Fattorizzazione Nonnegativa di Matrici e Applicazioni alla Decomposizione di Immagini

Autore: Barbarino Giovanni

Relatori: Gemignani Luca

Romani Francesco

Controrelatore: Bigi Giancarlo

14 Ottobre 2016

Università di Pisa

NMF

NMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo trovare $W \in \mathbb{R}_+^{n\times k}$ e $H \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ che minimizzino

$$F(W,H) = \|A - WH^T\|_F^2.$$

NMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo trovare $W \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$ e $H \in \mathbb{R}_+^{m \times k}$ che minimizzino

$$F(W, H) = \|A - WH^T\|_F^2.$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \\ W \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & H^T & \end{pmatrix}$$

NMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo trovare $W \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$ e $H \in \mathbb{R}_+^{m \times k}$ che minimizzino

$$F(W, H) = \|A - WH^T\|_F^2.$$

$$\begin{pmatrix} & \Bigg| & & \Bigg| & \\ & & A_{:,i} & & \\ & \Bigg| & & \Bigg| & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \Bigg| & & \Bigg| & \\ W_{:,1} & \Bigg| & W_{:,2} & \Bigg| & W_{:,3} \\ \Bigg| & & \Bigg| & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \Big| & H_{i,1} & \Big| & \\ & \Big| & H_{i,2} & \Big| & \\ & \Big| & H_{i,3} & \Big| & \end{pmatrix}$$

NMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo trovare $W \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$ e $H \in \mathbb{R}_+^{m \times k}$ che minimizzino

$$F(W, H) = \|A - WH^T\|_F^2.$$

- Le colonne di A sono approssimate da combinazioni lineari nonnegative delle colonne di W

$$A \sim WH^T \implies A_{:,i} \sim H_{i,1} W_{:,1} + H_{i,2} W_{:,2} + \cdots + H_{i,k} W_{:,k}.$$

- Scegliendo k piccolo, otteniamo una rappresentazione compressa dei dati in A.

NMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo trovare $W \in \mathbb{R}_+^{n\times k}$ e $H \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ che minimizzino

$$F(W,H) = \|A - WH^T\|_F^2.$$

- Le colonne di A sono approssimate da combinazioni lineari nonnegative delle colonne di W

$$A \sim WH^T \implies A_{:,i} \sim H_{i,1}W_{:,1} + H_{i,2}W_{:,2} + \cdots + H_{i,k}W_{:,k}.$$

- Scegliendo k piccolo, otteniamo una rappresentazione compressa dei dati in A.

NMF

Formulazioni Equivalenti

- È una delle tecniche di **self modeling curve resolution** nel campo della chemiometria.
- È equivalente al **Nested Polytopes Problem**.
- Usando la divergenza di Kullback-Leibler, diventa il **Probabilistic Latent Semantic Indexing**, usata in teoria dell'informazione.

Applicazioni

La NMF è utilizzata in biologia, medicina, in analisi dei segnali, dei testi e delle immagini, e in generale dovunque ci sia bisogno di clusterizzare, analizzare e dare un'interpretazione a una grande quantità di dati nonnegativi.

NMF

Formulazioni Equivalenti

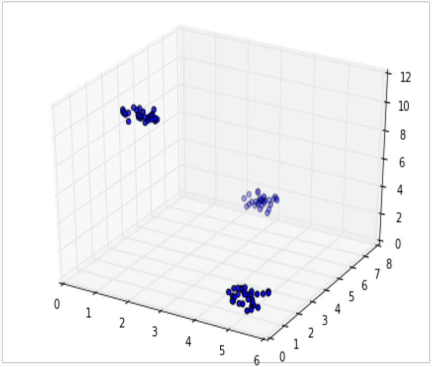
- È una delle tecniche di **self modeling curve resolution** nel campo della chemiometria.
- È equivalente al **Nested Polytopes Problem**.
- Usando la divergenza di Kullback-Leibler, diventa il **Probabilistic Latent Semantic Indexing**, usata in teoria dell'informazione.

Applicazioni

La NMF è utilizzata in biologia, medicina, in analisi dei segnali, dei testi e delle immagini, e in generale dovunque ci sia bisogno di clusterizzare, analizzare e dare un'interpretazione a una grande quantità di dati nonnegativi.

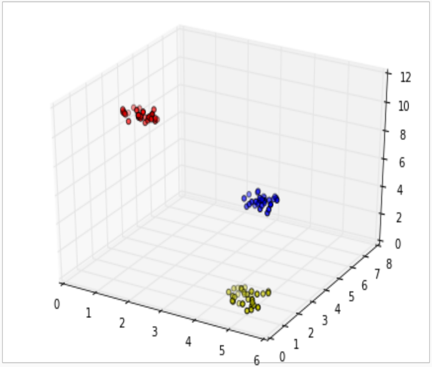
Clustering

- Dati m punti $x_1, \ldots, x_m$ di R_+^n, possiamo disporli come colonne di A, ed applicare una NMF $A \sim WH^T$ con k il numero di cluster voluti.
- Un punto x_i apparterrà al cluster j sse il coefficiente H_{ij} è il più grande della i-esima colonna H^T.



Clustering

- Dati m punti $x_1, \ldots, x_m$ di R_+^n, possiamo disporli come colonne di A, ed applicare una NMF $A \sim WH^T$ con k il numero di cluster voluti.
- Un punto x_i apparterrà al cluster j sse il coefficiente H_{ij} è il più grande della i-esima colonna H^T.

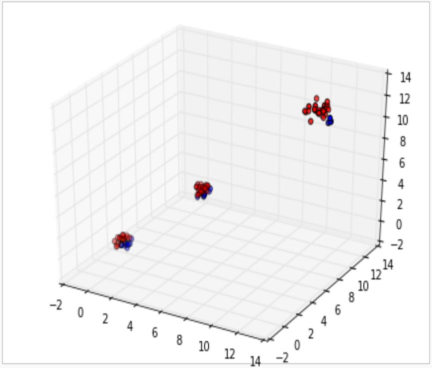


Clustering

- Se i centroidi dei cluster sono linearmente dipendenti, sorgono dei problemi.
- Possono essere risolti applicando la NMF su una matrice di similarità dei punti.

$$A_{ij} = \exp(-c\|x_i - x_j\|^2).$$

- È possibile estendere la NMF in modo da trattare anche cluster per densità e prossimità.

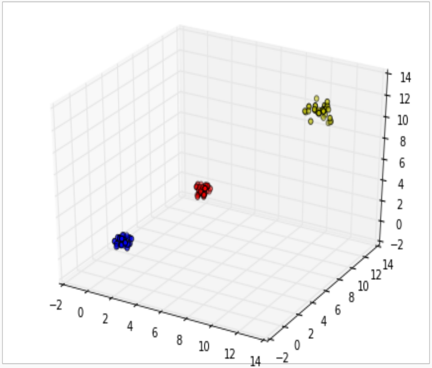


Clustering

- Se i centroidi dei cluster sono linearmente dipendenti, sorgono dei problemi.
- Possono essere risolti applicando la NMF su una matrice di similarità dei punti.

$$A_{ij} = \exp(-c\|x_i - x_j\|^2).$$

- È possibile estendere la NMF in modo da trattare anche cluster per densità e prossimità.

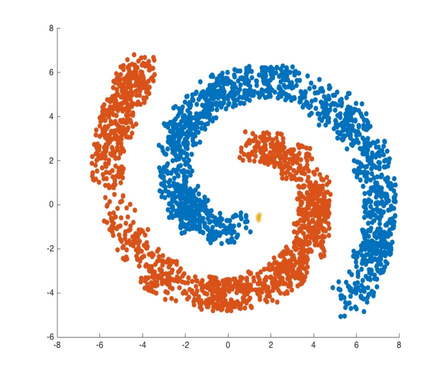


Clustering

- Se i centroidi dei cluster sono linearmente dipendenti, sorgono dei problemi.
- Possono essere risolti applicando la NMF su una matrice di similarità dei punti.

$$A_{ij} = \exp(-c\|x_i - x_j\|^2).$$

- È possibile estendere la NMF in modo da trattare anche cluster per densità e prossimità.



Algoritmi

Convessità

La NMF è un problema di ottimizzazione non convessa e NP-Hard, dunque gli algoritmi risolvono due sottoproblemi convessi

$$W_{k+1} = \arg \min_{X \in \mathbb{R}_+^{n \times k}} \|A - XH_k^T\|_F^2$$

$$H_{k+1} = \arg \min_{X \in \mathbb{R}_+^{m \times k}} \|A - W_{k+1}X^T\|_F^2$$

Teorema

I punti limite della successione (W_k, H_k) sono punti stazionari di

$$F(W, H) = \|A - WH^T\|_F^2$$

Convessità

La NMF è un problema di ottimizzazione non convessa e NP-Hard, dunque gli algoritmi risolvono due sottoproblemi convessi

$$W_{k+1} = \arg \min_{X \in \mathbb{R}_+^{n \times k}} \|A - XH_k^T\|_F^2$$

$$H_{k+1} = \arg \min_{X \in \mathbb{R}_+^{m \times k}} \|A - W_{k+1}X^T\|_F^2$$

Teorema

I punti limite della successione (W_k, H_k) sono punti stazionari di

$$F(W, H) = \|A - WH^T\|_F^2$$

Active Set

Possiamo scomporre il sottoproblema convesso in n problemi di **Minimi Quadrati Nonnegativi** (NNLS).

$$\min_{X \in \mathbb{R}_+^{k \times n}} \|HX - A^T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in \mathbb{R}_+^k} \|Hx_i - A_{i,:}\|_2^2$$

L'algoritmo **Active Set** risolve il NNLS scoprendo le posizioni di tutte le entrate zero della soluzione, attraverso un approccio primale-duale.

Questo metodo risolve esattamente il problema in un numero finito di passi, ma è spesso lento, dunque si preferiscono algoritmi iterativi.

Active Set

Possiamo scomporre il sottoproblema convesso in n problemi di **Minimi Quadrati Nonnegativi** (NNLS).

$$\min_{X \in \mathbb{R}_+^{k \times n}} \|HX - A^T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in \mathbb{R}_+^k} \|Hx_i - A_{i,:}\|_2^2$$

L'algoritmo **Active Set** risolve il NNLS scoprendo le posizioni di tutte le entrate zero della soluzione, attraverso un approccio primale-duale.

Questo metodo risolve esattamente il problema in un numero finito di passi, ma è spesso lento, dunque si preferiscono algoritmi iterativi.

Active Set

Possiamo scomporre il sottoproblema convesso in n problemi di **Minimi Quadrati Nonnegativi** (NNLS).

$$\min_{X \in \mathbb{R}_+^{k \times n}} \|HX - A^T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in \mathbb{R}_+^k} \|Hx_i - A_{i,:}\|_2^2$$

L'algoritmo **Active Set** risolve il NNLS scoprendo le posizioni di tutte le entrate zero della soluzione, attraverso un approccio primale-duale.

Questo metodo risolve esattamente il problema in un numero finito di passi, ma è spesso lento, dunque si preferiscono algoritmi iterativi.

Multiplicative Update

Il **Multiplicative Update** (MU) è un metodo del gradiente che assicura la positività delle variabili ad ogni aggiornamento

$$H_{k+1} = H_k \; .* \; \left[W_k^T A \; ./ \; W_k^T W_k H_k^T \right]$$

$$W_{k+1} = W_k \; .* \; \left[A H_{k+1} \; ./ \; W_k H_{k+1}^T H_{k+1} \right]$$

Ad ogni iterazione, l'errore diminuisce, e tende a produrre soluzioni sparse, in quanto mantiene gli elementi nulli.

Non è assicurato che converga ad un punto stazionario, ma sperimentalmente è un valido algoritmo.

Multiplicative Update

Il **Multiplicative Update** (MU) è un metodo del gradiente che assicura la positività delle variabili ad ogni aggiornamento

$$H_{k+1} = H_k \;.*\; \left[W_k^T A \;./\; W_k^T W_k H_k^T \right]$$
$$W_{k+1} = W_k \;.*\; \left[A H_{k+1} \;./\; W_k H_{k+1}^T H_{k+1} \right]$$

Ad ogni iterazione, l'errore diminuisce, e tende a produrre soluzioni sparse, in quanto mantiene gli elementi nulli.

Non è assicurato che converga ad un punto stazionario, ma sperimentalmente è un valido algoritmo.

Multiplicative Update

Il **Multiplicative Update** (MU) è un metodo del gradiente che assicura la positività delle variabili ad ogni aggiornamento

$$H_{k+1} = H_k \ .* \ \left[W_k^T A \ ./ \ W_k^T W_k H_k^T \right]$$

$$W_{k+1} = W_k \ .* \ \left[A H_{k+1} \ ./ \ W_k H_{k+1}^T H_{k+1} \right]$$

Ad ogni iterazione, l'errore diminuisce, e tende a produrre soluzioni sparse, in quanto mantiene gli elementi nulli.

Non è assicurato che converga ad un punto stazionario, ma sperimentalmente è un valido algoritmo.

HALS e CD

Se fissiamo H, e tutti gli elementi di W tranne $W_{i,j}$, è facile risolvere

$$\min_{W_{i,j} \in \mathbb{R}_+} \|A - WH^T\|_F^2$$

Il metodo dei **Minimi Quadrati Alternanti Gerarchici** (HALS) aggiorna le entrate di W in successione. Questo metodo assicura che ogni punto limite della successione generata sia un punto stazionario del problema.

Nel metodo della **Discesa delle Coordinate** (CD) calcoliamo dapprima il guadagno sull'errore, per decidere in che ordine aggiornare le singole entrate.

HALS e CD

Se fissiamo H, e tutti gli elementi di W tranne $W_{i,j}$, è facile risolvere

$$\min_{W_{i,j} \in \mathbb{R}_+} \|A - WH^T\|_F^2$$

Il metodo dei **Minimi Quadrati Alternanti Gerarchici** (HALS) aggiorna le entrate di W in successione. Questo metodo assicura che ogni punto limite della successione generata sia un punto stazionario del problema.

Nel metodo della **Discesa delle Coordinate** (CD) calcoliamo dapprima il guadagno sull'errore, per decidere in che ordine aggiornare le singole entrate.

HALS e CD

Se fissiamo H, e tutti gli elementi di W tranne $W_{i,j}$, è facile risolvere

$$\min_{W_{i,j} \in \mathbb{R}_+} \|A - WH^T\|_F^2$$

Il metodo dei **Minimi Quadrati Alternanti Gerarchici** (HALS) aggiorna le entrate di W in successione. Questo metodo assicura che ogni punto limite della successione generata sia un punto stazionario del problema.

Nel metodo della **Discesa delle Coordinate** (CD) calcoliamo dapprima il guadagno sull'errore, per decidere in che ordine aggiornare le singole entrate.

Decomposizione di Immagini

Immagini e NMF

Dato un set di immagini, possiamo codificarle come colonne di A, e quindi applicarvi la NMF

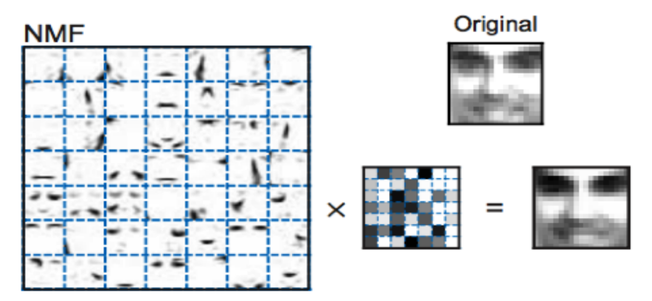
$$A \sim WH^T$$

Immagini e NMF

Dato un set di immagini, possiamo codificarle come colonne di A, e quindi applicarvi la NMF

$$A \sim WH^T$$

Le immagini vengono decomposte in componenti comuni:

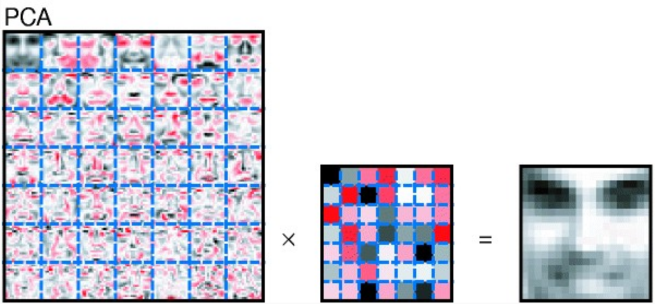


Immagini e NMF

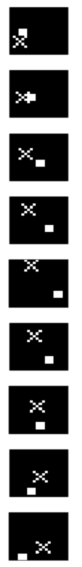
Dato un set di immagini, possiamo codificarle come colonne di A, e quindi applicarvi la NMF

$$A \sim WH^T$$

Se non richiediamo la positività, otteniamo le **eigenfaces**:



Operatore Diamante



La NMF, tuttavia, non riesce a riconoscere componenti comuni a differenti immagini se sono locate in posti differenti.

Sostituiamo agli elementi di H delle funzioni $H_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e definiamo l'**operatore diamante**:

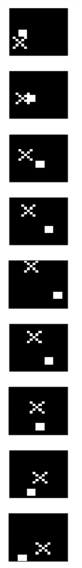
$$(W \diamond H^T)_{:,i} := \sum_{j=1}^{k} H_{i,j}(W_{:,j})$$

La formula da minimizzare resta

$$\min_{W,H} \|A - W \diamond H^T\|_F^2$$

dove W contiene le componenti comuni alle immagini in A.

Operatore Diamante



La NMF, tuttavia, non riesce a riconoscere componenti comuni a differenti immagini se sono locate in posti differenti.
Sostituiamo agli elementi di H delle funzioni $H_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e definiamo l'**operatore diamante**:

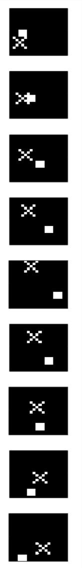
$$(W \diamond H^T)_{:,i} := \sum_{j=1}^{k} H_{i,j}(W_{:,j})$$

La formula da minimizzare resta

$$\min_{W,H} \|A - W \diamond H^T\|_F^2$$

dove W contiene le componenti comuni alle immagini in A.

Operatore Diamante



La NMF, tuttavia, non riesce a riconoscere componenti comuni a differenti immagini se sono locate in posti differenti.
Sostituiamo agli elementi di H delle funzioni $H_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e definiamo l'**operatore diamante**:

$$(W \diamond H^T)_{:,i} := \sum_{j=1}^{k} H_{i,j}(W_{:,j})$$

La formula da minimizzare resta

$$\min_{W,H} \|A - W \diamond H^T\|_F^2$$

dove W contiene le componenti comuni alle immagini in A.

Traslazioni

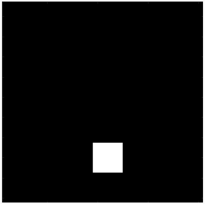
Scegliamo gli elementi di H tra le **traslazioni positive**, definite come coppie di numeri

$$H_{i,j} \equiv [r, s] \qquad r \in \mathbb{R}_+ \quad s \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

Se lo applichiamo ad un vettore di $\mathbb{R}^n$, lo trasla ciclicamente di s posti, e lo moltiplica per r.

$$H_{i,j}(v) = r\sigma_s(v)$$

L'immagine corrispondente viene traslata di s pixel.



Traslazioni

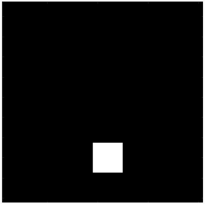
Scegliamo gli elementi di H tra le **traslazioni positive**, definite come coppie di numeri

$$H_{i,j} \equiv [r, s] \qquad r \in \mathbb{R}_+ \quad s \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

Se lo applichiamo ad un vettore di $\mathbb{R}^n$, lo trasla ciclicamente di s posti, e lo moltiplica per r.

$$H_{i,j}(v) = r\sigma_s(v)$$

L'immagine corrispondente viene traslata di s pixel.



Traslazioni

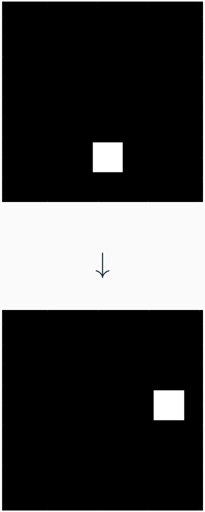
Scegliamo gli elementi di H tra le **traslazioni positive**, definite come coppie di numeri

$$H_{i,j} \equiv [r, s] \qquad r \in \mathbb{R}_+ \quad s \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

Se lo applichiamo ad un vettore di $\mathbb{R}^n$, lo trasla ciclicamente di s posti, e lo moltiplica per r.

$$H_{i,j}(v) = r\sigma_s(v)$$

L'immagine corrispondente viene traslata di s pixel.



NMF e Traslazioni

PermNMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo risolvere

$$\min_{W,H} \|A - W \diamond H^T\|_F^2 \qquad W \in \mathbb{R}_+^{n\times k} \qquad H \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m\times k}$$

Come nel caso classico, spezziamo il problema in due

$$\min_{X\in\mathbb{R}_+^{n\times k}} \|A - X \diamond H^T\|_F^2 \qquad \min_{X\in\left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m\times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2$$

Il primo è un problema convesso, ma il secondo contiene una parte discreta. Vediamo come affrontarli.

NMF e Traslazioni

PermNMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo risolvere

$$\min_{W,H} \|A - W \diamond H^T\|_F^2 \qquad W \in \mathbb{R}_+^{n\times k} \qquad H \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m\times k}$$

Come nel caso classico, spezziamo il problema in due

$$\min_{X\in\mathbb{R}_+^{n\times k}} \|A - X \diamond H^T\|_F^2 \qquad \min_{X\in\left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m\times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2$$

Il primo è un problema convesso, ma il secondo contiene una parte discreta. Vediamo come affrontarli.

NMF e Traslazioni

PermNMF

Data una matrice $A \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, e un parametro naturale k, vogliamo risolvere

$$\min_{W,H} \|A - W \diamond H^T\|_F^2 \qquad W \in \mathbb{R}_+^{n\times k} \qquad H \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m\times k}$$

Come nel caso classico, spezziamo il problema in due

$$\min_{X\in\mathbb{R}_+^{n\times k}} \|A - X \diamond H^T\|_F^2 \qquad \min_{X\in\left(\mathbb{R}_+\times\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m\times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2$$

Il primo è un problema convesso, ma il secondo contiene una parte discreta. Vediamo come affrontarli.

Aggiornamento di W

Multiplicative Update

NMF classico

$$W \leftarrow W \ .* \ (AH) \ ./ \ (WH^T H)$$

PermNMF

$$W \leftarrow W \ .* \ (A \diamond H') \ ./ \ (W \diamond H^T \diamond H')$$

Gradiente Proiettato

$$W \leftarrow (W - \alpha \nabla_W F(W, H))_+$$

$$\nabla_W \|A - W \diamond H^T\|_F^2 = -2(A - W \diamond H^T) \diamond H',$$

Aggiornamento di W

Multiplicative Update

NMF classico

$$W \leftarrow W \ .* \ (AH) \ ./ \ (WH^T H)$$

PermNMF

$$W \leftarrow W \ .* \ (A \diamond H') \ ./ \ (W \diamond H^T \diamond H')$$

Gradiente Proiettato

$$W \leftarrow (W - \alpha \nabla_W F(W, H))_+$$

$$\nabla_W \|A - W \diamond H^T\|_F^2 = -2(A - W \diamond H^T) \diamond H',$$

Aggiornamento di W

Multiplicative Update

NMF classico

$$W \leftarrow W \ .* \ (AH) \ ./ \ (WH^T H)$$

PermNMF

$$W \leftarrow W \ .* \ (A \diamond H') \ ./ \ (W \diamond H^T \diamond H')$$

Gradiente Proiettato

$$W \leftarrow (W - \alpha \nabla_W F(W, H))_+$$

$$\nabla_W \|A - W \diamond H^T\|_F^2 = -2(A - W \diamond H^T) \diamond H',$$

Aggiornamento di W

Multiplicative Update

NMF classico

$$W \leftarrow W \ .* \ (AH) \ ./ \ (WH^T H)$$

PermNMF

$$W \leftarrow W \ .* \ (A \diamond H') \ ./ \ (W \diamond H^T \diamond H')$$

Gradiente Proiettato

$$W \leftarrow (W - \alpha \nabla_W F(W, H))_+$$

$$\nabla_W \|A - W \diamond H^T\|_F^2 = -2(A - W \diamond H^T) \diamond H',$$

PermNNLS

PermNNLS

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, trova la traslazione positiva $\tau \equiv [r, s]$ che minimizza

$$\|v - \tau(w)\|^2$$

- Se fissiamo s, allora lo sappiamo risolvere

$$r_s := \arg\min_{r \in \mathbb{R}_+} \|v - r\sigma_s(w)\|^2 = \max\left\{0, \frac{v^T\sigma_s(w)}{\|w\|^2}\right\}$$

$$\|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \|v\|^2 - \frac{(v^T\sigma_s(w))^2}{\|w\|^2}$$

- È ora possibile minimizzare sugli r_s:

$$\arg\min_s \|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \arg\max_s v^T\sigma_s(w)$$

e l'ultima operazione è una moltiplicazione tra un vettore e una matrice circolante.

PermNNLS

PermNNLS

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, trova la traslazione positiva $\tau \equiv [r, s]$ che minimizza

$$\|v - \tau(w)\|^2$$

- Se fissiamo s, allora lo sappiamo risolvere

$$r_s := \arg\min_{r \in \mathbb{R}_+} \|v - r\sigma_s(w)\|^2 = \max\left\{0, \frac{v^T\sigma_s(w)}{\|w\|^2}\right\}$$

$$\|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \|v\|^2 - \frac{(v^T\sigma_s(w))^2}{\|w\|^2}$$

- È ora possibile minimizzare sugli r_s:

$$\arg\min_s \|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \arg\max_s v^T\sigma_s(w)$$

e l'ultima operazione è una moltiplicazione tra un vettore e una matrice circolante.

PermNNLS

PermNNLS

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, trova la traslazione positiva $\tau \equiv [r, s]$ che minimizza

$$\|v - \tau(w)\|^2$$

- Se fissiamo s, allora lo sappiamo risolvere

$$r_s := \arg\min_{r \in \mathbb{R}_+} \|v - r\sigma_s(w)\|^2 = \max\left\{0, \frac{v^T\sigma_s(w)}{\|w\|^2}\right\}$$

$$\|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \|v\|^2 - \frac{(v^T\sigma_s(w))^2}{\|w\|^2}$$

- È ora possibile minimizzare sugli r_s:

$$\arg\min_s \|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \arg\max_s v^T\sigma_s(w)$$

e l'ultima operazione è una moltiplicazione tra un vettore e una matrice circolante.

PermNNLS

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, trova la traslazione positiva $\tau \equiv [r, s]$ che minimizza

$$\|v - \tau(w)\|^2$$

- Se fissiamo s, allora lo sappiamo risolvere

$$r_s := \arg\min_{r \in \mathbb{R}_+} \|v - r\sigma_s(w)\|^2 = \max\left\{0, \frac{v^T\sigma_s(w)}{\|w\|^2}\right\}$$

$$\|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \|v\|^2 - \frac{(v^T\sigma_s(w))^2}{\|w\|^2}$$

- È ora possibile minimizzare sugli r_s:

$$\arg\min_s \|v - r_s\sigma_s(w)\|^2 = \arg\max_s v^T\sigma_s(w)$$

  e l'ultima operazione è una moltiplicazione tra un vettore e una matrice circolante.

Vector PermNNLS

Vector PermNNLS

Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, e un set di vettori $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$, trovare le permutazioni positive $\tau_1, \ldots, \tau_k$ che minimizzano

$$\|v - (\tau_1(w_1) + \tau_2(w_2) + \cdots + \tau_k(w_k))\|^2$$

Fissando tutte le variabili τ_i tranne una, il problema si riduce ad un PermNNLS che sappiamo risolvere, dunque aggiorniamo le τ_i sequenzialmente.

Se chiamiamo W la matrice con colonne w_i, e x il vettore dei τ_i, allora possiamo riscriverlo come

$$\min_x \|v - W \diamond x\|^2 \qquad v \in \mathbb{R}^n \quad W \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Vector PermNNLS

Vector PermNNLS

Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, e un set di vettori $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$, trovare le permutazioni positive $\tau_1, \ldots, \tau_k$ che minimizzano

$$\|v - (\tau_1(w_1) + \tau_2(w_2) + \cdots + \tau_k(w_k))\|^2$$

Fissando tutte le variabili τ_i tranne una, il problema si riduce ad un PermNNLS che sappiamo risolvere, dunque aggiorniamo le τ_i sequenzialmente.

Se chiamiamo W la matrice con colonne w_i, e x il vettore dei τ_i, allora possiamo riscriverlo come

$$\min_x \|v - W \diamond x\|^2 \qquad v \in \mathbb{R}^n \quad W \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Vector PermNNLS

Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, e un set di vettori $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$, trovare le permutazioni positive $\tau_1, \ldots, \tau_k$ che minimizzano

$$\|v - (\tau_1(w_1) + \tau_2(w_2) + \cdots + \tau_k(w_k))\|^2$$

Fissando tutte le variabili τ_i tranne una, il problema si riduce ad un PermNNLS che sappiamo risolvere, dunque aggiorniamo le τ_i sequenzialmente.

Se chiamiamo W la matrice con colonne w_i, e x il vettore dei τ_i, allora possiamo riscriverlo come

$$\min_x \|v - W \diamond x\|^2 \qquad v \in \mathbb{R}^n \quad W \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Vector PermNNLS

Vector PermNNLS

Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, e un set di vettori $w_1, w_2, \dots, w_k \in \mathbb{R}^n$, trovare le permutazioni positive $\tau_1, \dots, \tau_k$ che minimizzano

$$\|v - (\tau_1(w_1) + \tau_2(w_2) + \cdots + \tau_k(w_k))\|^2$$

Fissando tutte le variabili τ_i tranne una, il problema si riduce ad un PermNNLS che sappiamo risolvere, dunque aggiorniamo le τ_i sequenzialmente.

Se chiamiamo W la matrice con colonne w_i, e x il vettore dei τ_i, allora possiamo riscriverlo come

$$\min_x \|v - W \diamond x\|^2 \qquad v \in \mathbb{R}^n \quad W \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Aggiornamento di H

Il problema dell'aggiornamento di H è

$$\min_{X \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m \times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2$$

Questo si può spezzare come

$$\min_{X \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m \times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m} \min_{x_i \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{k}} \|A_{:,i} - W \diamond x_i\|^2$$

Possiamo quindi risolvere m problemi Vector PermNMF ed ottenere infine l'aggiornamento di H.

Aggiornamento di H

Il problema dell'aggiornamento di H è

$$\min_{X \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m \times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2$$

Questo si può spezzare come

$$\min_{X \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m \times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m} \min_{x_i \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{k}} \|A_{:,i} - W \diamond x_i\|^2$$

Possiamo quindi risolvere m problemi Vector PermNMF ed ottenere infine l'aggiornamento di H.

Aggiornamento di H

Il problema dell'aggiornamento di H è

$$\min_{X \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m \times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2$$

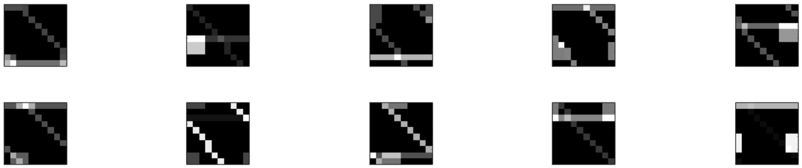
Questo si può spezzare come

$$\min_{X \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{m \times k}} \|A - W \diamond X^T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m} \min_{x_i \in \left(\mathbb{R}_+ \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^{k}} \|A_{:,i} - W \diamond x_i\|^2$$

Possiamo quindi risolvere m problemi Vector PermNMF ed ottenere infine l'aggiornamento di H.

Esperimento

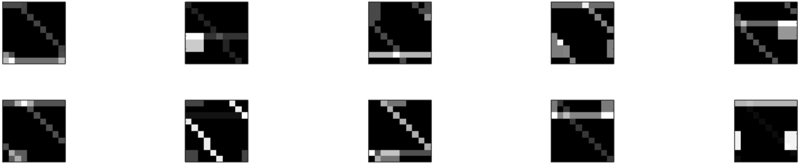
Generiamo dieci immagini come sovrapposizione di una linea, un quadrato e una diagonale



Riportiamo le prime iterazioni del metodo

Esperimento

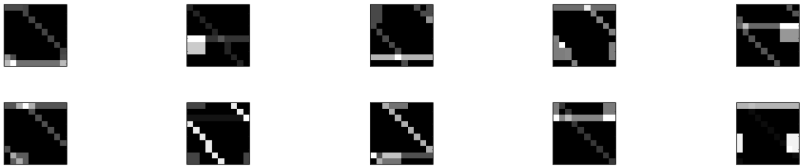
Generiamo dieci immagini come sovrapposizione di una linea, un quadrato e una diagonale



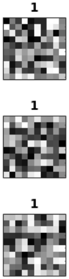
Riportiamo le prime iterazioni del metodo

Esperimento

Generiamo dieci immagini come sovrapposizione di una linea, un quadrato e una diagonale

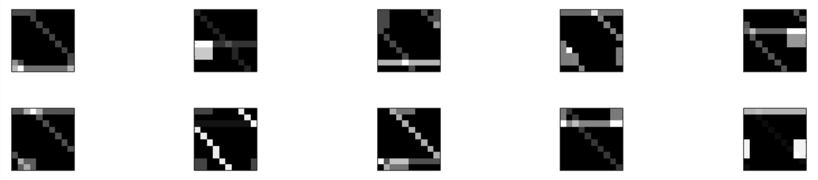


Riportiamo le prime iterazioni del metodo



Esperimento

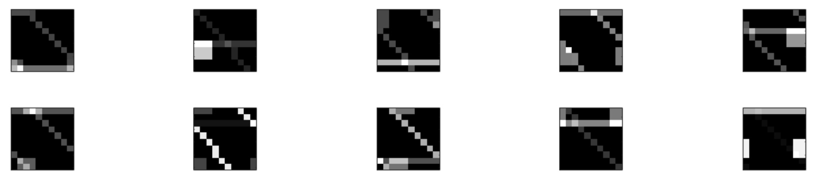
Generiamo dieci immagini come sovrapposizione di una linea, un quadrato e una diagonale



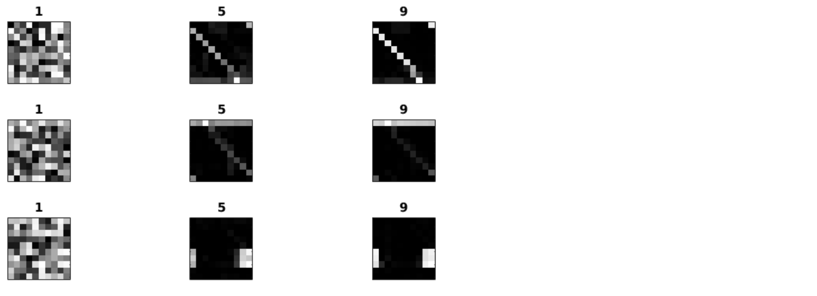
Riportiamo le prime iterazioni del metodo

Esperimento

Generiamo dieci immagini come sovrapposizione di una linea, un quadrato e una diagonale

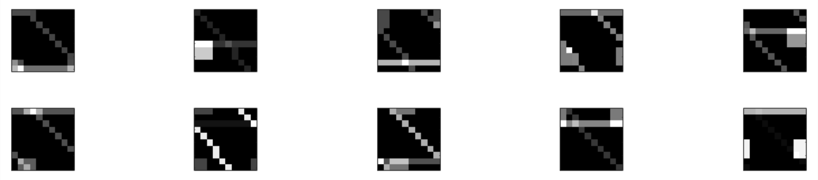


Riportiamo le prime iterazioni del metodo

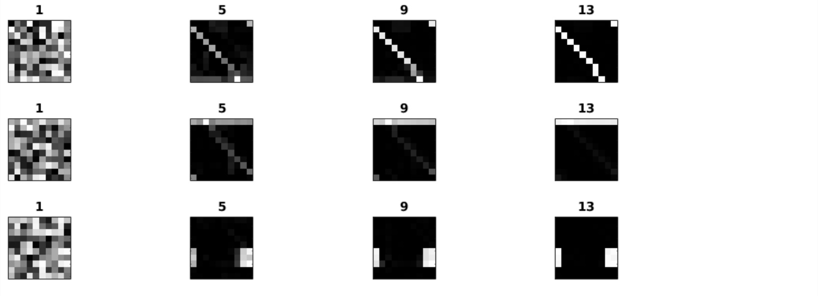


Esperimento

Generiamo dieci immagini come sovrapposizione di una linea, un quadrato e una diagonale

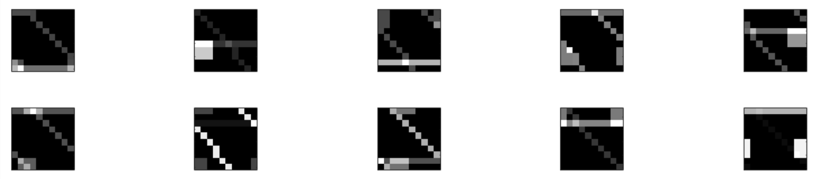


Riportiamo le prime iterazioni del metodo

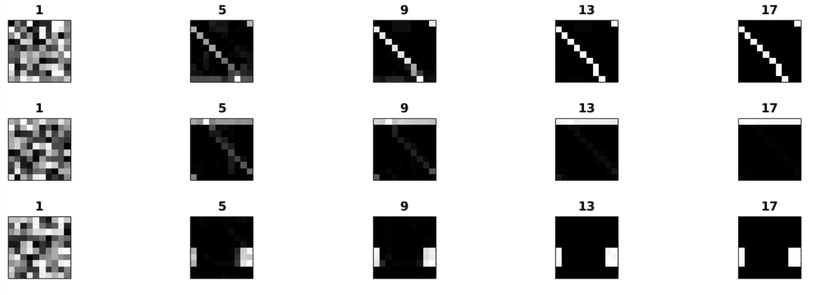


Esperimento

Generiamo dieci immagini come sovrapposizione di una linea, un quadrato e una diagonale



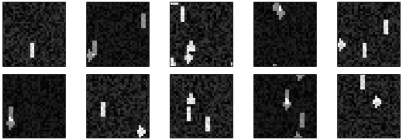
Riportiamo le prime iterazioni del metodo



Estensione

Per riconoscere una componente ripetuta più volte nella stessa immagine, basta ripetere due volte il metodo:

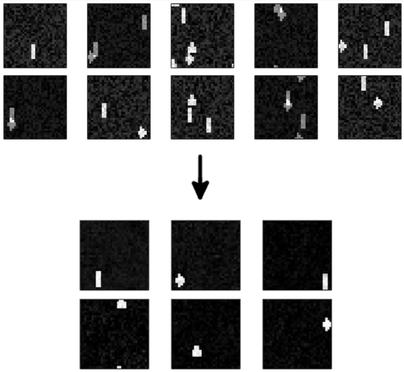
- $$A \sim \widetilde{W} \diamond H_1^T$$
- $$\widetilde{W} \sim W \diamond H_2^T$$
  $$\downarrow$$
  $$A \sim (W \diamond H_2^T) \diamond H_1^T$$
  $$= W \diamond (H_2^T \diamond H_1^T)$$



Estensione

Per riconoscere una componente ripetuta più volte nella stessa immagine, basta ripetere due volte il metodo:

- $$A \sim \widetilde{W} \diamond H_1^T$$
- $$\widetilde{W} \sim W \diamond H_2^T$$
  $$\downarrow$$
  $$A \sim (W \diamond H_2^T) \diamond H_1^T$$
  $$= W \diamond (H_2^T \diamond H_1^T)$$



Estensione

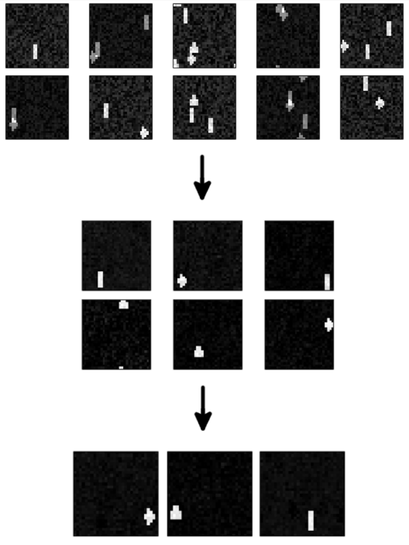
Per riconoscere una componente ripetuta più volte nella stessa immagine, basta ripetere due volte il metodo:

- $$A \sim \widetilde{W} \diamond H_1^T$$
- $$\widetilde{W} \sim W \diamond H_2^T$$

$$\downarrow$$

$$A \sim (W \diamond H_2^T) \diamond H_1^T$$

$$= W \diamond (H_2^T \diamond H_1^T)$$



Estensione

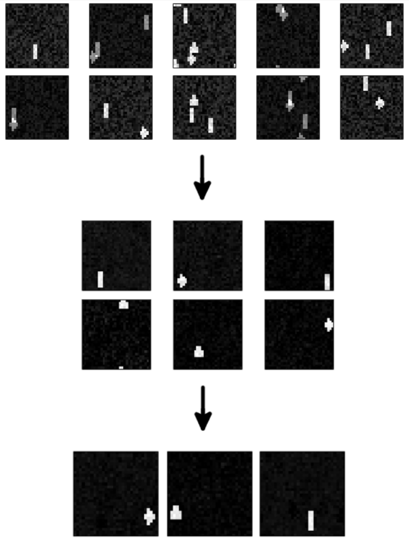
Per riconoscere una componente ripetuta più volte nella stessa immagine, basta ripetere due volte il metodo:

- $$A \sim \widetilde{W} \diamond H_1^T$$
- $$\widetilde{W} \sim W \diamond H_2^T$$

$$\downarrow$$

$$A \sim (W \diamond H_2^T) \diamond H_1^T$$

$$= W \diamond (H_2^T \diamond H_1^T)$$



Lavori Futuri

- Il dominio di H si può estendere a sottoinsiemi di $\mathbb{R}S_n$ per codificare più trasformazioni delle immagini.
- Le componenti cercate spesso sono immagini sparse e disgiunte tra loro, dunque si possono imporre limiti sulla norma di W per ottenere migliori risultati.
- Si possono introdurre degli *shift reali*, che permettono di definire una derivata anche su H, con l'interpolazione delle immagini attraverso spline cicliche.
- Lavori recenti si concentrano su varianti in cui gli elementi di A e W diventano oggetti su varietà.

Lavori Futuri

- Il dominio di H si può estendere a sottoinsiemi di $\mathbb{R}S_n$ per codificare più trasformazioni delle immagini.
- Le componenti cercate spesso sono immagini sparse e disgiunte tra loro, dunque si possono imporre limiti sulla norma di W per ottenere migliori risultati.
- Si possono introdurre degli *shift reali*, che permettono di definire una derivata anche su H, con l'interpolazione delle immagini attraverso spline cicliche.
- Lavori recenti si concentrano su varianti in cui gli elementi di A e W diventano oggetti su varietà.

Lavori Futuri

- Il dominio di H si può estendere a sottoinsiemi di $\mathbb{R}S_n$ per codificare più trasformazioni delle immagini.
- Le componenti cercate spesso sono immagini sparse e disgiunte tra loro, dunque si possono imporre limiti sulla norma di W per ottenere migliori risultati.
- Si possono introdurre degli *shift reali*, che permettono di definire una derivata anche su H, con l'interpolazione delle immagini attraverso spline cicliche.
- Lavori recenti si concentrano su varianti in cui gli elementi di A e W diventano oggetti su varietà.

Lavori Futuri

- Il dominio di H si può estendere a sottoinsiemi di $\mathbb{R}S_n$ per codificare più trasformazioni delle immagini.
- Le componenti cercate spesso sono immagini sparse e disgiunte tra loro, dunque si possono imporre limiti sulla norma di W per ottenere migliori risultati.
- Si possono introdurre degli *shift reali*, che permettono di definire una derivata anche su H, con l'interpolazione delle immagini attraverso spline cicliche.
- Lavori recenti si concentrano su varianti in cui gli elementi di A e W diventano oggetti su varietà.

Lavori Futuri

- Il dominio di H si può estendere a sottoinsiemi di $\mathbb{R}S_n$ per codificare più trasformazioni delle immagini.
- Le componenti cercate spesso sono immagini sparse e disgiunte tra loro, dunque si possono imporre limiti sulla norma di W per ottenere migliori risultati.
- Si possono introdurre degli *shift reali*, che permettono di definire una derivata anche su H, con l'interpolazione delle immagini attraverso spline cicliche.
- Lavori recenti si concentrano su varianti in cui gli elementi di A e W diventano oggetti su varietà.