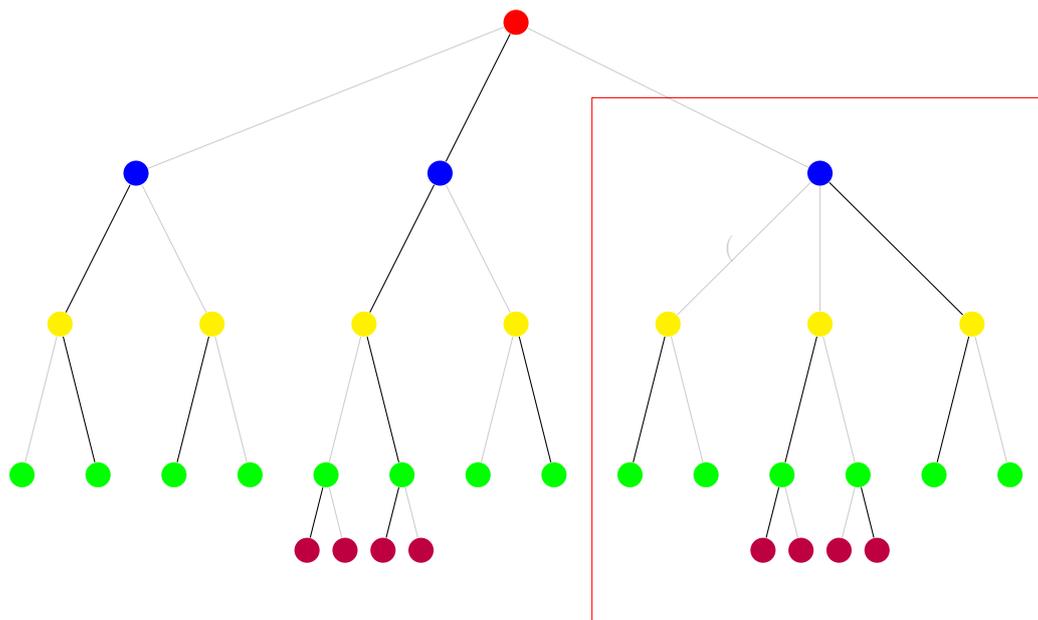


Figura 15: Albero delle mosse dopo l'eliminazione di mosse tramite l'induzione a ritroso. Il rettangolo rosso individua un sottogioco.

Inoltre, preso un qualsiasi albero, possiamo estrarre un sottoalbero, che individuerà un **Sottogioco**, i cui equilibri saranno ancora le foglie collegate alla nuova radice dopo l'induzione a ritroso. In particolare, l'equilibrio del gioco originale è un equilibrio per tutti i sottogiochi che lo contengono. In questo caso, si dice **Equilibrio Perfetto nei Sottogiochi**. Vediamo un po' di esempi dati da alberi.

### Esempio

- Prendiamo l'albero

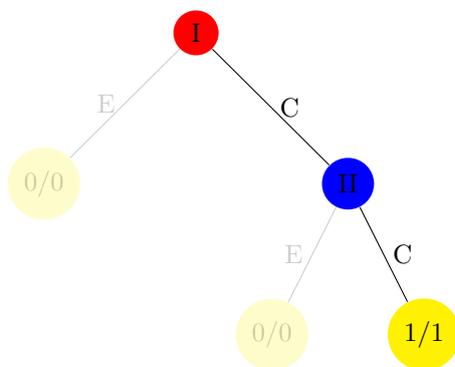


Figura 16: Albero delle mosse dopo l'eliminazione di mosse tramite l'induzione a ritroso.

In questo esempio l'unico equilibrio perfetto è 1/1. Il secondo giocatore ha scelta solo se il primo gioca C, dunque la matrice è

	$C \rightarrow E$	$C \rightarrow C$
E	0/0	0/0
C	0/0	1/1

Gli equilibri sono in rosso, e oltre a  $(C, C)$  c'è anche  $(E, E)$ .

- Per la battaglia dei sessi sequenziale abbiamo

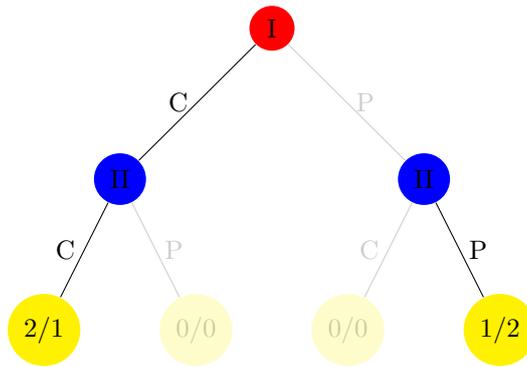


Figura 17: Albero delle mosse dopo l'eliminazione di mosse tramite l'induzione a ritroso della battaglia dei sessi.

In questo esempio l'unico equilibrio perfetto è  $(C, C)$ . La matrice è

	$(C \rightarrow C), (P \rightarrow C)$	$(C \rightarrow C), (P \rightarrow P)$	$(C \rightarrow P), (P \rightarrow C)$	$(C \rightarrow P), (P \rightarrow P)$
C	2/1	2/1	0/0	0/0
P	0/0	1/2	0/0	1/2

Gli equilibri sono in rosso. Si vede anche qui che il primo che muove ha il guadagno maggiore.

► La battaglia dei millepiedi è

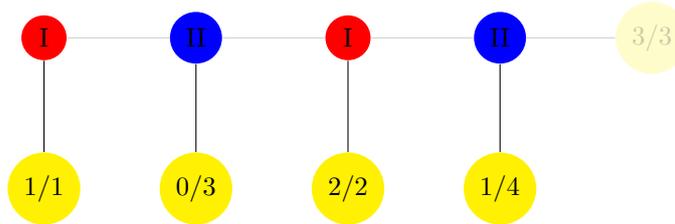


Figura 18: Albero delle mosse dopo l'eliminazione di mosse tramite l'induzione a ritroso del gioco dei millepiedi.

In questo esempio l'unico equilibrio perfetto è  $1/1$ , ossia fare finire subito la partita, nonostante i premi alti più avanti. Se i due giocatori si fossero fidati l'uno dell'altro ci avrebbero entrambi guadagnato. Allungando il millepiedi, si potrebbe arrivare a  $n/n$  arbitrario.

► In un gioco, 3 coinquilini stanno votando per cambiare le regole. I primi due sono felici se si cambiano, mentre il terzo no. L'esito è a seconda della maggioranza. Se il gioco è sequenziale, abbiamo

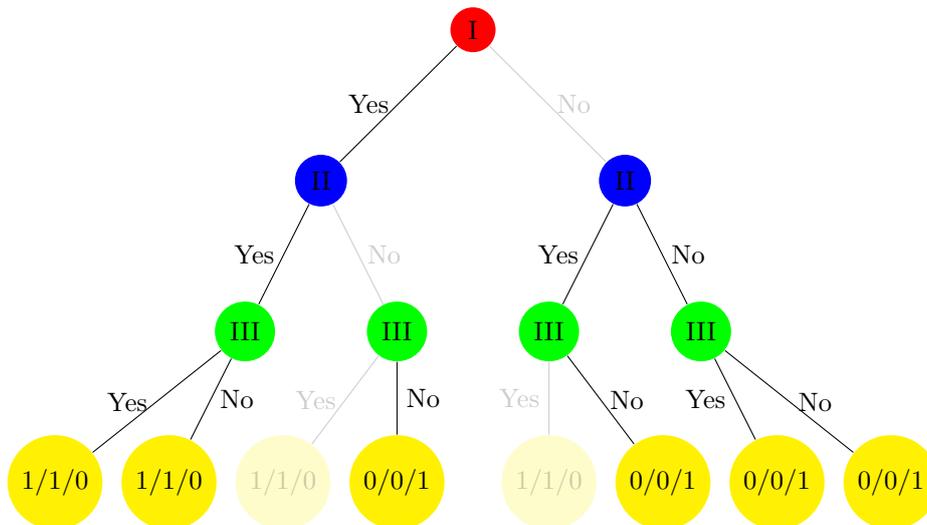


Figura 19: Albero delle mosse dopo l'eliminazione di mosse tramite l'induzione a ritroso dei coinquilini.

In questo caso, ci sono più opzioni con lo stesso punteggio, e dunque anche più equilibri (Yes, Yes, Yes) e (Yes, Yes, No), ossia, se i primi due coinquilini si mettono d'accordo a cambiare le regole, il terzo non può farci niente.

- Poniamo invece ci siano solo 2 coinquilini, e debbano scegliere tra 3 opzioni  $a, b, c$ . Il primo coinquilino ha una scala di preferenza  $a > b > c$ , mentre il secondo è opposto  $c > b > a$ . Inoltre il primo giocatore può porre un veto su una delle tre opzioni, ossia quella non si può scegliere. Per questo, il gioco viene chiamato *Votazione con Veto*.

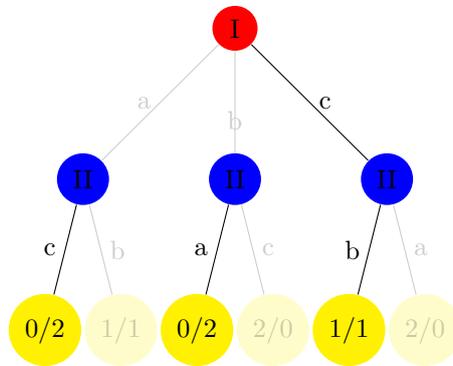


Figura 20: Albero delle mosse dopo l'eliminazione di mosse tramite l'induzione a ritroso della votazione con veto.

L'unico equilibrio perfetto qui è dato da  $(c, b)$ .

27-4-18

Analizziamo nell'induzione a ritroso i casi in cui l'equilibrio non è unico. Per esempio prendiamo il gioco

### Esempio

- Prendiamo l'albero

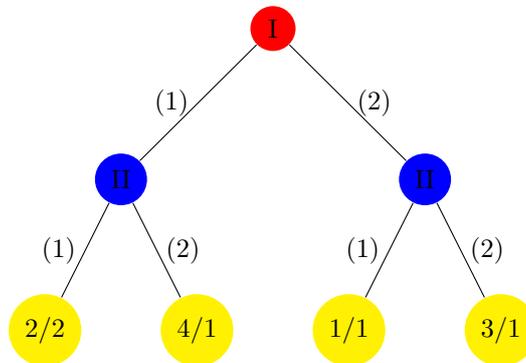


Figura 21: Albero delle mosse.

La matrice delle mosse è

	$(1 \rightarrow 1), (2 \rightarrow 1)$	$(1 \rightarrow 1), (2 \rightarrow 2)$	$(1 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 1)$	$(1 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 2)$
(1)	2/2	2/2	4/1	4/1
(2)	1/1	3/1	1/1	3/1

Facendo un primo passo di induzione cancelliamo un solo nodo

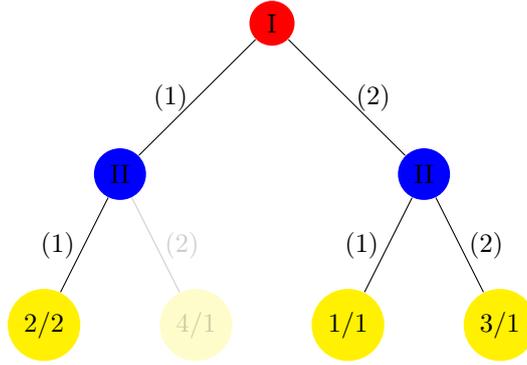


Figura 22: Albero delle mosse dopo un passo di induzione a ritroso.

Adesso, per andare avanti, il primo giocatore deve decidere se essere ottimista e pessimista. Nel primo caso cancella il collegamento (1) nella speranza di ottenere un guadagno di 3, mentre nel secondo cancella il collegamento (2) assicurandosi un guadagno di 2. Notiamo che i due equilibri del gioco sono esattamente i due nodi che troviamo operando le due differenti scelte.

## 19 Giochi Leader Multifollower

Torniamo ad analizzare l'oligopolio a 3 aziende. Abbiamo  $S_i = \mathbb{R}^+$  e

$$\mu_i = s_i(T - (s_1 + s_2 + s_3) - c).$$

Supponiamo che sia un gioco sequenziale in cui la prima azienda agisca prima, e le altre due agiscano in contemporanea dopo. Analizziamo due casi:

$T - s_1 \leq c$ : In questo caso, per il secondo e terzo giocatore si ha

$$\mu_i = s_i((T - s_1 - c) - (s_2 + s_3)).$$

In questo caso, l'utilità è sempre negativa, dunque non conviene produrre  $s_2 = s_3 = 0$ . Se la prima vuole massimizzare il proprio guadagno, dovrebbe quindi massimizzare

$$\mu_1 = s_1(T - s_1 - c)$$

ma anche questa è negativa, e il meglio che può fare è azzerarla con  $s_1 = T - c$ . In questo caso, quindi, avremmo  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ .

$T - s_1 > c$ : Adesso le altre aziende possono agire come in un duopolio, in cui il nuovo prezzo massimo è  $\hat{T} = T - s_1$  (da notare che  $\hat{T} > c$  è esattamente la condizione che stiamo ponendo). Sappiamo già il risultato del Duopolio di Cournot che è

$$s_2 = s_3 = \frac{\hat{T} - c}{3} \quad \mu_2 = \mu_3 = \frac{(\hat{T} - c)^2}{9}.$$

Dunque il primo giocatore massimizza

$$\mu_1 = s_1(T - (s_1 + s_2 + s_3) - c) = s_1 \left( T - s_1 - c - \frac{2}{3}(T - s_1 - c) \right) = s_1(T - s_1 - c)/3$$

ottenendo  $s_1 = (T - c)/2$  e  $\mu_1 = (T - c)^2/12$ . Riassumendo, avremo

$$\begin{cases} s_1 = \frac{T-c}{2} \\ s_2 = s_3 = \frac{T-c}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_1 = \frac{(T-c)^2}{12} \\ \mu_2 = \mu_3 = \frac{(T-c)^2}{36} \end{cases}$$

Notiamo che la produzione totale  $s_1 + s_2 + s_3 = 5(T - c)/6$  è maggiore di Stackelberg, ma l'utilità totale  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 5(T - c)^2/36$  è minore. Questo ci dice che quando c'è più competizione, il costo cala.

Questo è un esempio di

**Definizione 28.** Un *Gioco Leader Multifollower* è composto da

- Un leader che decide la prima mossa  $s_1 \in S_1$
- $n - 1$  follower che partecipano contemporaneamente ad un gioco parametrico in  $s_1$

$$G(s_1) = \{\{2, \dots, n\}, \{S_i\}_{i>1}, \{\mu_i(s_1, \cdot)\}_{i>1}\}$$

- Indichiamo con  $EN(s_1)$  gli equilibri del gioco  $G(s_1)$ .

Notiamo che se  $EN(s_1)$  è sempre un solo punto, allora il migliore  $\bar{s}_1$  è scelto come

$$\bar{s}_1 = \arg \max\{\mu_1(s_1, EN(s_1)) \mid s_1 \in S_1\}.$$

Se invece c'è qualche  $EN(s_1)$  che è composto da più punti, il primo giocatore può giocare in maniera ottimista

$$\max\{\mu_1(s_1, s_{-1}) \mid s_1 \in S_1, s_{-1} \in EN(s_1)\}$$

o pessimista

$$\max\left\{\min_{s_{-1} \in EN(s_1)} \mu_1(s_1, s_{-1}) \mid s_1 \in S_1\right\}$$

Per quanto già visto, se le  $\mu_i(\cdot, s_{-i})$  sono concave e  $C^1$ , su  $S_i$  convessi chiusi, allora si possono sostituire le condizioni con disequaglianze. In particolare, se

$$F(s) = (-\nabla_i \mu_i(s))_{i>1}$$

allora

$$s_{-1} \in EN(s_1) \iff F(s)^t(v_{-1} - s_{-1}) \geq 0 \quad \forall v_{-1} \in S_{-1}.$$

Sostituendo nei vincoli ottengo

$$\text{ottimista: } \max\{\mu_1(s_1, s_{-1}) \mid s_1 \in S_1, s_{-1} \in S_{-1}, F(s_1, s_{-1})^t(v_{-1} - s_{-1}) \geq 0 \quad \forall v_{-1} \in S_{-1}\}$$

$$\text{pessimista: } \max\left\{t \mid t \leq \mu_1(s_1, s_{-1}), s_1 \in S_1, s_{-1} \in S_{-1}, F(s_1, s_{-1})^t(v_{-1} - s_{-1}) \geq 0 \quad \forall v_{-1} \in S_{-1}\right\}$$

Se avessi più leader simultanei e più follower simultanei, avrei un gioco **Multileader Multifollower**.

### Esempio

- Analizziamo un ultimo gioco a 2 giocatori. Due investitori versano dei soldi in una banca. Dopo 1 anno la banca ha disposizione 6, e gli investitori possono decidere se ritirarsi dalla banca o meno. Se uno dei due decide di uscire, allora la banca manda fuori entrambi, e a seconda delle decisioni dei due, la quantità elargita ai due è

Anno 1	Esce	Resta
Esce	3/3	4/2
Resta	2/4	

Se restano entrambi, dopo due anni la banca ha a disposizione 20, e gli investitori decidono di nuovo se uscire o restare. La banca li paga in ogni caso, secondo le quantità

Anno 2	Esce	Resta
Esce	10/10	6/14
Resta	14/6	10/10

Applicando l'induzione a ritroso, possiamo prima analizzare il sottogioco del secondo anno, in cui l'unico equilibrio è dato da (Resta, Resta) e sostituirlo nel gioco del primo anno ottenendo

Ridotto	Esce	Resta
Esce	3/3	4/2
Resta	2/4	10/10

dove scopriamo di avere 2 equilibri (Esce, Esce) oppure ((Resta, Resta), (Resta, Resta)).

## 20 Nash Bargaining

Dato un gioco  $G$ , mettiamo che i giocatori possano decidere se mettersi d'accordo o meno. Poniamo anche che nel caso non si mettano d'accordo, ottengono un'utilità  $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n$  fissata. I giocatori dunque dovranno confrontare  $\mathbf{u}^*$  con gli elementi di  $\mathcal{U} := \{\boldsymbol{\mu}(s) | s \in S\}$ .

**Definizione 29.** Un *Problema di Negoziazione* è dato dalla coppia  $(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)$  dove  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n$ .

Notiamo che nel caso collaborativo, è come se ci fosse un solo giocatore con il set di strategie  $S$ , e mettersi nel campo delle strategie miste vuol dire dare una probabilità ad ogni strategia diversa in  $S$ . Inoltre un qualsiasi punto dell'involuppo convesso di un insieme in  $\mathbb{R}^n$  è sempre combinazione convessa di al massimo  $n + 1$  dei suoi punti. Dunque l'insieme  $\mathcal{U}$  si trasforma nel suo involuppo convesso

$$\text{conv}(\mathcal{U}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \mathbf{u}^k \mid \mathbf{u}^k \in \boldsymbol{\mu}(S), \lambda_k \geq 0, \sum_k \lambda_k = 1 \right\}$$

dove  $\mathbf{u}^k = \boldsymbol{\mu}(s^k)$ , e il vettore  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}^k$  è l'utilità associata alla strategia mista in cui gli  $s^k$  vengono giocati con probabilità  $\lambda_k$ .

**Definizione 30.** In un problema di negoziazione sono detti *Assiomi di Nash* le seguenti proprietà di  $\mathcal{U}$  e  $\mathbf{u}^*$ :

1.  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso e compatto
2.  $\exists \mathbf{u} \in \mathcal{U}$  tale che  $\mathbf{u} > \mathbf{u}^*$  componente per componente.

Chiamiamo  $\mathfrak{B}$  l'insieme delle coppie  $(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)$  che rispettano gli assiomi di Nash.

Sotto questi assiomi, in particolare la seconda, ha senso cercare di mettersi d'accordo, perché c'è una strategia in cui tutti guadagnano rispetto a  $\mathbf{u}^*$ .

Nash si è chiesto se esista una funzione

$$\psi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che indichi la "migliore utilità" per la coppia  $(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) \in \mathfrak{B}$ . In particolare vogliamo che rispetti le seguenti proprietà:

1. **Ammissibilità:**  $\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) \in \mathcal{U}$
2. **Razionalità:**  $\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) \geq \mathbf{u}^*$
3. **Ottimalità di Pareto:** se  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  e  $\mathbf{u} \geq \psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)$ , allora  $\mathbf{u} = \psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)$
4. Se  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$  è un sottoinsieme per cui  $(\mathcal{U}_1, \mathbf{u}^*) \in \mathfrak{B}$ , allora

$$\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) \in \mathcal{U}_1 \implies \psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) = \psi(\mathcal{U}_1, \mathbf{u}^*)$$

5. **Invarianza Traslazionale:** siano  $\alpha_i > 0$  e  $\beta_i$  reali. Allora

$$\hat{\mathbf{u}}_i^* = \alpha_i \mathbf{u}_i^* + \beta_i, \quad \hat{\mathcal{U}} = \{(\alpha_i u_i + \beta_i)_i | \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \implies \psi(\hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathbf{u}}^*)_i = \alpha_i \psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)_i + \beta_i$$

6. **Simmetria:** se esistono due indici  $i, j$  su cui  $\mathcal{U}$  è simmetrico, ossia

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) \in \mathcal{U} \iff (u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$$

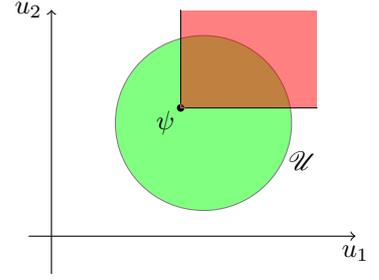
e  $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_j^*$ , allora  $\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)_i = \psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)_j$ .

Una tale  $\psi$  si chiama **Funzione di Negoziazione**. Notiamo che la condizione 3. ci dice che  $\psi$  può essere preso solo sulla frontiera di  $\mathcal{U}$ , e in realtà solo su una sezione particolare della frontiera, chiamata **Frontiera di Pareto**.

In realtà esiste un'unica funzione di negoziazione.

**Teorema 18.** *Esiste un'unica funzione di negoziazione  $\psi$  che soddisfi le condizioni 1 – 6. In particolare,  $\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)$  è l'unica soluzione di*

$$\max \left\{ \prod_{k=1}^n (x_k - u_k^*) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \mathbf{x} \geq \mathbf{u}^* \right\}.$$



*Dimostrazione.* Sia  $g(\mathbf{x}) := \prod_{k=1}^n (x_k - u_k^*)$ . Notiamo innanzitutto che per gli assiomi di Nash, esiste  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  per cui  $g(\mathbf{u}) > 0$ , dunque un massimo di  $g$  non ha nessuna componente uguale a  $\mathbf{u}^*$ . Poniamo che esistano due massimi  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  di  $g(\mathbf{x})$  sugli  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  per cui  $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}^*$ . Il punto  $\mathbf{w} = (\mathbf{y} + \mathbf{z})/2$  è ancora dentro  $\mathcal{U}$  per convessità, e

$$g(\mathbf{w}) = \prod_{k=1}^n \left( \frac{y_k - u_k^*}{2} + \frac{z_k - u_k^*}{2} \right) \geq \left( \prod_{k=1}^n (y_k - u_k^*) \prod_{k=1}^n (z_k - u_k^*) \right)^{1/2} = \sqrt{g(\mathbf{y})g(\mathbf{z})} = g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{z}).$$

Dunque anche  $\mathbf{w}$  è un massimo con  $\mathbf{w} \geq \mathbf{u}^*$ , ossia  $g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{w})$ . L'unico caso in cui la disuguaglianza sopra è un'uguaglianza è quando  $y_k = z_k$  per ogni  $k$ , ossia  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ . Pertanto esiste un solo unico di  $g(\mathbf{x})$  in  $\mathcal{U}$  con  $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}^*$ .

Prendiamo

$$\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) = \arg \max \left\{ \prod_{k=1}^n (x_k - u_k^*) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \mathbf{x} \geq \mathbf{u}^* \right\}$$

come definizione di  $\psi$  e verifichiamo che soddisfa gli assiomi. 1,2 sono dati dai vincoli nel massimo. L'ottimalità di Pareto è facile da verificare, poiché

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{v} \geq \mathbf{u}^* \implies u_k - u_k^* \geq v_k - u_k^* \quad \forall k \implies g(\mathbf{u}) \geq g(\mathbf{v})$$

e l'unicità del massimo conclude. Con l'unicità del massimo anche la 4 diventa evidente. Per la 5, notiamo che, se chiamiamo  $\hat{g}$  la funzione relativa a  $(\mathcal{U}, \hat{\mathbf{u}}^*)$ , otteniamo

$$\hat{g}((\alpha_i u_i + \beta_i)_i) = \prod_{k=1}^n (\alpha_k u_k + \beta_k) - (\alpha_k u_k^* + \beta_k) = g(\mathbf{u}) \prod_{k=1}^n \alpha_k$$

e visto che  $\alpha_k > 0$  per ogni  $k$ , allora  $\mathbf{u}$  è un massimo per  $g$  se e solo se  $\hat{\mathbf{u}}$  è un massimo per  $\hat{g}$ . Per la simmetria, se abbiamo un massimo  $\mathbf{u}$ , e scambiamo le componenti  $i, j$ , il valore di  $g(\mathbf{u})$  non varia, e dato che il massimo è unico, allora le componenti  $i, j$  del massimo devono essere uguali.

Dimostriamo ora che se  $\psi$  soddisfa 1 – 6, allora deve essere il massimo di  $g(\mathbf{x})$  sugli  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  per cui  $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}^*$ . D'ora in poi chiamiamo questo massimo  $\mathbf{z}$ . Chiamiamo

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n \left( \prod_{i \neq k} (z_i - u_i^*) \right) x_k, \quad \mathbf{w} \in \arg \max \{ h(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \mathbf{x} \geq \mathbf{u}^* \}.$$

Sia  $\mathbf{z}^\varepsilon = \mathbf{z} + \varepsilon(\mathbf{w} - \mathbf{z})$  con  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Otteniamo

$$\begin{aligned} g(\mathbf{z}^\varepsilon) &= \prod_{k=1}^n (z_k + \varepsilon(w_k - z_k) - u_k^*) = \prod_{k=1}^n (z_k - u_k^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} (w_k - z_k)(z_i - u_i^*) + O(\varepsilon^2) \\ &= g(\mathbf{z}) + \varepsilon(h(\mathbf{w}) - h(\mathbf{z})) + O(\varepsilon^2) \\ \implies 0 &\geq g(\mathbf{z}^\varepsilon) - g(\mathbf{z}) = \varepsilon(h(\mathbf{w}) - h(\mathbf{z})) + O(\varepsilon^2) \quad \forall \varepsilon \end{aligned}$$

e per  $\varepsilon$  piccolo si vede che  $h(\mathbf{w}) - h(\mathbf{z}) \leq 0$ , da cui  $\mathbf{z}$  è un massimo di  $h$ . Siano ora

$$\mathcal{U}_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{u}^* \} \subseteq H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{u}^*, h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{z}) \}.$$

Operiamo la trasformazione affine

$$\varphi : (x_i)_i \mapsto \left( \frac{x_i - u_i^*}{z_i - u_i^*} \right)_i$$

dove  $z_i - u_i^* > 0$  per ogni  $i$  per gli assiomi di Nash. Notiamo che stiamo portando  $\mathbf{u}^*$  a zero, e  $\mathbf{z}$  al vettore  $\mathbf{e}$  con tutte le componenti pari a 1. Mediante la stessa, avremo che

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{z}) &\iff \sum_{k=1}^n x_k \prod_{i \neq k} (z_i - u_i^*) \leq \sum_{k=1}^n z_k \prod_{i \neq k} (z_i - u_i^*) \\ &\iff \sum_{k=1}^n (x_k - u_k^*) \prod_{i \neq k} (z_i - u_i^*) \leq \sum_{k=1}^n (z_k - u_k^*) \prod_{i \neq k} (z_i - u_i^*) \\ &\iff \sum_{k=1}^n \varphi(\mathbf{x})_k (z_k - u_k^*) \prod_{i \neq k} (z_i - u_i^*) \leq \sum_{k=1}^n \varphi(\mathbf{z})_k (z_k - u_k^*) \prod_{i \neq k} (z_i - u_i^*) \\ &\iff \sum_{k=1}^n \varphi(\mathbf{x})_k \leq n \end{aligned}$$

dunque lo spazio  $H$  si trasforma in

$$\hat{H} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \sum_{k=1}^n y_k \leq n \right\}.$$

Notiamo che  $\hat{H}$  è convesso, compatto, ed esiste un elemento di  $\hat{H}$  che ha tutte le componenti positive, dunque  $(\hat{H}, \mathbf{0})$  rispetta gli assiomi di Nash.  $\hat{H}$  è simmetrico rispetto a tutte le componenti, dunque  $\psi$  deve ritornare un vettore del tipo  $c\mathbf{e}$ . L'ottimalità di Pareto ci costringe a scegliere un vettore di questo tipo sul bordo, ma l'unico che rispetta la condizione è  $\psi(\hat{H}, \mathbf{0}) = \mathbf{e} = \varphi(\mathbf{z})$ . Applicando la trasformazione inversa, otteniamo  $\psi(H, \mathbf{u}^*) = \mathbf{z}$ . Ma  $\mathbf{z}$  appartiene sia ad  $\mathcal{U}_1$  che a  $H$ , che soddisfano gli assiomi di Nash, dunque per assioma 4 avremo

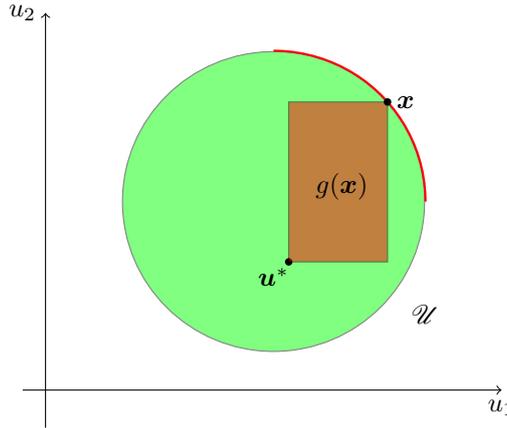
$$\psi(H, \mathbf{u}^*) = \mathbf{z} \implies \psi(\mathcal{U}_1, \mathbf{u}^*) = \mathbf{z}.$$

Inoltre  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ , e per la sua definizione e assiomi 1,2, sicuramente  $\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) \in \mathcal{U}_1$ , dunque per assioma 4

$$\psi(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*) = \psi(\mathcal{U}_1, \mathbf{u}^*) = \mathbf{z}.$$

□

In dimensione  $n = 2$  osserviamo che trovare  $\psi$ , ossia massimizzare  $g(\mathbf{x})$ , è equivalente a massimizzare l'area del rettangolo tra  $\mathbf{u}^*$  e la frontiera di Pareto.



Il problema di massimizzare  $g$  si può riscrivere come

$$\arg \max \left\{ \prod_{k=1}^n (x_k - u_k^*) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \mathbf{x} \geq \mathbf{u}^* \right\} = \arg \max \left\{ \sum_{k=1}^n \log(x_k - u_k^*) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \mathbf{x} \geq \mathbf{u}^* \right\}$$

e le funzioni logaritmiche sono strettamente concave in  $\mathbf{x}$ , e da qui si poteva concludere che esiste un unico massimo. Se leviamo la condizione di Pareto, inoltre, si può concludere che singolarmente per gli  $(\mathcal{U}, \mathbf{u}^*)$  la funzione  $\psi$  può valere il massimo di  $g$ , oppure  $\mathbf{u}^*$  se  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}$ .

## 21 Giochi Cooperativi

**Definizione 31.** Dato l'insieme di giocatori  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , un **Gioco Cooperativo**[4] è dato da una funzione che associa ad ogni sottoinsieme di  $N$  una utilità

$$v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$$

dove per convenzione  $v(\emptyset) = 0$ . Per brevità, indicheremo il valore dei singoletti  $v(\{i\})$  come  $v(i)$ .

Solitamente si suppone che i giocatori si raggruppino formando una partizione di  $N$ , e che l'utilità di un sottoinsieme (chiamato coalizione) non dipende dalle altre. Inoltre si suppone che le utilità delle coalizioni siano maggiori della somma delle utilità dei singoli, altrimenti non ci sarebbe guadagno a cooperare. In questo caso, si chiamano **Giochi ad Utilità Trasferibile**.

**Definizione 32.** Un gioco cooperativo si dice **Semplice** se la funzione utilità ha valori in  $\{0, 1\}$ .

### Esempio

- Un esempio è dato dal Consiglio dell'ONU, in cui partecipano 15 paesi, e i paesi permanenti  $P$  possono dare un veto ad ogni proposta. Ha senso formare una coalizione solo in caso si raggiunga la maggioranza, e tutti i paesi permanenti siano nella coalizione:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & P \subseteq S, \quad |S| > 7 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Un altro esempio è una votazione in cui ogni giocatore ha un peso  $w_i$ , e la proposta viene accettata se si raggiunge una quota  $q$ :

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4-5-18

Notiamo che possiamo trasformare un gioco non cooperativo  $G = (N, S, \mu)$  in uno cooperativo con gli stessi giocatori. Dato  $T \subseteq N$ , siano

$$S(T) := \prod_{i \in T} S_i \quad v(T) := \max_{s \in S(T)} \min_{x \in S(N \setminus T)} \sum_{i \in T} \mu_i(s, x)$$

ossia  $v(T)$  è il guadagno minimo che avrebbero i giocatori in  $T$  a collaborare contro i restanti  $N \setminus T$ .

**Definizione 33.** Un gioco cooperativo è detto

**Superadditivo**

$$v(T_1) + v(T_2) \leq v(T_1 \cup T_2) \quad \forall T_1 \cap T_2 = \emptyset$$

**Monotono**

$$T_1 \subseteq T_2 \implies v(T_1) \leq v(T_2) \quad \forall T_1, T_2$$

Notiamo che la definizione di gioco superadditivo si espande all'unione di un numero finito di  $T_i$  disgiunti, pertanto le utilità delle coalizioni sono maggiori della somma delle utilità dei singoli. Se la funzione  $v$  fosse a valori nonnegativi, allora un gioco superadditivo sarebbe monotono.

**Definizione 34.** Dati due giochi cooperativi  $(N, v)$  e  $(N, u)$ , vengono detti **Strategicamente Equivalenti** se esistono un  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  per cui

$$u(T) = av(T) + \mathbf{b}(T) \quad \forall T \subseteq N,$$

dove

$$\mathbf{b}(T) = \sum_{i \in T} b_i.$$

Questa è una relazione di equivalenza.

La superadditività è invariante per equivalenza, ma la monotonia no. Per esempio, se  $v(T) = |T|$  e  $u(T) = -|T|$ , allora i giochi sono equivalenti con  $a = 1$  e  $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}$ . Però  $v$  è monotono, mentre  $u$  non lo è.

Questa relazione ha 3 classi d'equivalenza.

**Definizione 35.**  $(N, v)$  si dice **0 -  $\gamma$  Normalizzato** se  $v(i) = 0$  per ogni  $i \in N$  e  $v(N) = \gamma$ , dove  $\gamma$  può valere 0, 1 o -1.

**Lemma 28.** Dato un gioco  $(N, v)$ , allora

1. è equivalente ad un gioco 0 - 1 normalizzato se e solo se  $\sum_{i \in N} v(i) < v(N)$
2. è equivalente ad un gioco 0 - 0 normalizzato se e solo se  $\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$
3. è equivalente ad un gioco 0 - (-1) normalizzato se e solo se  $\sum_{i \in N} v(i) > v(N)$

*Dimostrazione.* Se cerchiamo  $a > 0, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  tali che il gioco risultante dalla trasformazione abbia  $u(i) = 0$  per ogni  $i$ , allora

$$av(i) + b_i = 0 \quad \forall i \implies b_i = -av(i) \quad \forall i.$$

Se vogliamo anche che  $u(N) = \gamma$ , allora

$$av(N) + \sum_i b_i = \gamma \implies a \left[ v(N) - \sum_i v(i) \right] = \gamma.$$

Ciò vuol dire che  $(N, v)$  è equivalente a un 0 -  $\gamma$  normalizzato se e solo se

$$\exists a > 0 : a \left[ v(N) - \sum_i v(i) \right] = \gamma \iff \text{sgn}(\gamma) = \text{sgn} \left[ v(N) - \sum_i v(i) \right]$$

dunque basta scegliere il  $\gamma$  opportuno tra  $\gamma = 0, 1, -1$  per ottenere che ogni gioco è sempre equivalente ad un 0 -  $\gamma$  normalizzato, e l'unica condizione è il segno della differenza  $v(N) - \sum_i v(i)$ . Dato inoltre che ogni gioco è equivalente a sè stesso, le tre classi di equivalenza sono disgiunte.  $\square$

## 22 Imputazioni e Nucleo

Prendiamo una partizione  $\mathcal{B}$  di  $N$ , nel gioco  $(N, v)$ .

**Definizione 36.** Un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice

- **Socialmente o Collettivamente Razionale:**  $\mathbf{x}(S) = v(S) \quad \forall S \in \mathcal{B}$ .
- **Individualmente Razionale:**  $x_i \geq v(i) \quad \forall i \in N$ .

Ricordiamo che  $\mathbf{x}(S) := \sum_{i \in S} x_i$ . Il vettore  $x$  rappresenta il guadagno dei singoli, dunque la razionalità collettiva dice che tutto il guadagno della coalizione  $S$  viene distribuito tra i membri. La razionalità individuale dice che ad ogni giocatore conviene coalizzarsi piuttosto che restare da solo.

**Definizione 37.** Una **Imputazione** relativa al gioco  $G = (N, v)$  rispetto alla partizione  $\mathcal{B}$  è un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  che soddisfi la razionalità collettiva e individuale.

D'ora in poi consideriamo il caso in cui  $\mathcal{B} = \{N\}$ , ossia esista una sola coalizione che comprende tutti, e le imputazioni soddisfano  $\mathbf{x}(N) = v(N)$ . Possiamo definire

**Definizione 38.** Il **Nucleo** relativo al gioco  $G = (N, v)$  è un sottoinsieme delle imputazioni

$$C(N, v) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}(S) \geq v(S) \forall S \subseteq N, \quad \mathbf{x}(N) = v(N) \}.$$

Per convenzione  $x(\emptyset) = v(\emptyset) = 0$ . Notiamo che il nucleo è sempre un poliedro limitato, dunque in particolare è convesso e compatto, e contenuto nell'iperpiano  $\mathbf{x}(N) = v(N)$ . Inoltre, se  $(N, v)$  e  $(N, av + \mathbf{b})$  sono equivalenti strategicamente, un semplice calcolo mostra che

$$aC(N, v) + \mathbf{b} = C(N, av + \mathbf{b}).$$

Cerchiamo ora le imputazioni "migliori".

**Definizione 39.** Un'imputazione  $\mathbf{x}$  **Domina** un'imputazione  $\mathbf{y}$  tramite la coalizione  $S \subseteq N$  se

1.  $x_i > y_i \quad \forall i \in S$
2.  $\mathbf{x}(S) \leq v(S)$

Un'imputazione  $\mathbf{x}$  è **Non Dominata** se non esiste un'imputazione  $\mathbf{y}$  e una coalizione  $S \subseteq N$  tali che  $\mathbf{y}$  domini  $\mathbf{x}$  tramite  $S$ .

**Lemma 29.** Se  $\mathbf{x} \in C(N, v)$ , allora  $\mathbf{x}$  è non dominata.

*Dimostrazione.* Se esistesse  $\mathbf{y}$  che domini  $\mathbf{x}$  su  $S$ , allora

$$v(S) \leq \mathbf{x}(S) = \sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i = \mathbf{y}(S) \leq v(S)$$

assurdo. □

**Lemma 30.** Se  $(N, v)$  è superadditivo, allora

$$C(N, v) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ è non dominato} \}$$

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto che gli elementi del nucleo non sono dominati. Prendiamo dunque  $\mathbf{x}$  un'imputazione non dominata. Se non appartenesse al nucleo, allora esisterebbe  $S \subseteq N$  per cui  $\mathbf{x}(S) < v(S)$ , e notiamo che  $S \neq N$ . Definiamo il vettore  $\mathbf{y}$  per cui

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{v(S) - \mathbf{x}(S)}{|S|} & i \in S \\ v(i) + \frac{v(N) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(i)}{n - |S|} & i \notin S \end{cases}$$

Mostriamo che  $\mathbf{y}$  è un'imputazione che domina  $\mathbf{x}$  su  $S$ , per ottenere l'assurdo.

$$\mathbf{y}(N) = \mathbf{x}(S) + v(S) - \mathbf{x}(S) + \sum_{i \notin S} v(i) + v(N) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(i) = v(N)$$

$$v(N) \geq v(S) + \sum_{i \notin S} v(i) \text{ (superadditività)} \implies y_i \geq v(i) \quad \forall i \notin S$$

$$v(S) > \mathbf{x}(S) \implies y_i > x_i \geq v(i) \quad \forall i \in S$$

Con questo abbiamo mostrato che  $\mathbf{y}$  è un'imputazione e che  $y_i > x_i$  su  $S$ . Per mostrare la dominanza manca solo

$$\mathbf{y}(S) = \mathbf{x}(S) - v(S) + v(S) = v(S).$$

□

### Esempio

- Prendiamo un gioco a 3 giocatori con

$$v(S) = \begin{cases} 0 & S = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ 1 & S = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\} \\ 3 & S = N \end{cases}$$

Questo è superadditivo e il suo nucleo sono i vettori ad entrate nonnegative a somma 3, le cui somme a 2 a 2 siano maggiori di 1.

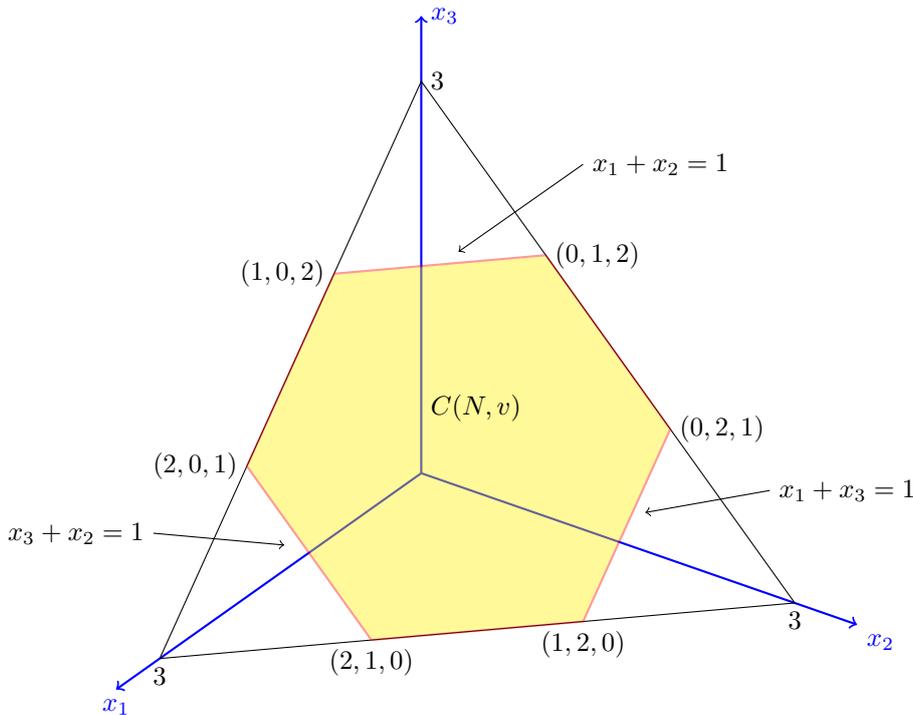


Figura 23: Disegno delle imputazioni e del nucleo.

10-5-18

- Gioco del guanto a tre giocatori. 1,2 hanno un guanto destro, mentre 3 ha un guanto sinistro. Se si riesce ad ottenere una coppia di guanti destro/sinistro, si vince. In questo caso,

$$v(S) = \begin{cases} 0 & S = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\} \\ 1 & S = \{2, 3\}, \{1, 3\}, N \end{cases}$$

e l'unico vettore nel nucleo è  $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$ . Questo rispecchia il fatto che  $x_3$  sia indispensabile.

- Se analizziamo invece il gioco a 3 giocatori

$$v(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq 1 \\ \rho & |S| = 2 \\ 1 & S = N \end{cases}$$

dove  $\rho \in [0, 1]$ , otteniamo che se  $\rho > 2/3$ , allora il nucleo è vuoto, poiché avremmo

$$2 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_1 + x_3) \geq 3\rho > 2.$$

Se invece  $\rho = 2/3$ , per lo stesso ragionamento sopra, l'unico vettore del nucleo è  $(1/3, 1/3, 1/3)$ . Se invece  $\rho < 2/3$ , ci troviamo in una situazione del tutto analoga alla Figura 23 (infatti, i due problemi sono equivalenti con  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,  $a = 1/3$ ,  $\rho = 1/3$ ).

Quando possiamo dire che il nucleo non è vuoto? Osserviamo che se  $\mathbf{x} \in C(N, v)$ , allora per ogni partizione  $\mathcal{B} = (T_1, \dots, T_k)$  si ha

$$\mathbf{x}(T_i) \geq v(T_i) \quad \forall i \implies v(N) = \mathbf{x}(N) = \sum_i \mathbf{x}(T_i) \geq \sum_i v(T_i).$$

Se un gioco è superadditivo, questo succede sempre. Inoltre, presa la partizione in cui ogni giocatore fa coalizione a sé, otteniamo che  $v(N) \geq \sum_i v(i)$ , da cui il gioco non è equivalente ad un  $0 - (-1)$  normalizzato, e questa è una condizione necessaria.

$$(N, v) \text{ equivalente a } 0 - (-1) \text{ normalizzato} \implies C(N, v) = \emptyset$$

**Lemma 31** (Bondareva-Shapley). *Il nucleo di  $(N, v)$  è non vuoto se e solo se*

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{x}(N) \mid \mathbf{x}(S) \geq v(S) \quad \forall S \subsetneq N \} \leq v(N)$$

*Dimostrazione.* Se c'è un vettore  $\mathbf{x}$  nel nucleo, sappiamo già che  $\mathbf{x}(S) \geq v(S)$  per ogni  $S$  e che  $\mathbf{x}(N) = v(N)$ .

Viceversa, notiamo che lo spazio che vogliamo minimizzare è chiuso e non vuoto. Inoltre, per ogni vettore  $\mathbf{x}$  nello spazio, si ha  $\mathbf{x}(N) = \sum_i x_i \geq \sum_i v(i)$ , da cui lo spazio è anche inferiormente limitato, e dunque un minimo  $m$  esiste. Chiamato  $\mathbf{z}$  il vettore che realizza  $\mathbf{z}(N) = m$ , avremo per ipotesi  $\mathbf{z}(N) \leq v(N)$  e  $\mathbf{z}(S) \geq v(S)$  per ogni  $S \subsetneq N$ . Definiamo il vettore

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \frac{v(N) - \mathbf{x}(N)}{n} \mathbf{e}$$

e notiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(S) &= \mathbf{z}(S) + \frac{|S|}{n} (v(N) - \mathbf{z}(N)) \geq \mathbf{z}(S) \geq v(S) \quad \forall S \subsetneq N \\ \mathbf{y}(N) &= \mathbf{z}(N) + v(N) - \mathbf{z}(N) = v(N) \end{aligned}$$

dunque  $\mathbf{y}$  è un vettore del nucleo. □

Preso il problema di minimizzazione (P)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{x}(N) \mid \mathbf{x}(S) \geq v(S) \quad \forall S \subsetneq N \}$$

vogliamo scriverne il duale. Scriviamola prima in formulazione primale:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{e} \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{v} \}$$

dove  $A \in \{0, 1\}^{(2^n - 1) \times n}$  è una matrice di 1 e 0, mentre  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$  e se la riga  $k$ -esima corrisponde al sottoinsieme  $S$ ,  $(A\mathbf{x})_k = \mathbf{x}(S)$  e  $v_k = v(S)$ . La matrice  $A$  ha come indici i sottoinsiemi  $S$  e i giocatori  $i$ , e  $A_{S,i} = 1 \iff i \in S$ . Il duale (D) è pertanto

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}} \{ \mathbf{y}^T \mathbf{v} \mid \mathbf{y}^T A = \mathbf{e}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}$$

che si riscrive come

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}} \left\{ \sum_{S \subsetneq N} y_S v(S) \mid \sum_{S \subsetneq N} y_S = 1 \quad \forall k \in N, \quad y_S \geq 0 \quad \forall S \subsetneq N \right\}$$

Notiamo che una soluzione ammissibile a questo problema è il vettore  $\mathbf{y}$  che assegna ai singoletti 1 e al resto degli insiemi 0. Il massimo è pertanto maggiore di  $\sum_i v(i)$ . L'insieme su cui stiamo cercando di massimizzare si chiama **Insieme Bilanciato dei Pesi**.

**Teorema 19.** *Dato un gioco  $(N, v)$ , le seguenti sono equivalenti:*

1. *Il nucleo non è vuoto*
2. *il valore di (P) è minore o uguale di  $v(N)$*
3. *il valore di (D) è minore o uguale di  $v(N)$*
4.  *$\sum_{S \subsetneq N} y_S v(S) \leq v(N)$  per ogni  $\mathbf{y}$  nell'insieme bilanciato dei pesi*

In questo caso, si dice che il gioco è **Bilanciato**.

*Dimostrazione.* 1 e 2 sono equivalenti da lemma 31. Notiamo che anche 3 e 4 sono equivalenti per la definizione di (D). In teoria potremmo dimostrare l'equivalenza tra 2 e 3 dicendo semplicemente che il gap di dualità è nullo, dato che il problema è di programmazione lineare. Proviamo a dare una dimostrazione alternativa.

Innanzitutto notiamo che se  $\mathbf{x} \in C(N, v)$ , allora

$$\sum_{S \subsetneq N} y_S v(S) \leq \sum_{S \subsetneq N} y_S x(S) = \sum_{i \in N} x_i \sum_{S \subsetneq N, i \in S} y_S = \mathbf{x}(N) = v(N)$$

per ogni  $\mathbf{y}$  nell'insieme bilanciato dei pesi.

Per dimostrare l'altra implicazione, notiamo che la proprietà 3 è invariante per equivalenza strategica. Infatti, se vale per  $(N, v)$ , e  $(N, av + \mathbf{b})$  è un gioco equivalente, si ha

$$\sum_{S \subsetneq N} a y_S v(S) + y_S \mathbf{b}(S) = a \sum_{S \subsetneq N} y_S v(S) + \sum_{S \subsetneq N} y_S \sum_{i \in S} b_i \leq av(N) + \sum_{i \in N} b_i \sum_{S \subsetneq N, i \in S} y_S = av(N) + \mathbf{b}(N).$$

Inoltre, anche la 1 è invariante perché

$$aC(N, v) + \mathbf{b} = C(N, av + \mathbf{b}).$$

Dato che l'equivalenza strategica è una relazione di equivalenza, allora possiamo dimostrare  $3 \implies 1$  sui giochi  $0 - \gamma$  normalizzati con  $\gamma = 0, 1, -1$ .

$\gamma = -1$ . Questo caso si può escludere, perché non vale 3, in quanto, scegliendo  $y_{\{i\}} = 1$  per ogni  $i$ , e  $y_S = 0$  altrimenti, otteniamo un elemento dell'insieme bilanciato dei pesi per cui  $\sum y_S v(S) = \sum v(i) > v(N)$ .

$\gamma = 0$ . In un gioco  $0 - 0$  normalizzato, l'unico vettore che ha speranza di essere nel nucleo è il vettore  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , poiché  $x_i \geq 0$  e  $\sum_i x_i = 0$ . Se per assurdo il nucleo fosse vuoto, allora esisterebbe un  $\bar{S}$  per cui  $v(\bar{S}) > 0$ . Se prendiamo un  $\mathbf{y}$  con

$$y_S = \begin{cases} 1 & S = \bar{S} \\ 1 & S = \{i\} \notin \bar{S} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora questo sta nell'insieme bilanciato dei pesi, ma

$$\sum_{S \subsetneq N} y_S v(S) = v(\bar{S}) + \sum_{i \notin \bar{S}} v(i) = v(\bar{S}) \leq v(N) = 0$$

assurdo.

$\gamma = 1$ . Notiamo che se  $v(S) \leq 0$  per ogni  $S$  diverso da  $N$ , allora  $\frac{1}{N}\mathbf{e}$  è un vettore del nucleo. Supponiamo quindi che esista almeno un  $S$  con  $v(S) > 0$ , e che il nucleo sia vuoto.

Consideriamo quindi il seguente gioco a 2 giocatori non cooperativo: il primo giocatore sceglie tra i giocatori  $S_1 = N$ , mentre il secondo sceglie tra le coalizioni  $S$  a valore positivo  $S_2 = \{S \subsetneq N \mid v(S) > 0\}$ . Il primo giocatore guadagna se il giocatore scelto sta nella coalizione scelta dal secondo, secondo le utilità

$$\mu_1 = \begin{cases} 1/v(S) & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases} \quad \mu_2 = \begin{cases} -1/v(S) & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases}$$

e il gioco è a somma zero. Sappiamo dunque che il gioco ammette un equilibrio tra le strategie miste. Chiamiamo  $\mathbf{z}$  il vettore di probabilità che rappresenta un equilibrio per il secondo giocatore, e  $\lambda$  il valore del gioco.

Se il primo giocatore scegliesse ogni  $i$  con probabilità uniforme  $1/n$ , allora al secondo giocatore conviene scegliere  $S$  il più piccolo possibile, ma  $S$  non può essere vuoto, dunque

$$\lambda \geq \min_{S \in S_2} \mu_1(\mathbf{e}/n, S) = \frac{1}{n} \min_{S \in S_2} \frac{|S|}{v(S)} > 0.$$

Inoltre, data una qualsiasi strategia mista  $\mathbf{x}$  del primo giocatore, questa soddisfa  $x_i \geq 0$  per ogni  $i$  e  $\mathbf{x}(N) = v(N) = 1$ , ma il nucleo è vuoto, e pertanto esiste un  $S \in S_2$  per cui  $0 \leq \mathbf{x}(S) < v(S)$ , e il secondo giocatore può scegliere  $S$ . Dunque, presa  $\bar{\mathbf{x}}$  strategia mista di equilibrio per il primo giocatore, e  $\bar{S}$  il sottoinsieme designato,

$$\lambda = \min_{S: v(S) > 0} \mu_1(\bar{\mathbf{x}}, S) \leq \mu_1(\bar{\mathbf{x}}, \bar{S}) = \frac{\bar{\mathbf{x}}(\bar{S})}{v(\bar{S})} < 1.$$

Dunque  $\lambda \in (0, 1)$ , e se definiamo

$$y_S = \begin{cases} \frac{z_S}{\lambda v(S)} & v(S) > 0 \\ 1 - \sum_{i \in T} y_T & S = \{i\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora è per costruzione un vettore bilanciato di pesi, e

$$\sum_{S \subsetneq N} y_S v(S) = \sum_{v(S) > 0} \frac{z_S}{\lambda} + \sum_{i \in N} v(i) y_{\{i\}} = \frac{1}{\lambda} > 1 = v(N)$$

assurdo. □

11-5-18

## 23 Gioco Ridotto di Davis Mashler

**Definizione 40.** Dato un gioco  $(N, v)$ , un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $S \subseteq N$ , possiamo definire il **Gioco Ridotto**  $(S, \mu)$  come

$$\mu(T) = \begin{cases} \max_{R \subseteq N \setminus S} v(R \cup T) - \mathbf{x}(R) & T \subsetneq S \\ \mathbf{x}(S) & T = S \end{cases}$$

**Teorema 20** (Davis-Mashler). Dato  $\mathbf{x} \in C(N, v)$ , allora la restrizione  $(x_i)_{i \in S}$  sta nel nucleo del gioco ristretto  $C(S, \mu)$  rispetto a  $\mathbf{x}$ .

*Dimostrazione.* Innanzitutto  $\mathbf{x}(S) = \mu(S)$  per definizione. Inoltre, se  $T \subsetneq S$ , allora

$$\mu(T) = \max_{R \subseteq N \setminus S} v(R \cup T) - \mathbf{x}(R) = \mathbf{x}(T) + \max_{R \subseteq N \setminus S} v(R \cup T) - \mathbf{x}(R \cup T) \leq \mathbf{x}(T).$$

□

Per ottenere qualcosa di simile al viceversa, abbiamo bisogno di certe ipotesi.

**Lemma 32.** Dato un  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  per cui  $\mathbf{x}(N) = v(N)$ , e per cui vale

$$(x_i, x_j) \in C(\{i, j\}, \mu) \quad \forall i \neq j$$

allora  $\mathbf{x} \in C(N, v)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $S \subsetneq N$ , e prendiamo  $i \in S$  e  $j \notin S$ . Avremo che

$$x_i \geq \mu(i) = \max_{R \subseteq N \setminus \{i, j\}} v(\{i\} \cup R) - \mathbf{x}(R)$$

ma se prendiamo  $R = S \setminus \{i\}$ , allora

$$x_i \geq v(S) - \mathbf{x}(S \setminus \{i\}) \implies \mathbf{x}(S) \geq v(S).$$

□

Rimettiamoci ora nell'ipotesi di  $\mathcal{B}$  partizione qualunque (finora abbiamo sempre supposto che  $\mathcal{B} = \{N\}$ ). Ricordiamo le definizioni

**Definizione 41.** Una **Imputazione** relativa al gioco  $G = (N, v)$  rispetto alla partizione  $\mathcal{B}$  è un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  che soddisfi

$$\mathbf{x}(S) = v(S) \quad \forall S \in \mathcal{B}, \quad x_i \geq v(i) \quad \forall i \in N.$$

Indichiamo l'insieme delle imputazioni rispetto a  $\mathcal{B}$  con  $X(\mathcal{B}, v)$ .

**Definizione 42.** Il **Nucleo** relativo al gioco  $G = (N, v)$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è un sottoinsieme delle imputazioni

$$C(N, v, \mathcal{B}) := \{ \mathbf{x} \in X(\mathcal{B}, v) \mid \mathbf{x}(S) \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N \}.$$

**Definizione 43.** Dato  $(N, v)$ , diciamo che  $(N, v^*)$  è una sua **Copertura Superadditiva** se

$$v^*(S) = \max_{\mathcal{B} \in \mathfrak{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T)$$

dove  $\mathfrak{P}(S)$  sono le partizioni di  $S$ .

Notiamo che il gioco  $(N, v^*)$  è superadditivo, in quanto

$$v^*(S \cup T) = \max_{\mathcal{B} \in \mathfrak{P}(S \cup T)} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T) \geq \max_{\mathcal{B}' \in \mathfrak{P}(S)} \sum_{T' \in \mathcal{B}'} v(T') + \max_{\mathcal{B}'' \in \mathfrak{P}(T)} \sum_{T'' \in \mathcal{B}''} v(T'') = v^*(S) + v^*(T).$$

Inoltre  $v^*$  è la più piccola funzione superadditiva maggiore di  $v$ : per qualunque altra  $z$  superadditiva maggiore di  $v$ , si ha

$$z(S) \geq \max_{\mathcal{B} \in \mathfrak{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{B}} z(T) \geq \max_{\mathcal{B} \in \mathfrak{P}(S)} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T) = v^*(S).$$

In particolare,  $v$  è superadditiva se e solo se coincide con  $v^*$ .

**Lemma 33.**

$$C(N, v, \mathcal{B}) = C(N, v^*) \cap X(\mathcal{B}, v)$$

*Dimostrazione.* Prendiamo  $\mathbf{x} \in C(N, v, \mathcal{B})$ . Sappiamo che è un'imputazione, dunque dobbiamo solo provare che sta in  $C(N, v^*)$ . Preso un  $S \subseteq N$ , sia  $T_1, \dots, T_k$  la partizione di  $S$  che realizza

$$v^*(S) = \sum_{i=1}^k v(T_i)$$

ed avremo che

$$\mathbf{x}(S) = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}(T_i) \geq \sum_{i=1}^k v(T_i) = v^*(S).$$

Inoltre,

$$v^*(N) \leq \mathbf{x}(N) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \mathbf{x}(B) = \sum_{B \in \mathcal{B}} v(B) \leq v^*(N)$$

da cui concludiamo  $\mathbf{x}(N) = v^*(N)$ .

Prendiamo ora  $\mathbf{x} \in C(N, v^*) \cap X(\mathcal{B}, v)$ . Dato che è un'imputazione, dobbiamo mostrare solo che  $\mathbf{x}(S) \geq v(S)$  per ogni  $S$ , ma

$$\mathbf{x}(S) \geq v^*(S) \geq v(S).$$

□

Dato  $v^*$ , esiste una partizione  $\mathcal{B} \in \mathfrak{P}(N)$  per cui

$$v^*(N) = \sum_{B \in \mathcal{B}} v(B)$$

dunque

$$\begin{aligned} C(N, v^*) &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}(S) \geq v^*(S) \forall S, \quad \mathbf{x}(N) = v^*(N) \} \\ &\subseteq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}(S) \geq v(S) \forall S, \quad \mathbf{x}(B) = v(B) \forall B \in \mathcal{B} \} \\ &= C(N, v, \mathcal{B}) \subseteq C(N, v^*) \\ \implies C(N, v^*) &= C(N, v, \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Se invece  $\mathcal{B}$  è una partizione per cui

$$v^*(N) > \sum_{B \in \mathcal{B}} v(B)$$

allora

$$\begin{aligned} C(N, v, \mathcal{B}) &= C(N, v^*) \cap X(\mathcal{B}, v) \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}(S) \geq v^*(S) \forall S, \quad \mathbf{x}(B) = v(B) \forall B \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{x}(N) = v^*(N) \} = \emptyset \end{aligned}$$

quindi il nucleo è non vuoto solo quando abbiamo scelto la partizione in modo da massimizzare la somma dei valori delle coalizioni.

## 24 Giochi di Mercato

Dato un insieme di mercanti  $N$ , e un insieme di  $p$  beni diversi, ogni mercante ha una certa quantità di beni espresso da un vettore  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}_+^p$ . Inoltre ogni mercante ha una funzione concava di utilità

$$\mu_i : \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}_+$$

che gli dice quanto valgono i suoi beni. Pensiamolo come gioco cooperativo, in cui

$$S \subseteq N \implies v(S) = \max \left\{ \sum_{i \in S} \mu_i(\mathbf{z}_i) \mid \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}_+^p, \quad \sum_{i \in S} \mathbf{z}_i = \sum_{i \in S} \mathbf{w}_i \right\}$$

ossia, i mercanti in  $S$  possono unirsi e ripartirsi i beni in modo da ottenere il massimo ricavo possibile. Cos'è il nucleo?

Dato  $S \subseteq N$ , prendiamo  $(\mathbf{z}_i^S)_{i \in S}$  che realizzano l'ottimo (siamo su un compatto). Sia inoltre  $\mathbf{y}$  un vettore nell'insieme bilanciato dei pesi. Possiamo quindi generare  $(\bar{\mathbf{z}}_i)_{i \in N}$ , dove

$$\bar{\mathbf{z}}_i = \sum_{S \subsetneq N} y_S \mathbf{z}_i^S$$

e notare che queste sono soluzioni ammissibili del problema che ci si presenta quando calcoliamo  $v(N)$ , in quanto

$$\sum_{i \in N} \bar{\mathbf{z}}_i = \sum_{i \in N} \sum_{S \subsetneq N} y_S \mathbf{z}_i^S = \sum_{S \subsetneq N} y_S \sum_{i \in S} \mathbf{z}_i^S = \sum_{S \subsetneq N} y_S \sum_{i \in S} \mathbf{w}_i = \sum_{i \in N} \mathbf{w}_i \sum_{S \subsetneq N} y_S = \sum_{i \in N} \mathbf{w}_i.$$

Pertanto, usando la concavità delle  $\mu_i$ , avremo

$$v(N) \geq \sum_i \mu_i(\bar{\mathbf{z}}_i) = \sum_i \mu_i \left( \sum_{S \subsetneq N} y_S \mathbf{z}_i^S \right) \geq \sum_i \sum_{S \subsetneq N} y_S \mu_i(\mathbf{z}_i^S) = \sum_{S \subsetneq N} y_S \sum_{i \in S} \mu_i(\mathbf{z}_i^S) = \sum_{S \subsetneq N} y_S v(S)$$

Ma allora, per teorema 19, il gioco è sempre bilanciato e il nucleo non è mai vuoto.

**Definizione 44.** Un gioco si dice **Convesso** se

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \quad \forall S, T.$$

**Lemma 34.** Il gioco  $(N, v)$  è convesso se e solo se

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \leq v(S \cup \{i\}) - v(S) \quad \forall T \subseteq S, \forall i \notin S$$

**Lemma 35.** Se  $(N, v)$  è convesso, allora il vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  definito come

$$x_1 = v(\{1\}), \quad x_2 = v(\{1, 2\}) - v(\{1\}), \quad \dots, \quad x_n = v(N) - v(\{1, 2, \dots, n-1\})$$

appartiene al nucleo.

Notiamo che questa proprietà è invariante dall'ordine dei giocatori, dunque per ogni permutazione  $\pi \in S_n$  avremo che i vettori  $\mathbf{x}^\pi$  definiti come

$$x_1^\pi = v(\{\pi(1)\}), \quad x_2^\pi = v(\{\pi(1), \pi(2)\}) - v(\{\pi(1)\}), \quad \dots, \quad x_n^\pi = v(N) - v(\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n-1)\})$$

appartengono al nucleo. In realtà, si dimostra che il nucleo è esattamente l'involuppo convesso di tutti questi punti (chiamato Weber set).

24-5-18

## 25 Eccesso

Parliamo di suddivisione in coalizioni per giochi cooperativi. Ricordiamo che un gioco in questo caso è composto da un insieme di giocatori  $N$  di cardinalità  $n$  e di una funzione  $v$  che associa ad ogni coalizione un valore, dove una coalizione è un qualsiasi sottoinsieme di  $N$ . Per convenzione,  $v(\emptyset) = 0$ . Ricordiamo inoltre

**Definizione 45.** Una **Imputazione** relativa al gioco  $G = (N, v)$  è un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  per cui

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i, \quad \mathbf{x}(N) = v(N).$$

Indichiamo questo insieme con  $X(N, v)$  o semplicemente con  $X$ .

**Definizione 46.** Una **Preimputazione** relativa al gioco  $G = (N, v)$  è un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  per cui

$$\mathbf{x}(N) = v(N)$$

Indichiamo questo insieme con  $X^0(N, v)$  o con  $X^0$ .

Notiamo che le imputazioni formano un insieme convesso e compatto, mentre le preimputazioni sono un iperpiano, quindi convesso non compatto, e  $X \subseteq X^0$ .

**Definizione 47.** Il **Nucleo** relativo al gioco  $G = (N, v)$  è un sottoinsieme delle imputazioni

$$C(N, v) := \{ \mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x}(S) \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N \}$$

Il nostro scopo è di trovare un vettore  $\mathbf{x}$  del nucleo del gioco, e vorremmo anche trovare il 'migliore', ossia quello per cui la differenza  $\mathbf{x}(S) - v(S)$  sia la maggiore possibile in generale per ogni  $S$ . Per questo definiamo delle funzioni che indichino la bontà degli  $\mathbf{x}$ .

**Definizione 48.** L'**Eccesso** di un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  rispetto al gioco  $G = (N, v)$  e ad un sottoinsieme  $S \subseteq N$  è dato da

$$e(S, \mathbf{x}) := v(S) - \mathbf{x}(S)$$

e possiamo raccogliere tutti gli eccessi in una funzione  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2^n}$

$$\theta(\mathbf{x}) := (e(S_1, \mathbf{x}), e(S_2, \mathbf{x}), \dots, e(S_{2^n}, \mathbf{x}))$$

dove gli  $S_i$  sono tutti i sottoinsiemi di  $N$  ordinati secondo  $e(S_1, \mathbf{x}) \geq e(S_2, \mathbf{x}) \geq \dots \geq e(S_{2^n}, \mathbf{x})$ .

Notiamo che  $\theta_1(\mathbf{x}) \geq 0$ , poiché  $e(\emptyset, \mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\mathbf{x}$ , e  $\mathbf{x} \in X^0$  se e solo se  $e(N, \mathbf{x}) = 0$ . Si può inoltre ridefinire il nucleo come

$$C(N, v) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \theta_1(\mathbf{x}) = 0 = e(N, \mathbf{x})\}.$$

Un eccesso positivo è qualcosa che vorremmo evitare, quindi cercheremo di minimizzare il massimo degli eccessi. In realtà faremo di più, ossia ordinare gli  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in ordine lessicografico, e minimizzare. I minimi, a priori, possono essere più di uno, dunque definiamo

**Definizione 49.** Dato  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , il **Nucleolo rispetto a  $K$**   $\mathcal{N}(N, v; K)$  (o semplicemente  $\mathcal{N}(K)$ ) è l'insieme dei minimi lessicografici di  $\theta$  in  $K$ .

In generale, quando si dice **Nucleolo** si intende il nucleolo rispetto alle imputazioni  $X$  ( $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(X)$ ), mentre il **Pre-nucleolo** è il nucleolo rispetto alle preimputazioni  $X^0$  ( $\mathcal{PN} \equiv \mathcal{N}(X^0)$ ).

L'ordine lessicografico non è continuo su  $\mathbb{R}^n$  rispetto alla topologia euclidea, poiché  $\{\mathbf{y} : \mathbf{y} \leq \mathbf{x}\}$  non è chiuso. Per esempio, su  $\mathbb{R}^2$ , la successione di punti  $\mathbf{x}_k = (-1/k, 0)$  converge a  $\mathbf{x} = (0, 0)$ , ma  $\mathbf{y} = (0, -1)$  ha la proprietà  $\mathbf{x}_k < \mathbf{y}$  per ogni  $k$ , e  $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ .

Dato che le imputazioni sono in particolare preimputazioni, allora un'imputazione che sta nel pre-nucleolo, sta pure nel nucleo, perché è minimo tra tutte le preimputazioni. In generale, però, può succedere che nucleo e pre-nucleolo siano disgiunti.

### Esempio

► Prendiamo un gioco a 3 giocatori, con

$$v(S) = \begin{cases} 0 & S = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso, il nucleo è vuoto, poiché non esiste un vettore in  $\mathbb{R}^3$  a componenti positive e somma 1, in cui le somme a 2 a 2 delle componenti sia maggiore di 1.  $X^0$  è composto dai vettori in  $\mathbb{R}^3$  a somma 1. Si dimostra che il pre-nucleolo è composto solo da  $\mathbf{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$ , poiché

$$\theta(\mathbf{x}) = (1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, -1/3, -1/3, -1/3), \quad e(\{1, 2\}, \mathbf{x}) + e(\{2, 3\}, \mathbf{x}) + e(\{1, 3\}, \mathbf{x}) = 3 - 2 = 1$$

dunque se esiste un minimo, tutti e tre gli eccessi devono avere valore 1/3, e questo porta ad avere esattamente  $\mathbf{x}$ . Notiamo che  $\mathbf{x}$  è anche una imputazione, pertanto anche il nucleo consiste solo di  $\mathbf{x}$ .

**Esercizio 11.** Prendiamo un gioco a 3 giocatori, con

$$v(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1, 2\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrare che  $X, \mathcal{N}$  sono composti solo da  $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ , mentre  $\mathcal{PN} = \{(1/4, 1/4, -1/2)\}$ .

Chiamiamo  $\mathcal{P}_k$  le  $k$ -uple di sottoinsiemi distinti di  $N$ . Ricordando che  $\theta_k(\mathbf{x})$  è la  $k$  esima componente del vettore, possiamo dimostrare che

**Lemma 36.**

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \max_{\{S_i\} \in \mathcal{P}_k} \min\{e(S_1, \mathbf{x}), e(S_2, \mathbf{x}), \dots, e(S_k, \mathbf{x})\}$$

*Dimostrazione.* Sia  $\theta(\mathbf{x}) = (e(\bar{S}_i, \mathbf{x}))$  dove gli  $\bar{S}_i$  sono ordinati secondo il loro eccesso. Sia inoltre  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  la  $k$ -upla di sottoinsiemi che soddisfa il massimo su  $\mathcal{P}_k$  di  $\min\{e(S_1, \mathbf{x}), e(S_2, \mathbf{x}), \dots, e(S_k, \mathbf{x})\}$ , ordinati in modo che  $e(R_1, \mathbf{x}) \geq \dots \geq e(R_k, \mathbf{x})$ . Dato che gli  $R_i$  soddisfano il massimo, devono superare anche  $\{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k\}$ , da cui

$$e(R_k, \mathbf{x}) = \max_{\{S_i\} \in \mathcal{P}_k} \min\{e(S_1, \mathbf{x}), e(S_2, \mathbf{x}), \dots, e(S_k, \mathbf{x})\} \geq \min\{\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k\} = e(\bar{S}_k, \mathbf{x}).$$

Poniamo per assurdo che  $e(R_k, \mathbf{x}) > e(\bar{S}_k, \mathbf{x})$ . Allora esiste un  $j < k$  per cui  $R_k = \bar{S}_j$ , ma allora esiste un  $R_i$  con  $R_i = \bar{S}_p$ ,  $p > k > j$ , da cui

$$e(R_i, \mathbf{x}) = e(\bar{S}_p, \mathbf{x}) \leq e(\bar{S}_k, \mathbf{x}) \leq e(\bar{S}_j, \mathbf{x}) = e(R_k, \mathbf{x}) \leq e(R_i, \mathbf{x}) \implies e(\bar{S}_k, \mathbf{x}) = e(R_k, \mathbf{x})$$

assurdo. □

Notiamo che, in funzione di  $\mathbf{x}$ , la funzione  $e(S, \mathbf{x})$  è affine, e pertanto continua. Grazie a questo lemma, sappiamo che  $\theta_k(\mathbf{x})$  è massimo di minimo, entrambi su finiti elementi, di funzioni continue, e dunque anche  $\theta_k(\mathbf{x})$  è continua. Terminiamo dimostrando due teoremi che ci danno condizioni su i nucleoli.

**Teorema 21.** *Se  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  è un compatto non vuoto, allora  $\mathcal{N}(K)$  è non vuoto e compatto.*

*Dimostrazione.* Creiamo la sequenza di spazi  $X_i$ , dove  $X_0 = X$ , e

$$X_{k+1} := \arg \min_{\mathbf{y} \in X_k} \{\theta_{k+1}(\mathbf{y})\} \quad \forall 0 \leq k < 2^n.$$

Dato che  $\theta_1(\mathbf{x})$  è continua, e  $X_0$  è compatto e non vuoto, allora anche  $X_1$  sarà compatto e non vuoto per Weierstrass. Induttivamente, tutti gli  $X_i$  sono compatti e non vuoti, e in particolare  $X_{2^n}$ , l'ultimo insieme generato, corrisponde con l'insieme dei minimi rispetto all'ordine lessicografico per costruzione. □

**Teorema 22.** *Se  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  chiuso e non vuoto in un iperpiano,  $\mathcal{N}(K)$  è non vuoto e compatto.*

*Dimostrazione.* Dato che  $K$  è contenuto in un iperpiano, allora esiste  $c \in \mathbb{R}$  per cui  $\mathbf{x} \in K \implies \mathbf{x}(N) = c$ . Prendiamo  $\mathbf{y} \in K$ , e denotiamo

$$M = \theta_1(\mathbf{y}), \quad \mu = \min_i (v(\{i\})) - M, \quad \nu = c - \mu(n-1).$$

Se  $\mathbf{z} \in K$  e  $\mathbf{z} \leq \mathbf{y}$ , allora avremo che

$$\theta_1(\mathbf{z}) \leq \theta_1(\mathbf{y}) = M \implies v(\{i\}) - z_i \leq \theta_1(\mathbf{z}) \leq M \implies z_i \geq \min_i (v(\{i\})) - M = \mu \quad \forall i,$$

$$\mathbf{z}(N) = c \implies z_i = c - \sum_{j \neq i} z_j \leq c - \mu(n-1) = \nu \quad \forall i.$$

Dunque tutti i minimi in  $K$  devono stare in  $K' = K \cap [\mu, \nu]^n$ , che è un compatto non vuoto, in quanto contiene  $\mathbf{y}$ . Usando il precedente teorema, otteniamo che  $\mathcal{N}(K) = \mathcal{N}(K')$  è compatto e non vuoto. □

Facili corollari sono che se  $X$  non è vuoto, allora  $\mathcal{N}$  è non vuoto e compatto. Inoltre  $\mathcal{P}\mathcal{N}$  è sempre non vuoto e compatto. In realtà vale anche un altro teorema molto potente:

**Teorema 23.** *Dato  $K$  convesso,  $\mathcal{N}(K)$  è composto da al massimo un punto. (senza dimo)*

Dunque se  $X$  non è vuoto,  $\mathcal{N}$  è un punto, mentre  $\mathcal{P}\mathcal{N}$  è sempre un punto.

25-5-18

Se il nucleo è non vuoto, allora  $X$  è non vuoto. Inoltre possiamo dimostrare che il nucleolo e il prenucleolo coincidono e appartengono al nucleo. Ricordiamo che nucleolo e prenucleolo sono al massimo un punto.

**Teorema 24.** *Se il nucleo è non vuoto, allora  $\mathcal{P}\mathcal{N} \equiv \mathcal{N} \in C(N, v)$*

*Dimostrazione.* sia  $\mathbf{x}^*$  il prenucleolo (che sappiamo essere sempre un punto), e  $\mathbf{x} \in C(n, v)$ . Avremo  $\theta_1(\mathbf{x}) \leq 0$ , ma  $\mathbf{x}$  è una preimputazione, dunque  $\theta_1(\mathbf{x}^*) \leq \theta_1(\mathbf{x}) \leq 0$ , e in generale  $\theta(\mathbf{x}^*) \leq 0$ . Ma allora  $\mathbf{x}^*$  sta nel nucleo e in particolare è un'imputazione. Da cui  $\mathcal{P}\mathcal{N} \equiv \mathcal{N} \in C(N, v)$ . □

Le seguenti proprietà di  $\mathcal{N}(K)$ ,  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{P}\mathcal{N}$  sono di facile dimostrazione:

- **Covarianza rispetto a  $K$ :** se  $a \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , allora  $\mathcal{N}(N, v; aK + \mathbf{b}) = a\mathcal{N}(N, v; K) + \mathbf{b}$
- **Covarianza rispetto a  $v$ :** se  $a \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , allora  $\mathcal{N}(N, av + \mathbf{b}) = a\mathcal{N}(N, v) + \mathbf{b}$ , dove  $(av + \mathbf{b})(S) = av(S) + \mathbf{b}(S)$
- Poniamo  $v$  sia simmetrica rispetto a  $i, j$ , ossia

$$v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\}) \quad \forall T : i, j \notin T.$$

Allora  $\mathcal{P}\mathcal{N}_i = \mathcal{P}\mathcal{N}_j$ . Lo stesso vale per  $\mathcal{N}$  se è non vuoto.

- Se  $i$  è un giocatore nullo, ossia

$$v(T \cup \{i\}) = v(T) \quad \forall T,$$

allora  $\mathcal{P}\mathcal{N}_i = 0$ . Lo stesso vale per  $\mathcal{N}$  se è non vuoto.

In generale, non vale l'additività rispetto alle funzioni  $v$ , ossia

$$\mathcal{N}(N, v + \tilde{v}) \neq \mathcal{N}(N, v) + \mathcal{N}(N, \tilde{v}) \quad \mathcal{P}\mathcal{N}(N, v + \tilde{v}) \neq \mathcal{P}\mathcal{N}(N, v) + \mathcal{P}\mathcal{N}(N, \tilde{v})$$

## Esempio

- Presi gli ultimi due giochi esempio,

$$v(S) = \begin{cases} 0 & S = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \tilde{v}(S) = \begin{cases} 1 & S = \{1, 2\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora  $\mathcal{N}(N, v) + \mathcal{N}(N, \tilde{v}) = (1/3, 1/3, 1/3)$ ,  $\mathcal{P}\mathcal{N}(N, v) + \mathcal{P}\mathcal{N}(N, \tilde{v}) = (7/12, 7/12, -1/6)$ . Ma se  $w = v + \tilde{v}$ , allora

$$v(S) = \begin{cases} 0 & S = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ 2 & S = \{1, 2\} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le imputazioni sono il semplice dei vettori di probabilità, e  $\mathcal{N} = (1/2, 1/2, 0)$  per simmetria rispetto a 1, 2 e poiché  $\theta_1(\mathbf{x}) = 2 - x_1 - x_2$ . Il prenucleolo viene fuori  $(2/3, 2/3, -1/3)$ .

## 26 Shapley

Chiamiamo  $V$  l'insieme delle funzioni  $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $v(\emptyset) = 0$ . Cerchiamo ora una funzione  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  per cui

1. **Razionalità collettiva:**  $\sum f_i(v) = v(N)$  per ogni  $v$ , ossia tutti i giocatori si ripartiscono il valore totale
2. **Simmetria:** Se due giocatori  $i, j$  sono simmetrici per  $v$ , allora  $f_i(v) = f_j(v)$
3. **Nullo:** Se un giocatore  $i$  è nullo per  $v$ , allora  $f_i(v) = 0$
4. **Additività:**  $f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v})$

Nucleolo e prenucleolo hanno le prime tre proprietà ma non la quarta.

**Teorema 25.** *Esiste un'unica funzione  $f$  che soddisfi 1-4. (senza dimostrazione)*

Sappiamo di questa funzione  $Sh$  che

$$Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} v(P_i(\pi) \cup \{i\}) - v(P_i(\pi))$$

dove  $P_i(\pi) = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$ . Equivalentemente,

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subseteq N - \{i\}} \frac{|S|!(n - i - |S|)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Questo è chiamato **Valore di Shapley**.

Possiamo osservare che vale ancora

$$Sh(av + \mathbf{b}) = a \cdot Sh(v) + \mathbf{b}.$$

La funzione  $Sh$  soddisfa anche la proprietà

**5 Monotonia dei contributi marginali:**

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq \tilde{v}(S \cup \{i\}) - \tilde{v}(S) \quad \forall S \implies Sh_i(v) \geq Sh_i(\tilde{v}).$$

Questa implica, in particolare, che

**6 Marginalità:**

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = \tilde{v}(S \cup \{i\}) - \tilde{v}(S) \quad \forall S \implies Sh_i(v) = Sh_i(\tilde{v})$$

In realtà  $Sh$  è l'unica funzione che soddisfa 1,2,4,6, poiché queste implicano 3.

## Riferimenti bibliografici

- [1] F. FORGÒ, J. SZEP, F. SZIDAROVSKY. *Introduction to the theory of games*. Kluwer, (1999)
- [2] D. FUDENBERG, J. TIROLE. *Game theory*. The MIT Press, (1991)
- [3] R. GIBBONS. *Game theory for applied economists*. Princeton University Press, (1992)
- [4] S. MASCHLER, E. SOLAN, S. ZAMIR. *Game theory*. Cambridge University Press, (2013)
- [5] S. TADELIS. *Game theory: an introduction*. Princeton University Press, (2013)

## Altri Testi Consigliati

- [extra1] R.D. DUNCAN, H. RAIFFA. *Games and decisions: introduction and critical survey*. Wiley, (1957)
- [extra2] R. LUCCHETTI. *Di duelli, scacchi e dilemmi. La Teoria matematica dei giochi*. Bruno Mondadori, (2008)
- [extra3] L. MÉRÖ. *Moral calculations. Game theory, logic, and human frailty*. Springer, (1998)
- [extra4] F. PATRONE. *Decisori (razionali) interagenti*. Pisa University Press, (2006)