Processi Stocastici Quasi-Birth and Death con un numero infinito di fasi: proprietà asintotiche di decadimento

Barbarino Giovanni

Università di Pisa

25 aprile 2015

Catene di Markov

Una **Catena di Markov** è un processo stocastico $\{X_n\}$ con spazio degli stati S numerabile e tempi discreti $\mathbb{N}$, in cui valga la *Proprietà di Markov*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_i = x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

Si dice che la catena è **Omogenea** se le transizioni sono indipendenti dal tempo, ossia

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

e in questo caso, è rappresentabile con la sua **Matrice di Transizione** $P = (p_{ij})$, o come una **Passeggiata Aleatoria** sul grafo pesato associato a P.

Catene di Markov

Una **Catena di Markov** è un processo stocastico $\{X_n\}$ con spazio degli stati S numerabile e tempi discreti $\mathbb{N}$, in cui valga la *Proprietà di Markov*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_i = x_i,\ i = 0, 1, \dots, n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

Si dice che la catena è **Omogenea** se le transizioni sono indipendenti dal tempo, ossia

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

e in questo caso, è rappresentabile con la sua **Matrice di Transizione** $P = (p_{ij})$, o come una **Passeggiata Aleatoria** sul grafo pesato associato a P.

Catene di Markov

Una **Catena di Markov** è un processo stocastico $\{X_n\}$ con spazio degli stati S numerabile e tempi discreti $\mathbb{N}$, in cui valga la *Proprietà di Markov*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_i = x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

Si dice che la catena è **Omogenea** se le transizioni sono indipendenti dal tempo, ossia

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

e in questo caso, è rappresentabile con la sua **Matrice di Transizione** $P = (p_{ij})$, o come una **Passeggiata Aleatoria** sul grafo pesato associato a P.

Proprietà

Una Catena di Markov si dice **Irriducibile** se

$$\forall i, j \in S \ \ \exists n \ \mid \ \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \neq 0$$

ossia, se il suo grafo associato è *fortemente connesso*.

Preso uno stato $x \in S$, allora

Proprietà

Una Catena di Markov si dice **Irriducibile** se

$$\forall i,j \in S \;\; \exists n \;\mid\; \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \neq 0$$

ossia, se il suo grafo associato è *fortemente connesso*.

Preso uno stato $x \in S$, allora

- x è Positivo Ricorrente se

$$T_x = \inf\{n \mid X_n = x,\; n \geq 1\}$$

$$\mathbb{P}(T_x < \infty \mid X_0 = x) = 1 \qquad \mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] < \infty$$

- x è a-Periodico se

$$\gcd\{n \mid \mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = x) > 0\} = 1$$

Proprietà

Una Catena di Markov si dice **Irriducibile** se

$$\forall i, j \in S \;\; \exists n \;\mid\; \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \neq 0$$

ossia, se il suo grafo associato è *fortemente connesso*.

Preso uno stato $x \in S$, allora

- x è **Positivo Ricorrente** se

$$T_x = \inf\{n \mid X_n = x, \;\; n \geq 1\}$$

$$\mathbb{P}(T_x < \infty \mid X_0 = x) = 1 \qquad \mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] < \infty$$

- x è s-**Periodico** se

$$gcd\{n \mid \mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = x) \neq 0\} = s$$

Proprietà

Una Catena di Markov si dice **Irriducibile** se

$$\forall i, j \in S \;\; \exists n \mid \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \neq 0$$

ossia, se il suo grafo associato è *fortemente connesso*.

Preso uno stato $x \in S$, allora

- x è **Positivo Ricorrente** se

$$T_x = \inf\{n \mid X_n = x, \;\; n \geq 1\}$$

$$\mathbb{P}(T_x < \infty \mid X_0 = x) = 1 \qquad \mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] < \infty$$

- x è **s-Periodico** se

$$gcd\{n \mid \mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = x) \neq 0\} = s$$

Proprietà

Una Catena di Markov si dice **Irriducibile** se

$$\forall i, j \in S \ \ \exists n \ | \ \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \neq 0$$

ossia, se il suo grafo associato è *fortemente connesso*.

Preso uno stato $x \in S$, allora

- x è **Positivo Ricorrente** se

$$T_x = \inf\{n \mid X_n = x, \ \ n \geq 1\}$$

$$\mathbb{P}(T_x < \infty \mid X_0 = x) = 1 \qquad \mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] < \infty$$

- x è ***s*-Periodico** se

$$gcd\{n \mid \mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = x) \neq 0\} = s$$

Distribuzione Stazionaria

Data π una distribuzione di probabilità su S, si dice che è **Stazionaria** se

$$\pi^t P = \pi^t$$

Esistenza e Unicità

- Se $|S| < \infty$, allora π esiste sempre.
- Se $|S| = \infty$, allora π esiste se e solo ogni stato è *positivo ricorrente*.
- Se π esiste, allora è unico se la catena è *irriducibile*, e nel caso in cui sia anche *aperiodica*, si ha

$$\pi^t = \lim_{n\to\infty} \pi^t_{(0)} P^n \qquad \lim_{n\to\infty} P^n = e\pi^t$$

Distribuzione Stazionaria

Data π una distribuzione di probabilità su S, si dice che è **Stazionaria** se

$$\pi^t P = \pi^t$$

Esistenza e Unicità

- Se $|S| < \infty$, allora π esiste sempre.
- Se $|S| = \infty$, allora π esiste se e solo ogni stato è *positivo ricorrente*.
- Se π esiste, allora è unico se la catena è *irriducibile*, e nel caso in cui sia anche *aperiodica*, si ha

$$\pi^t = \lim_{n\to\infty} \pi^t_{(0)} P^n \qquad \lim_{n\to\infty} P^n = e\pi^t$$

Distribuzione Stazionaria

Data π una distribuzione di probabilità su S, si dice che è **Stazionaria** se

$$\pi^t P = \pi^t$$

Esistenza e Unicità

- Se $|S| < \infty$, allora π esiste sempre.
- Se $|S| = \infty$, allora π esiste se e solo ogni stato è *positivo ricorrente*.
- Se π esiste, allora è unico se la catena è *irriducibile*, e nel caso in cui sia anche *aperiodica*, si ha

$$\pi^t = \lim_{n\to\infty} \pi^t_{(0)} P^n \qquad \lim_{n\to\infty} P^n = e\pi^t$$

Distribuzione Stazionaria

Data π una distribuzione di probabilità su S, si dice che è **Stazionaria** se

$$\pi^t P = \pi^t$$

Esistenza e Unicità

- Se $|S| < \infty$, allora π esiste sempre.
- Se $|S| = \infty$, allora π esiste se e solo ogni stato è *positivo ricorrente*.
- Se π esiste, allora è unico se la catena è *irriducibile*, e nel caso in cui sia anche *aperiodica*, si ha

$$\pi^t = \lim_{n\to\infty} \pi_{(0)}^t P^n \qquad \lim_{n\to\infty} P^n = e\pi^t$$

Distribuzione Stazionaria

Data π una distribuzione di probabilità su S, si dice che è **Stazionaria** se

$$\pi^t P = \pi^t$$

Esistenza e Unicità

- Se $|S| < \infty$, allora π esiste sempre.
- Se $|S| = \infty$, allora π esiste se e solo ogni stato è *positivo ricorrente*.
- Se π esiste, allora è unico se la catena è *irriducibile*, e nel caso in cui sia anche *aperiodica*, si ha

$$\pi^t = \lim_{n\to\infty} \pi^t_{(0)} P^n \qquad \lim_{n\to\infty} P^n = e\pi^t$$

Reflecting Random Walk

Poniamo

$$S = \mathbb{N}^d$$

$$J \subseteq \{1, 2, \ldots, d\} \to S_J = \{x \in S : x_i = 0 \iff i \notin J\}$$

Prese delle variabili aleatorie Z^J su $\mathbb{Z}^d$, definiamo la Catena di Markov $\{X_n\}$ per cui

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(Z^J = y - x) \quad se \quad x \in S_J$$

Nota: Le transizioni non dipendono dallo stato di partenza.

Distribuzione Stazionaria

Se $d \geq 4$, l'esistenza di π è un *problema aperto*

Reflecting Random Walk

Poniamo

$$S = \mathbb{N}^d$$

$$J \subseteq \{1, 2, \dots, d\} \to S_J = \{x \in S : x_i = 0 \iff i \notin J\}$$

Prese delle variabili aleatorie Z^J su $\mathbb{Z}^d$, definiamo la Catena di Markov $\{X_n\}$ per cui

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(Z^J = y - x) \quad se \quad x \in S_J$$

Nota: Le transizioni non dipendono dallo stato di partenza.

Distribuzione Stazionaria

Se $d \geq 4$, l'esistenza di π è un *problema aperto*

Reflecting Random Walk

Poniamo

$$S = \mathbb{N}^d$$

$$J \subseteq \{1, 2, \ldots, d\} \to S_J = \{\mathbf{x} \in S : x_i = 0 \iff i \notin J\}$$

Prese delle variabili aleatorie Z^J su $\mathbb{Z}^d$, definiamo la Catena di Markov $\{X_n\}$ per cui

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \mathbf{y} \mid X_n = \mathbf{x}) = \mathbb{P}(Z^J = \mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad se \quad \mathbf{x} \in S_J$$

Nota: Le transizioni non dipendono dallo stato di partenza.

Distribuzione Stazionaria

Se $d \geq 4$, l'esistenza di π è un *problema aperto*

Reflecting Random Walk

Poniamo

$$S = \mathbb{N}^d$$

$$J \subseteq \{1, 2, \ldots, d\} \rightarrow S_J = \{\boldsymbol{x} \in S : x_i = 0 \iff i \notin J\}$$

Prese delle variabili aleatorie Z^J su $\mathbb{Z}^d$, definiamo la Catena di Markov $\{X_n\}$ per cui

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \boldsymbol{y} \mid X_n = \boldsymbol{x}) = \mathbb{P}(Z^J = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \quad se \quad \boldsymbol{x} \in S_J$$

Nota: Le transizioni non dipendono dallo stato di partenza.

Distribuzione Stazionaria

Se $d \geq 4$, l'esistenza di π è un *problema aperto*

Reflecting Random Walk

Poniamo

$$S = \mathbb{N}^d$$

$$J \subseteq \{1, 2, \dots, d\} \to S_J = \{\mathbf{x} \in S : x_i = 0 \iff i \notin J\}$$

Prese delle variabili aleatorie Z^J su $\mathbb{Z}^d$, definiamo la Catena di Markov $\{X_n\}$ per cui

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \mathbf{y} \mid X_n = \mathbf{x}) = \mathbb{P}(Z^J = \mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad se \quad \mathbf{x} \in S_J$$

Nota: Le transizioni non dipendono dallo stato di partenza.

Distribuzione Stazionaria

Se $d \geq 4$, l'esistenza di π è un *problema aperto*

QBD

Supponiamo $d = 2$, ossia $\quad Z^J = (Z_1^J, Z_2^J)$.
In questo caso, chiamiamo **Livello** la prima coordinata, e **Fase** la seconda.

Abbiamo un processo **Quasi-Birth and Death** se

$$\mathbb{P}(Z_1^J \notin \{-1, 0, 1\}) = 0 \quad \forall J$$

e la matrice di transizione è tridiagonale a blocchi

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad A_i, B_j = \begin{pmatrix} * \\ \hline \\ Toeplitz \end{pmatrix}$$

Dividiamo anche π in sottovettori

$$\text{Livello} \ : \ \boldsymbol{\pi}^t = [\boldsymbol{\pi}_0^t, \boldsymbol{\pi}_1^t, \dots] \qquad \text{Fase} \ : \ \boldsymbol{\pi}_i^t = [\pi_{i0}, \pi_{i1}, \dots]$$

QBD

Supponiamo $d = 2$, ossia $\quad Z^J = (Z_1^J, Z_2^J)$.
In questo caso, chiamiamo **Livello** la prima coordinata, e **Fase** la seconda.

Abbiamo un processo **Quasi-Birth and Death** se

$$\mathbb{P}(Z_1^J \notin \{-1, 0, 1\}) = 0 \quad \forall J$$

e la matrice di transizione è tridiagonale a blocchi

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad A_i, B_j = \left(\frac{*}{\textit{Toeplitz}} \right)$$

Dividiamo anche π in sottovettori

$$\text{Livello} \ : \ \pi^t = [\pi_0^t, \pi_1^t, \dots] \qquad \text{Fase} \ : \ \pi_i^t = [\pi_{i0}, \pi_{i1}, \dots]$$

QBD

Supponiamo $d = 2$, ossia $\quad Z^J = (Z_1^J, Z_2^J)$.
In questo caso, chiamiamo **Livello** la prima coordinata, e **Fase** la seconda.

Abbiamo un processo **Quasi-Birth and Death** se

$$\mathbb{P}(Z_1^J \notin \{-1, 0, 1\}) = 0 \quad \forall J$$

e la matrice di transizione è tridiagonale a blocchi

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad A_i, B_j = \begin{pmatrix} * \\ \hline \\ \textit{Toeplitz} \end{pmatrix}$$

Dividiamo anche π in sottovettori

$$\text{Livello} \;:\; \boldsymbol{\pi}^t = [\boldsymbol{\pi}_0^t, \boldsymbol{\pi}_1^t, \dots] \qquad \text{Fase} \;:\; \boldsymbol{\pi}_i^t = [\pi_{i0}, \pi_{i1}, \dots]$$

Matrice R

Poniamo che

- A0 P irriducibile
- A1 $A_{-1} + A_0 + A_1$ irriducibile e aperiodica
- A2 Vale la condizione **1-aritmetica**, ossia

$$gcd\{n_1 + \ldots + n_k \mid A_{n_1}(i, j_1) \cdot A_{n_2}(j_1, j_2) \cdot \ldots \cdot A_{n_k}(j_{k-1}, i) > 0\} = 1$$

Rate Matrix

- Esiste R la minima soluzione irriducibile nonnegativa di

$$X = X^2 A_{-1} + XA_0 + A_1$$

- Se π esiste, vale

$$\pi_n^t = \pi_0^t R^n$$

Matrice R

Poniamo che

- A0 P irriducibile
- A1 $A_{-1} + A_0 + A_1$ irriducibile e aperiodica
- A2 Vale la condizione **1-aritmetica**, ossia

$$gcd\{n_1 + \ldots + n_k \mid A_{n_1}(i, j_1) \cdot A_{n_2}(j_1, j_2) \cdot \ldots \cdot A_{n_k}(j_{k-1}, i) > 0\} = 1$$

Rate Matrix

- Esiste R la minima soluzione irriducibile nonnegativa di

$$X = X^2 A_{-1} + XA_0 + A_1$$

- Se π esiste, vale

$$\pi_n^t = \pi_0^t R^n$$

Matrice R

Poniamo che

- **A0** P irriducibile
- **A1** $A_{-1} + A_0 + A_1$ irriducibile e aperiodica
- **A2** Vale la condizione **1-aritmetica**, ossia

$$gcd\{n_1 + \ldots + n_k \mid A_{n_1}(i, j_1) \cdot A_{n_2}(j_1, j_2) \cdot \ldots \cdot A_{n_k}(j_{k-1}, i) > 0\} = 1$$

Rate Matrix

- Esiste R la minima soluzione irriducibile nonnegativa di

$$X = X^2 A_{-1} + X A_0 + A_1$$

- Se π esiste, vale

$$\pi_n^t = \pi_0^t R^n$$

Matrice R

Poniamo che

- **A0** P irriducibile
- **A1** $A_{-1} + A_0 + A_1$ irriducibile e aperiodica
- **A2** Vale la condizione **1-aritmetica**, ossia

$$gcd\{n_1 + \ldots + n_k \mid A_{n_1}(i, j_1) \cdot A_{n_2}(j_1, j_2) \cdot \ldots \cdot A_{n_k}(j_{k-1}, i) > 0\} = 1$$

Rate Matrix

- Esiste R la minima soluzione irriducibile nonnegativa di

$$X = X^2 A_{-1} + X A_0 + A_1$$

- Se π esiste, vale

$$\pi_n^t = \pi_0^t R^n$$

Matrice R

Poniamo che

A0 P irriducibile

A1 $A_{-1} + A_0 + A_1$ irriducibile e aperiodica

A2 Vale la condizione **1-aritmetica**, ossia

$$gcd\{n_1 + \ldots + n_k \mid A_{n_1}(i, j_1) \cdot A_{n_2}(j_1, j_2) \cdot \ldots \cdot A_{n_k}(j_{k-1}, i) > 0\} = 1$$

Rate Matrix

- Esiste R la minima soluzione irriducibile nonnegativa di

$$X = X^2 A_{-1} + XA_0 + A_1$$

- Se π esiste, vale

$$\pi_n^t = \pi_0^t R^n$$

Matrice R

Poniamo che

- A0 P irriducibile
- A1 $A_{-1} + A_0 + A_1$ irriducibile e aperiodica
- A2 Vale la condizione **1-aritmetica**, ossia

$$gcd\{n_1 + \ldots + n_k \mid A_{n_1}(i, j_1) \cdot A_{n_2}(j_1, j_2) \cdot \ldots \cdot A_{n_k}(j_{k-1}, i) > 0\} = 1$$

Rate Matrix

- Esiste R la minima soluzione irriducibile nonnegativa di

$$X = X^2 A_{-1} + XA_0 + A_1$$

- Se π esiste, vale

$$\pi_n^t = \pi_0^t R^n$$

Problemi

Se lo spazio delle fasi è **finito**, siano λ il raggio spettrale di R, e $\boldsymbol{v}$ il relativo autovettore. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} \boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{v}$$

Se lo spazio delle fasi è **infinito**

- lo spettro di R non è più sufficiente
- il comportamento asintotico dipende da B_0 e B_1
- non è detto che π abbia una decrescita esponenziale
- la positiva ricorrenza è più difficile da caratterizzare
- calcolare R è più difficile

Problemi

Se lo spazio delle fasi è **finito**, siano λ il raggio spettrale di R, e $\boldsymbol{v}$ il relativo autovettore. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} \boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{v}$$

Se lo spazio delle fasi è **infinito**

- lo spettro di R non è più sufficiente
- il comportamento asintotico dipende da B_0 e B_1
- non è detto che π abbia una decrescita esponenziale
- la positiva ricorrenza è più difficile da caratterizzare
- calcolare R è più difficile

Problemi

Se lo spazio delle fasi è **finito**, siano λ il raggio spettrale di R, e $\boldsymbol{v}$ il relativo autovettore. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{v}$$

Se lo spazio delle fasi è **infinito**

- lo spettro di R non è più sufficiente
- il comportamento asintotico dipende da B_0 e B_1
- non è detto che π abbia una decrescita esponenziale
- la positiva ricorrenza è più difficile da caratterizzare
- calcolare R è più difficile

Problemi

Se lo spazio delle fasi è **finito**, siano λ il raggio spettrale di R, e $\boldsymbol{v}$ il relativo autovettore. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{v}$$

Se lo spazio delle fasi è **infinito**

- lo spettro di R non è più sufficiente
- il comportamento asintotico dipende da B_0 e B_1
- non è detto che π abbia una decrescita esponenziale
- la positiva ricorrenza è più difficile da caratterizzare
- calcolare R è più difficile

Problemi

Se lo spazio delle fasi è **finito**, siano λ il raggio spettrale di R, e $\boldsymbol{v}$ il relativo autovettore. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{v}$$

Se lo spazio delle fasi è **infinito**

- lo spettro di R non è più sufficiente
- il comportamento asintotico dipende da B_0 e B_1
- non è detto che $\boldsymbol{\pi}$ abbia una decrescita esponenziale
- la positiva ricorrenza è più difficile da caratterizzare
- calcolare R è più difficile

Problemi

Se lo spazio delle fasi è **finito**, siano λ il raggio spettrale di R, e $\boldsymbol{v}$ il relativo autovettore. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{v}$$

Se lo spazio delle fasi è **infinito**

- lo spettro di R non è più sufficiente
- il comportamento asintotico dipende da B_0 e B_1
- non è detto che $\boldsymbol{\pi}$ abbia una decrescita esponenziale
- la positiva ricorrenza è più difficile da caratterizzare
- calcolare R è più difficile

Problemi

Se lo spazio delle fasi è **finito**, siano λ il raggio spettrale di R, e $\boldsymbol{v}$ il relativo autovettore. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{v}$$

Se lo spazio delle fasi è **infinito**

- lo spettro di R non è più sufficiente
- il comportamento asintotico dipende da B_0 e B_1
- non è detto che $\boldsymbol{\pi}$ abbia una decrescita esponenziale
- la positiva ricorrenza è più difficile da caratterizzare
- calcolare R è più difficile

Metodi di Troncamento

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_0 & B_1 & & \\ \hline A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ \hline & A_{-1} & A_0 & \ddots \\ \hline & & \ddots & \ddots \end{array}\right)$$

Metodi di Troncamento

$$
{}_kP = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} {}_kB_0 & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_kB_1 & \\ & * \end{matrix} & & \\ \hline
\begin{matrix} {}_kA_{-1} & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_kA_0 & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_kA_1 & \\ & * \end{matrix} & \\ \hline
& \begin{matrix} {}_kA_{-1} & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_kA_0 & \\ & * \end{matrix} & \ddots \\ \hline
& & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
$$

Prendiamo i minori principali di testa $k \times k$.

Si può calcolare ${}_kR$, e dunque ${}_k\pi$, ma esistono esempi in cui non converge.

Metodi di Troncamento

$$
{}_kP = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|c}
{}_kB_0 & & {}_kB_1 & & & & \\
 & * & & * & & & \\
\hline
{}_kA_{-1} & & {}_kA_0 & & {}_kA_1 & & \\
 & * & & * & & * & \\
\hline
 & & {}_kA_{-1} & & {}_kA_0 & & \ddots \\
 & & & * & & * & \\
\hline
 & & & & & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
$$

Prendiamo i minori principali di testa $k \times k$.

Si può calcolare ${}_kR$, e dunque ${}_k\pi$, ma esistono esempi in cui non converge.

Metodi di Troncamento

$$
{}_k\widetilde{P} = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}{}_k\widetilde{B}_0 & \\ & *\end{matrix} & \begin{matrix}{}_k\widetilde{B}_1 & \\ & *\end{matrix} & & \\ \hline
\begin{matrix}{}_k\widetilde{A}_{-1} & \\ & *\end{matrix} & \begin{matrix}{}_k\widetilde{A}_0 & \\ & *\end{matrix} & \begin{matrix}{}_k\widetilde{A}_1 & \\ & *\end{matrix} & \\ \hline
 & \begin{matrix}{}_k\widetilde{A}_{-1} & \\ & *\end{matrix} & \begin{matrix}{}_k\widetilde{A}_0 & \\ & *\end{matrix} & \ddots \\ \hline
 & & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
$$

Modifichiamo le matrici in modo che siano *stocastiche*.

${}_k\pi$ converge, ma non si hanno risultati teorici.

Metodi di Troncamento

$$
{}_k\widetilde{P} = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} {}_k\widetilde{B}_0 & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_k\widetilde{B}_1 & \\ & * \end{matrix} & & \\ \hline
\begin{matrix} {}_k\widetilde{A}_{-1} & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_k\widetilde{A}_0 & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_k\widetilde{A}_1 & \\ & * \end{matrix} & \\ \hline
 & \begin{matrix} {}_k\widetilde{A}_{-1} & \\ & * \end{matrix} & \begin{matrix} {}_k\widetilde{A}_0 & \\ & * \end{matrix} & \ddots \\ \hline
 & & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
$$

Modifichiamo le matrici in modo che siano *stocastiche*.

${}_k\pi$ converge, ma **non si hanno risultati teorici**.

Doppia Coda

Un processo **QBD Doppio** è un QBD per cui

$$\mathbb{P}(Z^J \notin \{-1,0,1\}^2) = 0 \quad \forall J$$

Sotto forma matriciale, vuol dire che A_{-1}, A_0, A_1, B_0, B_1 sono tridiagonali

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Nel grafo associato, ci muoviamo su nodi adiacenti

Doppia Coda

Un processo **QBD Doppio** è un QBD per cui

$$\mathbb{P}(Z^J \notin \{-1,0,1\}^2) = 0 \quad \forall J$$

Sotto forma matriciale, vuol dire che A_{-1}, A_0, A_1, B_0, B_1 sono tridiagonali

Nel grafo associato, ci muoviamo su nodi adiacenti

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Doppia Coda

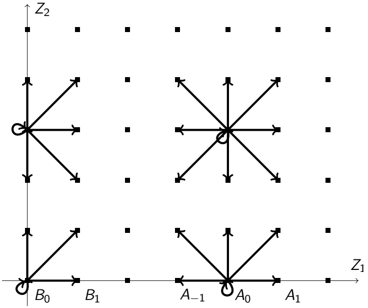
Un processo **QBD Doppio** è un QBD per cui

$$\mathbb{P}(Z^J \notin \{-1,0,1\}^2) = 0 \quad \forall J$$

Nel grafo associato, ci muoviamo su nodi adiacenti

Sotto forma matriciale, vuol dire che A_{-1}, A_0, A_1, B_0, B_1 sono tridiagonali

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$



Condizioni di Positiva Ricorrenza

Poniamo che la Catena sia irriducibile e aperiodica, e siano

$$\boldsymbol{m} = \mathbb{E}\left[Z\right] \qquad \boldsymbol{m}^1 = \mathbb{E}\left[Z^1\right] \qquad \boldsymbol{m}^2 = \mathbb{E}\left[Z^2\right]$$

dove $Z^{\{1,2\}} = Z$, con $\boldsymbol{m} \neq 0$.

Esistenza di π

La Catena è positiva ricorrente se e solo se vale una delle seguenti

- $m_1 < 0 \qquad m_2 < 0 \qquad m_1 m_2^1 < m_2 m_1^1 \qquad m_2 m_1^2 < m_2^1 m_2^2$
- $m_1 \geq 0 \qquad m_2 < 0 \qquad m_1 m_2^1 < m_2 m_1^1$
- $m_1 < 0 \qquad m_2 \geq 0 \qquad m_2 m_1^2 < m_2^1 m_2^2$

Condizioni di Positiva Ricorrenza

Poniamo che la Catena sia irriducibile e aperiodica, e siano

$$\boldsymbol{m} = \mathbb{E}[Z] \qquad \boldsymbol{m}^1 = \mathbb{E}\left[Z^1\right] \qquad \boldsymbol{m}^2 = \mathbb{E}\left[Z^2\right]$$

dove $Z^{\{1,2\}} = Z$, con $\boldsymbol{m} \neq 0$.

Esistenza di π

La Catena è positiva ricorrente se e solo se vale una delle seguenti

- $m_1 < 0 \quad m_2 < 0 \quad m_1 m_2^1 < m_2 m_1^1 \quad m_2 m_1^2 < m_2^1 m_2^2$
- $m_1 \geq 0 \quad m_2 < 0 \quad m_1 m_2^1 < m_2 m_1^1$
- $m_1 < 0 \quad m_2 \geq 0 \quad m_2 m_1^2 < m_2^1 m_2^2$

Catene di Markov Additive

Definiamo un nuovo processo $\{L_n^1\}$ su $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dato da

$$\mathbb{P}(L_{n+1}^1 = (m+s,k) \mid L_n^1 = (m,j)) = [A_s]_{jk}$$

Abbiamo tolto il limite sul livello

La matrice di transizione è composta solo dagli A_i

$$P^1 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Supponiamo che i processi L_n^1 e L_n^2 siano irriducibili, e che le relative matrici A_k siano 1-aritmetiche.

Catene di Markov Additive

Definiamo un nuovo processo $\{L_n^1\}$ su $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dato da

$$\mathbb{P}(L_{n+1}^1 = (m+s,k) \mid L_n^1 = (m,j)) = [A_s]_{jk}$$

Abbiamo tolto il limite sul livello

La matrice di transizione è composta solo dagli A_i

$$P^1 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Supponiamo che i processi L_n^1 e L_n^2 siano irriducibili, e che le relative matrici A_k siano 1-aritmetiche.

Catene di Markov Additive

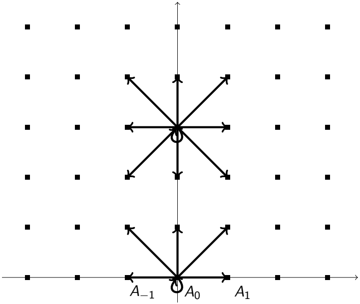
Definiamo un nuovo processo $\{L_n^1\}$ su $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dato da

$$\mathbb{P}(L_{n+1}^1 = (m+s,k) \mid L_n^1 = (m,j)) = [A_s]_{jk}$$

Abbiamo tolto il limite sul livello

La matrice di transizione è composta solo dagli A_i

$$P^1 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$



Supponiamo che i processi L_n^1 e L_n^2 siano irriducibili, e che le relative matrici A_k siano 1-aritmetiche.

Catene di Markov Additive

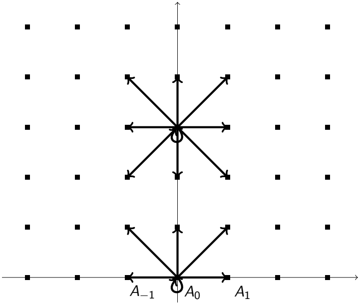
Definiamo un nuovo processo $\{L_n^1\}$ su $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dato da

$$\mathbb{P}(L_{n+1}^1 = (m+s,k) \mid L_n^1 = (m,j)) = [A_s]_{jk}$$

Abbiamo tolto il limite sul livello

La matrice di transizione è composta solo dagli A_i

$$P^1 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$



Supponiamo che i processi L_n^1 e L_n^2 siano irriducibili, e che le relative matrici A_k siano 1-aritmetiche.

Wiener-Hopf

Sotto le ipotesi per cui R esiste, definiamo

$$A^{(1)}(z) = z^{-1}A_{-1} + A_0 + zA_1$$

Factorization

$$I - A^{(1)}(z) = (I - zR)(I - (A_0 + RA_{-1} + z^{-1}A_{-1}))$$

Definiamo inoltre

$$\Lambda_R = \{(z, x) \;:\; zx^t R = x^t, \quad z \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}_+^\infty - \{0\}\}$$

$$\Lambda_A = \{(z, x) \;:\; x^t A^{(1)}(z) = x^t, \quad z \geq 1, \quad x > 0\}$$

Corrispondenza

$$(z, x) \in \Lambda_R \iff (z, x) \in \Lambda_A$$

Wiener-Hopf

Sotto le ipotesi per cui R esiste, definiamo

$$A^{(1)}(z) = z^{-1}A_{-1} + A_0 + zA_1$$

Factorization

$$I - A^{(1)}(z) = (I - zR)(I - (A_0 + RA_{-1} + z^{-1}A_{-1}))$$

Definiamo inoltre

$$\Lambda_R = \{(z,x) \;:\; zx^tR = x^t, \quad z \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}_+^\infty - \{0\}\}$$

$$\Lambda_A = \{(z,x) \;:\; x^tA^{(1)}(z) = x^t, \quad z \geq 1, \quad x > 0\}$$

Corrispondenza

$$(z,x) \in \Lambda_R \iff (z,x) \in \Lambda_A$$

Wiener-Hopf

Sotto le ipotesi per cui R esiste, definiamo

$$A^{(1)}(z) = z^{-1}A_{-1} + A_0 + zA_1$$

Factorization

$$I - A^{(1)}(z) = (I - zR)(I - (A_0 + RA_{-1} + z^{-1}A_{-1}))$$

Definiamo inoltre

$$\Lambda_R = \{(z, \boldsymbol{x}) \ : \ z\boldsymbol{x}^t R = \boldsymbol{x}^t, \quad z \geq 1, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^\infty - \{0\}\}$$

$$\Lambda_A = \{(z, \boldsymbol{x}) \ : \ \boldsymbol{x}^t A^{(1)}(z) = \boldsymbol{x}^t, \quad z \geq 1, \quad \boldsymbol{x} > 0\}$$

Corrispondenza

$$(z, x) \in \Lambda_R \iff (z, x) \in \Lambda_A$$

Wiener-Hopf

Sotto le ipotesi per cui R esiste, definiamo

$$A^{(1)}(z) = z^{-1}A_{-1} + A_0 + zA_1$$

Factorization

$$I - A^{(1)}(z) = (I - zR)(I - (A_0 + RA_{-1} + z^{-1}A_{-1}))$$

Definiamo inoltre

$$\Lambda_R = \{(z, \mathbf{x}) \ : \ z\mathbf{x}^t R = \mathbf{x}^t, \quad z \geq 1, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^\infty - \{0\}\}$$

$$\Lambda_A = \{(z, \mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x}^t A^{(1)}(z) = \mathbf{x}^t, \quad z \geq 1, \quad \mathbf{x} > 0\}$$

Corrispondenza

$$(z, \mathbf{x}) \in \Lambda_R \iff (z, \mathbf{x}) \in \Lambda_A$$

Struttura di $A^{(1)}$

Poniamo $\quad p_{ij} = \mathbb{P}(Z = (i,j)) \quad p_{ij}^k = \mathbb{P}(Z^k = (i,j))$

$$A^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} p_0^1(z) & p_1^1(z) & & & \\ p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & & \\ & p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} p_k^1(z) = z^{-1} p_{-1,k}^1 + p_{0,k}^1 + z\, p_{1,k}^1 \\ p_k(z) = z^{-1} p_{-1,k} + p_{0,k} + z\, p_{1,k} \end{array}$$

$$\varphi^1(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{\theta Z^1}\right] = p_0^1(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_1^1(e^{\theta_1})$$

$$\varphi^1(\theta) = \varphi(\theta) = 1 \implies A^{(1)}(e^{\theta_1}) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Struttura di $A^{(1)}$

Poniamo $\quad p_{ij} = \mathbb{P}(Z = (i,j)) \qquad p_{ij}^k = \mathbb{P}(Z^k = (i,j))$

$$A^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} p_0^1(z) & p_1^1(z) & & & \\ p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & & \\ & p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$p_k^1(z) = z^{-1} p_{-1,k}^1 + p_{0,k}^1 + z\, p_{1,k}^1$$

$$p_k(z) = z^{-1} p_{-1,k} + p_{0,k} + z\, p_{1,k}$$

$$\varphi^1(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{\theta Z^1}\right] = p_0^1(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_1^1(e^{\theta_1})$$

$$\varphi^1(\theta) = \varphi(\theta) = 1 \implies A^{(1)}(e^{\theta_1}) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Struttura di $A^{(1)}$

Poniamo $\quad p_{ij} = \mathbb{P}(Z = (i,j)) \quad p_{ij}^k = \mathbb{P}(Z^k = (i,j))$

$$A^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} p_0^1(z) & p_1^1(z) & & & \\ p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & & \\ & p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} p_k^1(z) &= z^{-1} p_{-1,k}^1 + p_{0,k}^1 + z\, p_{1,k}^1 \\ p_k(z) &= z^{-1} p_{-1,k} + p_{0,k} + z\, p_{1,k} \end{aligned}$$

$$\varphi^1(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{\theta Z^1}\right] = p_0^1(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_1^1(e^{\theta_1})$$

$$\varphi^1(\theta) = \varphi(\theta) = 1 \implies A^{(1)}(e^{\theta_1}) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Struttura di $A^{(1)}$

Poniamo $\quad p_{ij} = \mathbb{P}(Z = (i,j)) \qquad p^k_{ij} = \mathbb{P}(Z^k = (i,j))$

$$A^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} p^1_0(z) & p^1_1(z) & & & \\ p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & & \\ & p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} p^1_k(z) &= z^{-1} p^1_{-1,k} + p^1_{0,k} + z\, p^1_{1,k} \\ p_k(z) &= z^{-1} p_{-1,k} + p_{0,k} + z\, p_{1,k} \end{aligned}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z}\right] = \sum_{k \in \{-1,0,1\}} e^{k\theta_2}\, \mathbb{E}\left[e^{\theta_1 Z_1} \mathbf{1}(Z_2 = k)\right] =$$

$$= \sum_{k \in \{-1,0,1\}} e^{k\theta_2}\, p_k(e^{\theta_1}) = e^{-\theta_2}\left[p_{-1}(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_0(e^{\theta_1}) + e^{2\theta_2}\, p_1(e^{\theta_1})\right]$$

$$\varphi^1(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z^1}\right] = p^1_0(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p^1_1(e^{\theta_1})$$

Struttura di $A^{(1)}$

Poniamo $\quad p_{ij} = \mathbb{P}(Z = (i,j)) \quad p_{ij}^k = \mathbb{P}(Z^k = (i,j))$

$$A^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} p_0^1(z) & p_1^1(z) & & & \\ p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & & \\ & p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} p_k^1(z) &= z^{-1} p_{-1,k}^1 + p_{0,k}^1 + z\, p_{1,k}^1 \\ p_k(z) &= z^{-1} p_{-1,k} + p_{0,k} + z\, p_{1,k} \end{aligned}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z}\right] = e^{-\theta_2}\left[p_{-1}(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_0(e^{\theta_1}) + e^{2\theta_2}\, p_1(e^{\theta_1})\right]$$

$$\varphi^1(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z^1}\right] = p_0^1(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_1^1(e^{\theta_1})$$

$$\varphi^1(\boldsymbol{\theta}) = \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1 \implies A^{(1)}(e^{\theta_1}) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Struttura di $A^{(1)}$

Poniamo $\quad p_{ij} = \mathbb{P}(Z = (i,j)) \quad p^k_{ij} = \mathbb{P}(Z^k = (i,j))$

$$A^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} p^1_0(z) & p^1_1(z) & & & \\ p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & & \\ & p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} p^1_k(z) &= z^{-1} p^1_{-1,k} + p^1_{0,k} + z\, p^1_{1,k} \\ p_k(z) &= z^{-1} p_{-1,k} + p_{0,k} + z\, p_{1,k} \end{aligned}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z}\right] = e^{-\theta_2}\left[p_{-1}(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_0(e^{\theta_1}) + e^{2\theta_2}\, p_1(e^{\theta_1})\right]$$

$$\varphi^1(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z^1}\right] = p^1_0(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p^1_1(e^{\theta_1})$$

$$\varphi^1(\boldsymbol{\theta}) = \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1 \implies A^{(1)}(e^{\theta_1}) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Struttura di $A^{(1)}$

Poniamo $\quad p_{ij} = \mathbb{P}(Z = (i,j)) \quad p^k_{ij} = \mathbb{P}(Z^k = (i,j))$

$$A^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} p^1_0(z) & p^1_1(z) & & & \\ p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & & \\ & p_{-1}(z) & p_0(z) & p_1(z) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} p^1_k(z) &= z^{-1} p^1_{-1,k} + p^1_{0,k} + z\, p^1_{1,k} \\ p_k(z) &= z^{-1} p_{-1,k} + p_{0,k} + z\, p_{1,k} \end{aligned}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z}\right] = e^{-\theta_2}\left[p_{-1}(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p_0(e^{\theta_1}) + e^{2\theta_2}\, p_1(e^{\theta_1})\right]$$

$$\varphi^1(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[e^{\boldsymbol{\theta} Z^1}\right] = p^1_0(e^{\theta_1}) + e^{\theta_2}\, p^1_1(e^{\theta_1})$$

$$\varphi^1(\boldsymbol{\theta}) = \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1 \implies A^{(1)}(e^{\theta_1}) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_2} \\ e^{2\theta_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Domini di Convergenza

Definiamo il **Dominio di Convergenza** come

$$D_1 = \{\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2\ :\ \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1, \quad \varphi^1(\boldsymbol{\theta}) \leq 1, \quad \theta_1 \geq 0\}$$

Corrispondenza con lo Spettro

Esiste una bigezione tra $\boldsymbol{\theta} \in D_1$ e $(z, x) \in \Lambda_A$ per cui

- $z = e^{\theta_1}$
- Fissato θ_1, siano $\overline{\theta}_2$ e $\underline{\theta}_2$ le soluzioni di $\varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1$. Allora

$$x_n = \begin{cases} c_1 e^{-\underline{\theta}_2(n-1)} + c_2 e^{-\overline{\theta}_2(n-1)} & \overline{\theta}_2 \neq \underline{\theta}_2 \\ (c_1' + c_2'(n-1))e^{-\underline{\theta}_2(n-2)} & \overline{\theta}_2 = \underline{\theta}_2 \end{cases}$$

Domini di Convergenza

Definiamo il **Dominio di Convergenza** come

$$D_1 = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1, \quad \varphi^1(\boldsymbol{\theta}) \leq 1, \quad \theta_1 \geq 0 \right\}$$

Corrispondenza con lo Spettro

Esiste una bigezione tra $\boldsymbol{\theta} \in D_1$ e $(z, \boldsymbol{x}) \in \Lambda_A$ per cui

- $z = e^{\theta_1}$
- Fissato θ_1, siano $\overline{\theta}_2$ e $\underline{\theta}_2$ le soluzioni di $\varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1$. Allora

$$x_n = \begin{cases} c_1 e^{-\underline{\theta}_2(n-1)} + c_2 e^{-\overline{\theta}_2(n-1)} & \overline{\theta}_2 \neq \underline{\theta}_2 \\ (c_1' + c_2'(n-1))e^{-\underline{\theta}_2(n-2)} & \overline{\theta}_2 = \underline{\theta}_2 \end{cases}$$

Tail Asymptotic

Dato $\boldsymbol{\pi}$, cerchiamo il comportamento asintotico di π_{nk} con k fissato. Diremo che

- ha una **coda esponenziale esatta** se esistono $\alpha, \beta > 0$ per cui
$$\lim_{n \to \infty} e^{\alpha n} \pi_{nk} = \beta$$
- Ha una **coda esponenziale lasca** se esiste $\alpha > 0$ per cui
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} = -\alpha$$

In questo caso, si dice che α è il **Rate di Decadimento** di π a fase fissa.

Nel caso finito,
$$\lim_{n \to \infty} \lambda^{-n} \pi_n < \infty \implies \alpha = -\log(\lambda)$$

Tail Asymptotic

Dato $\boldsymbol{\pi}$, cerchiamo il comportamento asintotico di π_{nk} con k fissato. Diremo che

- ha una **coda esponenziale esatta** se esistono $\alpha, \beta > 0$ per cui

$$\lim_{n \to \infty} e^{\alpha n} \pi_{nk} = \beta$$

- Ha una **coda esponenziale lasca** se esiste $\alpha > 0$ per cui

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} = -\alpha$$

In questo caso, si dice che α è il **Rate di Decadimento** di π a fase fissa.

Nel caso finito,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda^{-n} \pi_n < \infty \implies \alpha = -\log(\lambda)$$

Tail Asymptotic

Dato $\boldsymbol{\pi}$, cerchiamo il comportamento asintotico di π_{nk} con k fissato. Diremo che

- ha una **coda esponenziale esatta** se esistono $\alpha, \beta > 0$ per cui
$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n}\, \pi_{nk} = \beta$$
- Ha una **coda esponenziale lasca** se esiste $\alpha > 0$ per cui
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} = -\alpha$$

In questo caso, si dice che α è il **Rate di Decadimento** di π a fase fissa.

Nel caso finito,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} \boldsymbol{\pi}_n < \infty \implies \alpha = -\log(\lambda)$$

Tail Asymptotic

Dato $\boldsymbol{\pi}$, cerchiamo il comportamento asintotico di π_{nk} con k fissato. Diremo che

- ha una **coda esponenziale esatta** se esistono $\alpha, \beta > 0$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n}\,\pi_{nk} = \beta$$

- Ha una **coda esponenziale lasca** se esiste $\alpha > 0$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \pi_{nk} = -\alpha$$

In questo caso, si dice che α è il **Rate di Decadimento** di $\boldsymbol{\pi}$ a fase fissa.

Nel caso finito,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{\pi}_n < \infty \implies \alpha = -\log(\lambda)$$

Tail Asymptotic

Dato $\boldsymbol{\pi}$, cerchiamo il comportamento asintotico di π_{nk} con k fissato. Diremo che

- ha una **coda esponenziale esatta** se esistono $\alpha, \beta > 0$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n}\,\pi_{nk} = \beta$$

- Ha una **coda esponenziale lasca** se esiste $\alpha > 0$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} = -\alpha$$

In questo caso, si dice che α è il **Rate di Decadimento** di $\boldsymbol{\pi}$ a fase fissa.
Nel caso finito,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}\boldsymbol{\pi}_n < \infty \implies \alpha = -\log(\lambda)$$

Tail Asymptotic

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} = -\alpha$$

In generale, non è detto che α esista, dunque chiamiamo

$$\overline{\alpha} = -\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} \qquad \underline{\alpha} = -\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk}$$

$$\overline{r} = e^{-\underline{\alpha}} \qquad \underline{r} = e^{-\overline{\alpha}}$$

Tail Asymptotic

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} = -\alpha$$

In generale, non è detto che α esista, dunque chiamiamo

$$\overline{\alpha} = -\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk} \qquad \underline{\alpha} = -\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \pi_{nk}$$

$$\overline{r} = e^{-\underline{\alpha}} \qquad \underline{r} = e^{-\overline{\alpha}}$$

Norma di Convergenza

Data R, definiamo la sua **Norma di Convergenza** come

$$c_p(R) = \sup\left\{z \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} z^n R^n < \infty\right\} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|R^n\|}\right)^{-1}$$

Bound

Si dimostra in ordine che

- $c_p(R) = \sup\left\{z \geq 0 \ : \ z x^t R = x^t, \quad x \in \mathbb{R}_+^{\infty} - \{0\}\right\}$
- $c_p(R) = \sup\left\{z \geq 1 : (z, x) \in \Lambda_A\right\}$
- $c_p(R) = \sup\left\{e^{\theta_1} : \theta \in D_1\right\}$

Inoltre ci fornisce un bound sul decay rate

$$c_p(R)^{-1} \leq \underline{r}$$

Norma di Convergenza

Data R, definiamo la sua **Norma di Convergenza** come

$$c_p(R) = \sup\left\{ z \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} z^n R^n < \infty \right\} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|R^n\|} \right)^{-1}$$

Bound

Si dimostra in ordine che

- $c_p(R) = \sup\left\{ z \geq 0 \ : \ z\boldsymbol{x}^t R = \boldsymbol{x}^t, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\infty} - \{0\} \right\}$
- $c_p(R) = \sup\left\{ z \geq 1 : (z, \boldsymbol{x}) \in \Lambda_A \right\}$
- $c_p(R) = \sup\left\{ e^{\theta_1} : \boldsymbol{\theta} \in D_1 \right\}$

Inoltre ci fornisce un bound sul decay rate

$$c_p(R)^{-1} \leq \underline{r}$$

Dipendenze Marginali

Sia $(z, x) \in \Lambda_A$, con

$$\overline{d} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\pi_{1,n}}{x_n} \qquad \underline{d} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\pi_{1,n}}{x_n}$$

Teorema 1

Se $\overline{d}$ è finito, allora

- $c_p(R)^{-1} \leq \underline{r} \leq \overline{r} \leq z^{-1}$
- se $\underline{d} > 0$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale lasca con

$$e^{-\alpha} = z^{-1}$$

- se esiste $y > 0$ autovettore destro di $A^{(1)}(z)$ per cui $x^t y < \infty$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale esatta con parametro

$$z^{-1} = c_p(R)^{-1}$$

Dipendenze Marginali

Sia $(z, x) \in \Lambda_A$, con

$$\overline{d} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\pi_{1,n}}{x_n} \qquad \underline{d} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\pi_{1,n}}{x_n}$$

Teorema 1

Se $\overline{d}$ è finito, allora

- $c_p(R)^{-1} \leq \underline{r} \leq \overline{r} \leq z^{-1}$
- se $\underline{d} > 0$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale lasca con

$$e^{-\alpha} = z^{-1}$$

- se esiste $y > 0$ autovettore destro di $A^{(1)}(z)$ per cui $x^t y < \infty$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale esatta con parametro

$$z^{-1} = c_p(R)^{-1}$$

Dipendenze Marginali

Sia $(z, \boldsymbol{x}) \in \Lambda_A$, con

$$\overline{d} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\pi_{1,n}}{x_n} \qquad \underline{d} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\pi_{1,n}}{x_n}$$

Teorema 1

Se $\overline{d}$ è finito, allora

- $c_p(R)^{-1} \leq \underline{r} \leq \overline{r} \leq z^{-1}$
- se $\underline{d} > 0$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale lasca con

$$e^{-\alpha} = z^{-1}$$

- se esiste $\boldsymbol{y} > 0$ autovettore destro di $A^{(1)}(z)$ per cui $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} < \infty$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale esatta con parametro

$$z^{-1} = c_p(R)^{-1}$$

Dipendenze Marginali

Teorema 2

Se β è definito come

$$\beta = \sup \left\{ \theta_1 \ : \ \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \limsup_{n \to \infty} \ \pi_{1,n} \ e^{\theta_2 n} < \infty \right\}$$

allora

- $c_p(R)^{-1} \leq \underline{r} \leq \overline{r} \leq e^{-\beta}$
- se $e^{-\beta} = c_p(R)^{-1}$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale lasca con

$$e^{-\alpha} = c_p(R)^{-1}$$

- se $\pi_{1,n}$ ha coda esponenziale esatta, allora ce l'ha anche $\pi_{n,1}$, con

$$e^{-\alpha} = c_p(R)^{-1}$$

Dipendenze Marginali

Teorema 2

Se β è definito come

$$\beta = \sup \left\{ \theta_1 \ : \ \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \limsup_{n \to \infty} \ \pi_{1,n} \, e^{\theta_2 n} < \infty \right\}$$

allora

- $c_p(R)^{-1} \leq \underline{r} \leq \overline{r} \leq e^{-\beta}$
- se $e^{-\beta} = c_p(R)^{-1}$, allora $\pi_{n,1}$ ha coda esponenziale lasca con

$$e^{-\alpha} = c_p(R)^{-1}$$

- se $\pi_{1,n}$ ha coda esponenziale esatta, allora ce l'ha anche $\pi_{n,1}$, con

$$e^{-\alpha} = c_p(R)^{-1}$$

Rough Decay Rates

$$D_1 = \{\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2\ :\ \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1, \quad \varphi^1(\boldsymbol{\theta}) \le 1, \quad \theta_1 \ge 0\}$$
$$D_2 = \{\ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2\ :\ \varphi(\boldsymbol{\eta}) = 1, \quad \varphi^2(\boldsymbol{\eta}) \le 1, \quad \eta_2 \ge 0\}$$

Rate di Decadimento

$$\alpha_1 = \sup\{\theta_1\ :\ \eta_1 \le \theta_1 \quad \theta_2 \le \eta_2 \quad \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \boldsymbol{\eta} \in D_2\}$$
$$\alpha_2 = \sup\{\eta_2\ :\ \eta_1 \le \theta_1 \quad \theta_2 \le \eta_2 \quad \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \boldsymbol{\eta} \in D_2\}$$

sono i Rate di Decadimento di $\pi_{n,1}$ e $\pi_{1,n}$

Positiva Ricorrenza

Se almeno uno degli m_i è negativo, allora

$$\exists \boldsymbol{\pi} \iff \alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0$$

Rough Decay Rates

$$D_1 = \{\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2\ :\ \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1, \quad \varphi^1(\boldsymbol{\theta}) \leq 1, \quad \theta_1 \geq 0\}$$
$$D_2 = \{\ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2\ :\ \varphi(\boldsymbol{\eta}) = 1, \quad \varphi^2(\boldsymbol{\eta}) \leq 1, \quad \eta_2 \geq 0\}$$

Rate di Decadimento

$$\alpha_1 = \sup\{\theta_1\ :\ \eta_1 \leq \theta_1 \quad \theta_2 \leq \eta_2 \quad \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \boldsymbol{\eta} \in D_2\}$$
$$\alpha_2 = \sup\{\eta_2\ :\ \eta_1 \leq \theta_1 \quad \theta_2 \leq \eta_2 \quad \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \boldsymbol{\eta} \in D_2\}$$

sono i Rate di Decadimento di $\pi_{n,1}$ e $\pi_{1,n}$

Positiva Ricorrenza

Se almeno uno degli m_i è negativo, allora

$$\exists \pi \iff \alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0$$

Rough Decay Rates

$$D_1 = \{\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \ :\ \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1, \quad \varphi^1(\boldsymbol{\theta}) \leq 1, \quad \theta_1 \geq 0\}$$
$$D_2 = \{\ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2 \ :\ \varphi(\boldsymbol{\eta}) = 1, \quad \varphi^2(\boldsymbol{\eta}) \leq 1, \quad \eta_2 \geq 0\}$$

Rate di Decadimento

$$\alpha_1 = \sup\{\theta_1 \ :\ \eta_1 \leq \theta_1 \quad \theta_2 \leq \eta_2 \quad \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \boldsymbol{\eta} \in D_2\}$$
$$\alpha_2 = \sup\{\eta_2 \ :\ \eta_1 \leq \theta_1 \quad \theta_2 \leq \eta_2 \quad \boldsymbol{\theta} \in D_1 \quad \boldsymbol{\eta} \in D_2\}$$

sono i Rate di Decadimento di $\pi_{n,1}$ e $\pi_{1,n}$

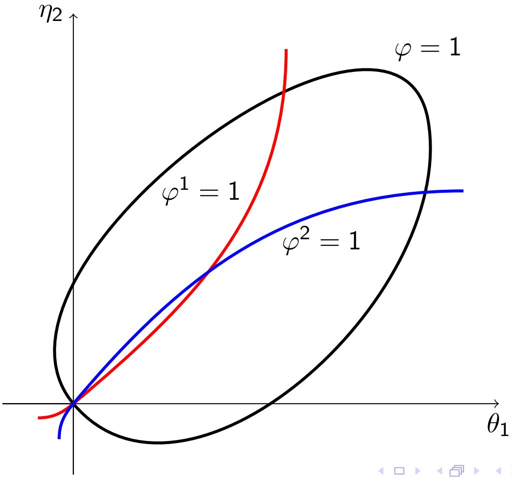
Positiva Ricorrenza

Se almeno uno degli m_i è negativo, allora

$$\exists \boldsymbol{\pi} \iff \alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0$$

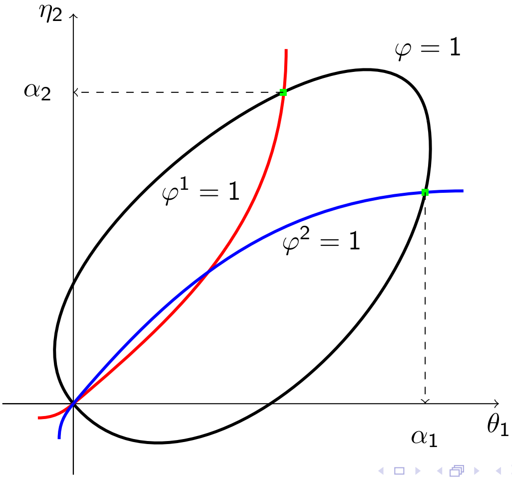
Casistica

Caso $C1$



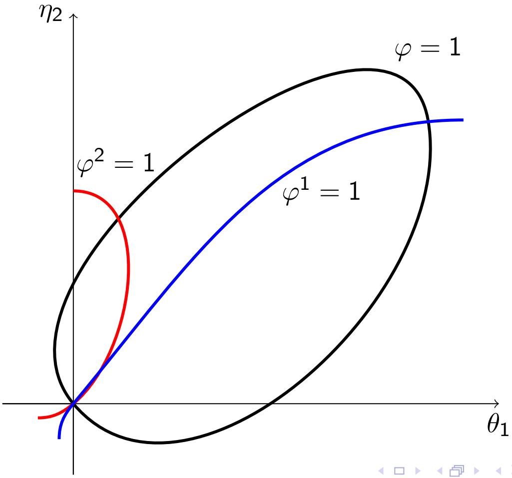
Casistica

Caso $C1$



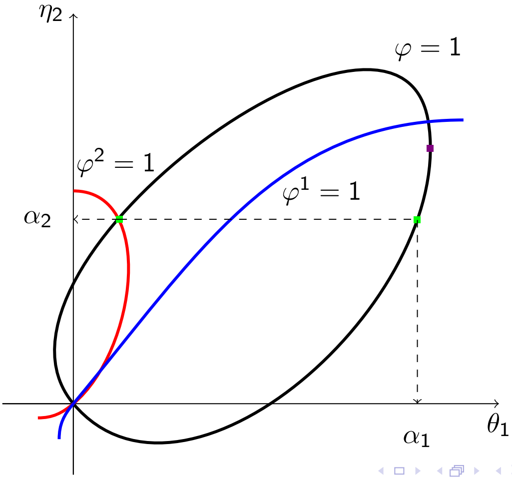
Casistica

Caso $C2$



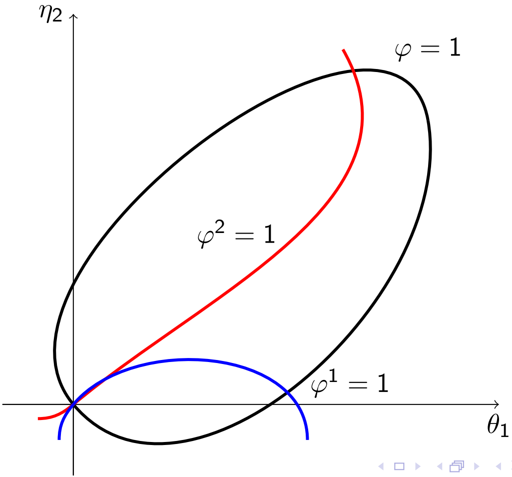
Casistica

Caso $C2$



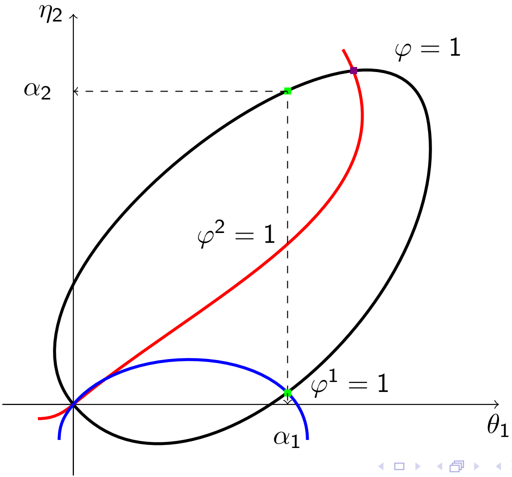
Casistica

Caso $C3$



Casistica

Caso $C3$



Exact Decay Rates

Chiamato $D_0 = \{\boldsymbol{\theta} \; : \; \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1\}$ siano

$$\theta^{max} = \max\{\theta_1 \; : \; \boldsymbol{\theta} \in D_0\} \qquad \eta^{max} = \max\{\eta_2 \; : \; \boldsymbol{\eta} \in D_0\}$$

Se $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, allora

- $\alpha_1 \neq \theta^{max} \implies \alpha_1$ è il decay rate esatto
- Se $\alpha_1 = \theta^{max}$, allora
  - Nel caso $C1$, se $\varphi^1(\theta^{max}) = 1$, allora $\exists c > 0$ per cui
    $$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} e^{n\alpha_1} \pi_{n,1} = c$$
  - Nel caso $C1$, se $\varphi^1(\theta^{max}) \neq 1$, allora $\exists c > 0$ per cui
    $$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} e^{n\alpha_1} \pi_{n,1} = c$$
  - Nel caso $C2$, allora $\exists c > 0$ per cui
    $$\limsup_{n\to\infty} e^{n\alpha_1} \pi_{n,1} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} e^{n\alpha_2} \pi_{1,n} = c$$

Exact Decay Rates

Chiamato $D_0 = \{\boldsymbol{\theta} \;:\; \varphi(\boldsymbol{\theta}) = 1\}$ siano

$$\theta^{max} = \max\{\theta_1 \;:\; \boldsymbol{\theta} \in D_0\} \qquad \eta^{max} = \max\{\eta_2 \;:\; \boldsymbol{\eta} \in D_0\}$$

Se $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, allora

- $\alpha_1 \neq \theta^{max} \implies \alpha_1$ è il decay rate esatto
- Se $\alpha_1 = \theta^{max}$, allora
  - Nel caso $C1$, se $\varphi^1(\theta^{max}) = 1$, allora $\exists c > 0$ per cui
  $$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} e^{n\alpha_1} \pi_{n,1} = c$$
  - Nel caso $C1$, se $\varphi^1(\theta^{max}) \neq 1$, allora $\exists c > 0$ per cui
  $$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} e^{n\alpha_1} \pi_{n,1} = c$$
  - Nel caso $C2$, allora $\exists c > 0$ per cui
  $$\limsup_{n\to\infty} e^{n\alpha_1} \pi_{n,1} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} e^{n\alpha_2} \pi_{1,n} = c$$